ANNALEN DER PHYSIK

BEGRÜNDET UND FORTGEFÜHRT DURCH
F. A. C. GREN, L. W. GILBERT, J. C. POGGENDORFF,
G. u. E. WIEDEMANN, P. DRUDE

VIERTE FOLGE

BAND 73
DER GANZEN REIHE 378. BAND

KURATORIUM:
M. PLANCK, E. WARBURG

UNTER MITWIRKUNG
DER DEUTSCHEN PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
HERAUSGEGEBEN VON

W. WIEN UND M. PLANCK

MIT EINEM BILDNIS UND VIER TAFELN

1924

LEIPZIG · VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH

OBERLIN COLLEGE LIBRARY

S 85.

Ann Pd.
9ES.
5.75

WITHDRAWN
OBERLIN COLLEGE
LIBRARY

Inhalt.

Vierte Folge. Band 73.

Erstes und zweites Heft.

Seite

1. **E. Rupp.** Über die Zentren der Lichtemission der Alkalien. Hierzu Tafel I 1
2. **E. Maey.** Bemerkungen zu der Abhandlung von **Friedrich Kottler** „Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen" 16
3. **A. Schaufelberger.** Über das normale Kathodengefälle in der Luft 21
4. **Adolf Scheibe.** Untersuchungen über die Erzeugung sehr kleiner Wellen mit Glühkathodenröhren nach **Barkhausen** und **Kurz** 54
5. **P. Lenard.** Über die Lichtfortpflanzung im Himmelsraum . 89
6. **Rudolf Tomaschek.** Über das Verhalten des Lichtes außerirdischer Lichtquellen 105
7. **E. Rupp.** Über Leitfähigkeitsänderung der Phosphore durch Kathodenstrahlen 127
8. **W. Kast.** Anisotropie der flüssigen Kristalle bezüglich ihrer Dielektrizitätskonstanten und ihrer elektrischen Leitfähigkeit . 145

Ausgegeben im Dezember 1923.

Drittes und viertes Heft.

1. **Max Wien.** Über die Gültigkeit des **Ohm**schen Gesetzes für Elektrolyte bei sehr hohen Feldstärken 161
2. **W. Seitz.** Über die Asymmetrie der Elektronenemission an sehr dünnen Metallschichten unter der Einwirkung von Röntgenstrahlen 182
3. **M. v. Laue.** G. A. **Schotts** Form der relativistischen Dynamik und die Quantenbedingungen 190
4. **Gustav Mie.** Abklingungszeit und Verweilzeit angeregter Atome 195

Seite

5. **A. Sommerfeld.** Zur Theorie der Multipletts und ihrer Zeemaneffekte 209
6. **E. Rüchardt.** Über den Zusammenhang zwischen Kernneutralisierung und Sekundärstrahlung bei den α-Strahlen und Kanalstrahlen 228
7. **F. Harms.** Über die elektrischen Erscheinungen bei der Reaktion zwischen Chininsulfat und Wasserdampf 237
8. **K. Krüger** und **J. Zenneck.** Über das Dämmerungssehen mit Ferngläsern 242
9. **R. Seeliger** und **J. Schmekel.** Über die normale kathodische Stromdichte der Glimmentladung 249
10. **H. Rau.** Beobachtungen über den Dopplereffekt an Linien und Bandenspektren der Kanalstrahlen 266
11. **Max Planck.** Über die Natur der Wärmestrahlung . . . 272
12. **Th. Des Coudres.** Beschränkte Mischbarkeit von Materie oberhalb der kritischen Temperatur 289

Ausgegeben im Januar 1924.

Fünftes und sechstes Heft.

1. **Franz Selety.** Unendlichkeit des Raumes und allgemeine Relativitätstheorie 291
2. **M. Jakobson.** Über die photographische Wirkung der Kanalstrahlen 326
3. **A. Rubinowicz.** Zur **Kirchhoff**schen Beugungstheorie . . 339
4. **Nikhilranjan Sen.** Über die Grenzbedingungen des Schwerefeldes an Unstetigkeitsflächen 365
5. **A. H. Bucherer.** Die Rolle des Standorts in der Relativitätstheorie. Eine Antwort auf die Kritik des Hrn. **A. Wenzl** . 397
6. **A. Brandt.** Über die Beziehung zwischen der Gleichung von **van der Waals** und der Formel von **Trouton** 403
7. **A. Brandt.** Über die Verdampfungswärme und den Druck gesättigter Dämpfe bei sehr niedrigen Temperaturen 406
8. **A. Brandt.** Die thermodynamische Fläche des Wassers . . 409
9. **A. Brandt.** Über die Differenz der spezifischen Wärmen, bei konstantem Volumen, einer Flüssigkeit und ihres Dampfes . 412
10. **A. Brandt.** Betrachtungen über den Kohäsionsdruck . . . 415
11. Übernahme von photometrischen Registrierungen durch die Physikalisch-Technische Reichsanstalt 426
12. **Günter Wuckel.** Über eine neue Methode zur Messung von Drahtwiderständen bei sehr schnellen Schwingungen 427
13. **Otto Halpern.** Zur Photophorese 457

Seite

14. **L. Citron.** Über das Verhalten des Viellinienspektrums des Wasserstoffs bei tiefen Temperaturen 470
15. **Georg Jacoby.** Nachtrag zur Arbeit „Über die elektrische Polarisation des Dielektrikums“ 477

Ausgegeben im Februar 1924.

Siebentes und achtes Heft.

1. **W. Wien.** Über Messungen der Leuchtdauer der Atome und der Dämpfung der Spektrallinien. III. Hierzu Tafel II u. III 483
2. **W. Friedrich und M. Bender.** Über gestreute Röntgenstrahlung. I. Teil: Die azimutale Verteilung der Röntgenstreustrahlung 505
3. **Wilhelm Heraeus.** Die Abhängigkeit der thermoelektrischen Kraft des Eisens von seiner Struktur. Hierzu Tafel IV . . 554
4. **A. Michels.** Genauigkeit und Empfindlichkeit einer Druckwage mit einem sogenannten Amagatzylinder 577
5. **Alice Golsen.** Über eine neue Messung des Strahlungsdeucks 624
6. **K. W. Meißner.** Über Lyman-Geister in den Wellenlängenmessungen des ultraroten Neonspektrums 643
7. **Gregor Wentzel.** Funkenlinien im Röntgenspektrum (Nachträge) 647
8. **E. Rupp.** Bemerkung zu meiner Arbeit: „Über die Zentren der Lichtemission der Alkalien“ 660

Ausgegeben im März 1924.

Nachweis zu den Figurentafeln.

Tafel I.	**E. Rupp.**
„ II „ III	**W. Wien.**
„ IV.	**W. Heraeus.**

1924. № 1/2.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 73.

---

1. *Über die Zentren der Lichtemission der Alkalien;*

von E. Rupp.

(Aus dem Radiologischen Institut der Universität Heidelberg.)

(Hierzu Tafel I.)

Die Frage nach der Natur der Emissionszentren der Spektrallinien der Metalle, besonders nach deren elektrischem Ladungszustand, ist bekanntlich zuerst und nahe gleichzeitig von den Hrn. J. Stark und P. Lenard ins Auge gefaßt und in eingehenden Experimentaluntersuchungen behandelt worden, wobei Hr. Lenard zumeist auf die Alkalimetalle die Aufmerksamkeit konzentrierte. Die bisherigen Ergebnisse der beiderseitigen, in ihren Fortsetzungen über 20 Jahre sich erstreckenden Untersuchungen führten nicht zu voller Übereinstimmung. Doch schienen alle vorhandenen Kenntnisse in einfachster Auffassung anzuzeigen, daß die Emission der Hauptserie dem neutralen Metallatom der Alkalien, die der Nebenserien dem positiv geladenen Metallatom zukäme[1]), Schlüsse, die aus reichvariiertem Beobachtungsmaterial, besonders über elektrische Wanderung der leuchtenden Metalldämpfe in Flammen und im elektrischen Bogen gewonnen wurden.

Wie das Folgende zeigen soll, sind wir jetzt in der Lage, diese Schlüsse dahin zu erweitern und zu verfeinern, daß die Emissionszentren der Hauptserie in der Tat elektrisch neutral sind, sowohl vor (bei der Erregung) der Emission als auch während der Emission, daß aber die Zentren der Nebenserien zwar vor (bei der Erregung) ihrer Emission positiv geladen, während der Emission hingegen neutral sind. Die Möglichkeit solcher Unterscheidung zwischen dem Zustand kurz vor (bei der Erregung) der Emission und dem Zustand während der

---

[1]) Historisches und Zusammenfassung zur bisherigen Entwicklung des Gegenstandes mit eingehenden Literaturangaben bei J. Stark, Nobelvortrag (Hirzel, Leipzig 1920) und A. Hörnle, Jahrb. d. Radioakt. u. Elt. 18. S. 319. 1921.

Emission selbst (während des Abklingens) war gegeben durch Untersuchungen an leuchtenden Metallkanalstrahlen in vollständigem Vakuum. Hr. W. Wien[1]) hat bekanntlich zuerst (1908) Kanalstrahlen in hohem Vakuum beobachtet, indem er Erzeugungsraum und Beobachtungsraum getrennt mit gesonderten Pumpen versah, wobei nnr ein enger Kanal beide Räume miteinander verband.[2]) Die neueren Pumpvorrichtungen erlauben nun, das durch den Kanal stets in den Beobachtungsraum eintretende Gas mit so großer Geschwindigkeit abzusaugen, daß man dem vollständigen Vakuum im Beobachtungsraum so weit genügend nahe kommt, daß die Zusammenstöße der Kanalstrahlatome mit ruhenden Atomen des Beobachtungsraums nicht mehr merklich störend mitwirken. So war es zum erstenmal möglich geworden, im Leuchten begriffene, als Kanalstrahl bewegte Atome ganz sich selbst überlassen zu beobachten und auf ihren elektrischen Ladungszustand zu untersuchen.[3])

Bei Durchführung der vorliegenden Versuche zeigte sich, daß man je nach dem Vakuum im Beobachtungsraum grundsätzlich zu unterscheiden hat:

I. *Abklingleuchten.* Das Atom wird im Kanal zum Leuchten erregt und gibt im hochevakuierten Beobachtungsraum sein Lichtquant ab, ungestört durch andere Atome.

II. *Umladeleuchten.* Bewegte Atome werden im Kanal, teilweise, aber auch im weniger gut evakuierten Beobachtungsraum zum Leuchten erregt und geben Lichtquanten ab, häufig nicht ungestört durch andere Atome.

Die *Bahn im Abklingleuchten* ist also die *Bahn der erregten Atome während der Emission* des Lichtquants. Im Abklingleuchten läßt sich also aus der Bahn im elektrischen Feld die Ladung des Atoms während der Lichtemission bestimmen.

Die Bahn im Umladeleuchten ist zunächst die Bahn des unerregten Atoms, das durch Nähewirkung mit anderen Atomen erregt wird und dann während der Emission zunächst in der Tangente seiner ursprünglichen Bahn fortfliegt.[1] Der feststellbare Leuchtweg setzt sich aus lauter solchen Tangentenstücken der emittierenden Atome des Strahls zusammen; die Länge des einzelnen Tangentenstückes wird bestimmt durch die Häufigkeit von Störungen durch Zusammenstöße der erregten Atome mit unerregten. Erhöhung des Gasdruckes im Beobachtungsraum wird die Häufigkeit der Störungen vergrößern und dadurch einen diffuseren Leuchtweg verursachen. Man kann jedoch das Vakuum im Beobachtungsraum so wählen, daß der Strahl auf einer beträchtlichen Wegstrecke zusammenbleibt. In diesem Falle läßt sich also *aus dem Umladeleuchten* im elektrischen Feld *Bahn und Ladung des Atoms vor seiner Emission* (bei der Erregung) bestimmen. Dieses Umladeleuchten ist offenbar analog zu erwarten dem Leuchten der Atome in Flammen und im elektrischen Bogen, wo ebenfalls häufige Zusammenstöße, verbunden mit Ladungswechsel, statthaben.

---

[1]) W. Wien, Ann. d. Phys. 27. S. 1025. 1908.

[2]) Die Methode ist entsprechend der von Hrn. Lenard schon 1894 für Kathodenstrahlen mit dem Erfolg der Möglichkeit reiner Versuche eingehend angewandten. Die große Schwierigkeit bei Kanalstrahlen lag nun darin, daß für dieselben keine gasdichten, durchlässigen Wände vorhanden sind, sondern eben der enge Kanal an deren Stelle treten muß.

[3]) W. Wien, Ann. d. Phys. 69. S. 325. 1922.

Hrn. W. **Wiens** Untersuchungen des reinen Abklingleuchtens an Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff und Quecksilber hatten gezeigt, daß sein früher schon an Quecksilberkanalstrahlen[2] mit Wahrscheinlichkeit gezogener Schluß, daß die Lichtemission der Bogenserienlinien in elektrisch neutralem Zustand des Atoms vor sich geht, zu Recht besteht. Es war nun nach den eingangs erwähnten vielen Beobachtungen der Alkalien von besonderem Belang, auch bei diesen Atomen das reine Abklingleuchten zu beobachten.

Vorliegende Untersuchung über die Träger der Lichtemission von Lithium, Natrium und Kalium schließt sich daher an die **Wiensche** Methode an und verwirklicht durch verschiedenen Gasdruck im Beobachtungsraum den Fall des Abklingleuchtens wie des Umladeleuchtens; an Stelle von Kanalstrahlen wurden dabei die von Hrn. **Gehrcke**[3] zuerst hergestellten *Anodenstrahlen* obiger Alkalien benutzt.

---

[1] Es ist dies die von Hrn. **Reichenheim** (Ann. d. Phys. **33**. S. 760. 1910) zur Erklärung seiner und der Versuche Hrn. **Lenards** angegebene Deutungsmöglichkeit. Vgl. auch **Hörnle**, a. a. O. S. 322.

[2] Ann. d. Phys. **30**. S. 368. 1909.

[3] Ann. d. Phys. **25**. S. 877. 1907.

Die *Versuchsröhre* ist in Fig. 1 dargestellt1): *E R* ist der Erzeugungsraum der Anodenstrahlen, *Me* ein Metallkopf mit dem Kanal und *B R* der Beobachtungsraum mit Kondensator. Das Salzpräparat der Anode *A* sitzt am Ende eines Glasrohres, das die Stromzuleitung *Z* enthält und durch den Schliff *S* herausgenommen werden kann. Bei *Kp* ist eine enge Kapillare angeschlossen, durch die Wasserstoff oder auch Sauerstoff zugeleitet werden kann, um einerseits das Hartwerden der Röhre zu verhindern, andererseits aber auch zugleich mit den Anodenstrahlen die Kanalstrahlen des zugeführten Gases als Vergleichsspektrum stets mitzuphotographieren. Durch zugeführten Sauerstoff ließ sich auch die Versuchsanordnung auf Erreichen des Abklingleuchtens prüfen. Eine Gaedetrommelpumpe an *G* evakuierte *E R*. In den Metallkopf *Me* aus Aluminium und Messing waren *E R* und *B R* eingekittet. Der Kanal *K* ist nochmals besonders gezeichnet. Eine 30 mm lange Bohrung von 4 mm Durchmesser war durch ein Metallblättchen (*L*) von 2 mm Dicke abgeschlossen, in dessen Mitte sich ein Loch von 0,2 mm Durchmesser befand. Der eigentliche Spalt hatte also 2 mm Länge und 0,2 mm Durchmesser. In der vorderen weiten Bohrung war noch eine Blende *B* eingesetzt mit 2 mm Öffnung. Sie hatte den Zweck unter schiefem Winkel in den Kanal eintretende Gasmoleküle abzufangen und in der

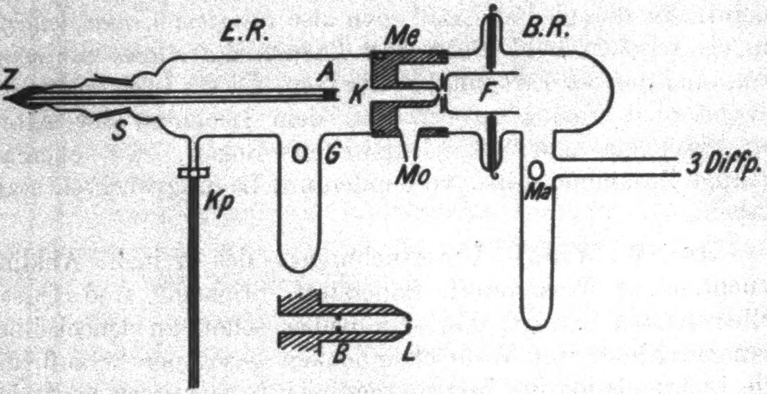


Fig. 1.

---

1) In der Fig. 1 ist gegenüber der verwendeten Röhre die Dicke zu groß gegen die Länge gezeichnet.

Hauptsache nur die Moleküle mit Bewegung in Richtung des Strahles, also parallel zur Bohrung durchzulassen. Der Raum BL stellt so eine Zwischendruckstufe zwischen Erzeugungsraum und Beobachtungsraum dar, eine Einrichtung, die sich gut bewährt hat. Der Metallkopf trägt außerdem noch einen Metallschliff, der mit weitem Ansatzrohr an eine Gaedesche Molekularpumpe angeschlossen ist. Die durch das weite Ansatzrohr mit kräftiger Saugleistung wirkende Molekularpumpe pumpt also unmittelbar am Spaltende die in den Beobachtungsraum einströmenden Gase ab, welche Einrichtung die Zahl der an den Beobachtungsraum angeschlossenen Diffusionspumpe auf 3—4 verringern ließ. Der Spalt war in Richtung des Beobachtungsraums mit einem 0,1 mm dicken Glimmerblättchen von ungefähr 1 mm Öffnung bedeckt. Daran lagen die hakenförmigen Elektroden des ablenkenden Kondensatorfeldes F unmittelbar an. Die Haken hatten 1 mm Abstand und werden 3 mm breit. Sie waren verstellbar auf die eingeschmolzenen Platten des weiteren Kondensatorraumes aufgesetzt. Evakuiert wurde der Beobachtungsraum außer durch die Molekularpumpe durch die an das Kühlrohr in möglichst kurzem und weitem Ansatzrohr angeschlossenen Diffusionspumpen: 1 Gaedesche Diffusionspumpe, 1 Langmuirsche Dampfstrahlpumpe und 1 Pumpensatz nach Volmer. Das Vakuum im Beobachtungsraum konnte mit einem Manometer nach Gaede gemessen werden. Für den Erzeugungsraum wurde seine Konstanz nur durch eine Funkenstrecke überwacht.

Die Herstellung des *Anodenpräparates* nach den Angaben der Hrn. Gehrcke und Reichenheim[1]) erforderte viel Sorgfalt und Übung, wie ja auch Hr. Gehrcke mitteilt, daß die Herstellung guter Salzanoden nicht immer leicht in gleich guter Weise gelingt. Bei der verhältnismäßig großen Entladungsintensität der Anodenstrahlen und bei den vielstündigen Expositionen mußte die Anode häufig im Dunkeln erneuert werden, was zusammen mit der Überwachung der Apparatur die Untersuchung recht mühevoll gestaltete. Leicht herzustellen und lange haltbar waren Lithiumanoden aus LiJ mit Graphit oder Eisenpulver. Natriumanoden aus NaJ und NaBr mußten

---

1) Ann. d. Phys. **33**. S. 747. 1910.

hingegen ungefähr stündlich erneuert werden. KJ und KBr hielt wieder etwas länger.

Der Strom zur Erzeugung der Anodenstrahlen wurde von einer 20plattigen Influenzmaschine nach Leuner geliefert, die Anode war auf Spannung, der Metallkopf geerdet. Die Spannung betrug 10—20000 Volt, meist 15000. Ein Hartwerden der Röhre tritt dabei bei Anodenstrahlen erst viel später ein wie bei reinen Kanalstrahlen.

Das ablenkende Feld wurde einmal von einer Hochspannungsbatterie von 500 Volt oder auch von einer kleinen Influenzmaschine geliefert (bis 8000 Volt), die Spannung dabei mit einem Braunschen Elektrometer unmittelbar am Kondensator gemessen.

Das Vakuum im Beobachtungsraum betrug für das Abklingleuchten 0,0002—0,0005 mm Hg, für das Umladeleuchten 0,002—0,008 mm Hg. Beide Kühlrohre der Röhre staken stets in einem Kohlensäure-Alkoholgemisch oder auch in flüssiger Luft während des Betriebs.

Als *Spektrograph* wurden zwei eigens zusammengesetzte Apparate verwendet. Einer mit einem großen Flintglasprisma vom 60° brechenden Winkel, als Kollimatorlinse eine Busch-Projektionslinse von 40 cm Brennweite und einem Öffnungsverhältnis 4, als Bildlinse ein kleineres Objektiv von 15 cm Brennweite und Öffnungsverhältnis 3.

Dann ein großer Quarzspektrograph mit 2 Prismen, einer Kollimatorlinse von 36 cm Brennweite und Öffnungsverhältnis 2,6 und einer Bildlinse von 18 cm Brennweite und Öffnungsverhältnis 1,3.¹) Die Kollimatorlinse des Spektrographs stand parallel zum Strahl, oder häufiger unter einem Winkel, um auf die Öffnung des Kanals sehen zu können. Die Einstellung der photographischen Platte wurde mit einer Wasserstoffgeißlerröhre ausprobiert. Als Platten verwendet wurden Hauff-Ultrarapid; entwickelt wurde mit Metolhydrochinon.

Die Belichtungsdauer betrug 6—12 Stunden, meist 10 bei Abklingleuchten und 7 bei Umladeleuchten.

---

1) Der äußerst lichtstarke spaltlose, nach H. Lenards Angabe gebaute Apparat ist das größte Exemplar der bereits Ann. d. Phys. 31. S. 644. 1910 beschriebenen Art.

Beobachtet man den *Anodenstrahl mit dem Auge*, während das Vakuum im Beobachtungsraum allmählich zunimmt, so sieht man zunächst einen kräftigen Strahl, der bei Li rot, bei Na gelb und bei K violett gefärbt ist, aus dem Spalt kommen und sich von etwa 1 cm Abstand an fächerartig verbreiten, dann faltet sich der Fächer immer mehr zusammen und schließlich erfüllt ein ziemlich eng geschlossenes Strahlenbündel den Beobachtungsraum. Legt man jetzt das Kondensatorfeld an, so kann man eine deutliche Ablenkung des einen Strahlenteils beobachten. Mit gut an die Dunkelheit gewöhntem Auge läßt sich in einem spaltlosen, lichtstarken Spektroskop erkennen, welche Linien abgelenkt werden und welche nicht, so daß im Falle des Umladeleuchtens das Auge die photographische Platte ergänzen und ersetzen kann. Wird jetzt das Vakuum noch besser, so zieht sich der scharfe Strahl immer mehr gegen den Spalt zurück, er ähnelt dann einer Nadel, von deren Spitz aus ein diffuses graues Leuchten den übrigen Beobachtungsraum erfüllt. Das Anlegen eines Feldes läßt jetzt mit dem Auge nichts mehr erkennen und durch das Spektroskop erblickt man höchstens noch die Linie H_β des Wasserstoffs in unbestimmter graugrünlicher Färbung. In diesem Zustand ist der Fall des Abklingleuchtens verwirklicht.

Ergebnisse.[1]

Lithium.

Umladeleuchten:

Nicht abgelenkt:	$\lambda = 670$ μμ	H.-S.	$n = 3$	Okular beobachtet.
Abgelenkt:	$\lambda = 460$ „	I. N.-S.	$n = 4$	„ „
	413 „		$n = 5$	
	391 „		$n = 6$	
	427 „	II. N.-S.	$n = 5$	
	398 „	II. N.-S.	$n = 6$	

---

[1] Bemerkungen zur Tafel I. Fig. Ia. Der von links hereinragende schwarze Keil läßt die Ablenkung der Li-Nebenserienlinie gegenüber der K-Hauptserienlinie gut erkennen. Fig. Ib. 398 Li ist nach unten abgelenkt gegen 404 K. Ebenso sind die Sauerstofflinien abgelenkt, ob auch 437 μμ läßt sich nicht erkennen. Durch ungleichen Gang der Influenzmaschine schwankte die ablenkende Spannung. Fig. III. Spektrograph schief zum Strahl, daher die Linienverbreiterung nach links. Ebenso Fig. IV. 404 K und 398 Li, ebenso 391 Li sind hier ganz kurze Ansätze, deren Richtung sich aber deutlich von den der stark abgelenkten O-Linien abhebt. Fig. V. 450 Na ist erst von der Mitte des Bildes nach links erkennbar. *Anmerk. b. d. Korr.* Leider sind eine Reihe Feinheiten bei der Reproduktion verloren gegangen.

Abklingleuchten:
Abgelenkt: ?
Nicht abgelenkt: $\lambda = 460\ \mu\mu$
$\lambda = 391$ „
$\lambda = 398$ „

Natrium.

Umladeleuchten:
Nicht abgelenkt: $\lambda = 589\ \mu\mu$ $n = 3$ Okular beobachtet.
$\lambda = 498$ „ I. N.-S. $n = 5$ „ „
Abgelenkt: $\lambda = 467$ „ „ $n = 6$
450 „ „ $n = 7$
475 „ II. N.-S. $n = 6$
Abklingleuchten:
Abgelenkt: ?
Nicht abgelenkt: $\lambda = 467\ \mu\mu$
450 „
475 „

Kalium.

Umladeleuchten:
Nicht abgelenkt: $\lambda = 404\ \mu\mu$ H.-S. $n = 4$
Abgelenkt: ?
Abklingleuchten:
Abgelenkt: ?
Nicht abgelenkt: $\lambda = 404\ \mu\mu$

Ferner in Bestätignng Hrn. Wiens:

Wasserstoff: H_β und H_γ in Umlade- und Abklingleuchten nicht abgelenkt.

Sauerstoff: $\lambda = 435$, 441, 464 $\mu\mu$ abgelenkt und zwar im Abkling- wie, hier neu festgestellt, im Umladeleuchten.

Linien der Funkenspektren der Alkalien konnten nicht festgestellt werden.

Die Ergebnisse lassen sich zusammenfassen:

Die Hauptserie der Alkalibogenspektren wird von einem Atom emittiert, das vor der Emission (Umladeleuchten) und während der Emission (Abklingleuchten) neutral ist.

Die I. und II. Nebenserie der Alkalibogenspektren werden von Atomen emittiert, die vor der Emission positiv geladen, während der Emission jedoch neutral sind.

Die Funkenlinien des Sauerstoffs werden von Atomen emittiert, die vor und während der Emission positiv geladen sind.[1])

---

[1] Wie jetzt festgestellt werden kann, entspricht in der Untersuchung Hrn. Seeligers (R. Seeliger und D. Thaer, Ann. d. Phys. **65.** S. 423. 1921) der dortige Typ II den Bogenlinien, der Typ I den Funkenlinien

Die Untersuchung vermag also die *Vorgänge am bewegten Atom* in Wechselwirkung mit dem ruhenden Atom vor und während der Lichtemission klarzustellen, die Lichtemission selber als Wechselwirkung zwischen ausgelöstem Elektron und emittiertem Lichtquant weist sie ganz dem bewegten Atom zu, ohne weitere Aussagen über deren Mechanismus machen zu können. Die in der Literatur des Atommodells gebräuchliche Auffassung der Bogen- und Funkenspektren als den neutralen bzw. den positiven Zentren zugehörig wird für die Zeit des Abklingleuchtens präzisiert.

Über die Vorgänge am bewegten Atom gelangt man zu folgendem Bild:

Die Anodenstrahlen verlassen als positive unbeschwerte Ionen[1]) die Anode. Auf dem Weg zum Kanal können sie Umladungen erfahren. Die Fälle der Wechselwirkung der Atome im Kanal, die zu Lichtemissionen führen, lassen sich dann folgendermaßen zusammenfassen:

1. *Bewegte neutrale Atome* treffen auf neutrale oder positiv (oder negativ) geladene ruhende oder im Vergleich zu den Atomen des Strahles mit geringer Geschwindigkeit sich bewegende Atome: *Erregung der Hauptserie.* Dieser Fall ist offenbar der häufigste, da die Hauptserie stets mit größter Intensität auftritt.

2. *Bewegte positiv geladene Atome* treffen auf neutrale (oder negativ geladene) Atome, nehmen dabei ein Elektron auf und werden dadurch zur *Emission der Nebenserie* angeregt, im Zustand der Emission sind sie also neutral. Dieser Fall ist schon weniger häufig als Fall 1. — Der Emission der Nebenserie muß also Aufnahme eines Elektrons durch das positive Atom vorhergegangen sein, und eine solche wird um so häufiger erfolgen, je höher die kinetische Energie der Zusammenstöße der zur Lichtemission erregten Atome, d. h. je höher der

---

im Zustand des Abklingleuchtens, so daß hier, obwohl in dieser Untersuchung eine reinliche Scheidung der Anregungsbedingungen nicht durchgeführt ist, durch eine einfachere Versuchsanordnung der Zustand des emittierenden Atoms im Abklingleuchten gefunden werden kann.

[1]) Nachweis des Abdampfens unbeschwerter Ionen bei P. Lenard, Probleme komplexer Moleküle Teil I, S. 14, Heidelb. Akad. 1914; die unbeschwerten Ionen in geschmolzenen Salzen schon Ann. d. Phys. 17. S. 205. 1905.

Anodenfall im Anodenstrahl oder je höher die Temperatur im Fall des elektrischen Bogens. Im elektrischen Bogen treten daher die Nebenserien um so häufiger auf, je höher die Temperatur, wie schon Hr. Lenard[1]) fand und Hr. Ramsauer[2]) auf andere Weise bestätigte.[3])

3. *Bewegte positive Atome* treffen auf positiv geladene Atome: *Erregung des Funkenspektrums.* Dieser Fall scheint bei Anodenstrahlen am wenigsten häufig aufzutreten. Ob hierbei noch Ladungswechsel zwischen mehrwertig positiv geladenen zu einwertig positiven Atomen stattfindet, kann durch die verwendete Methode nicht entschieden werden.

Wechselwirkung zwischen bewegten Atomen und freien Elektronen wird im Kanal selber keine Rolle spielen, sie sei daher nicht berücksichtigt.

Diese die Versuchsergebnisse zusammenfassende Zusammenstellung lehrt: *Erregung zur Lichtemission der positiven Massenstrahlen findet nur durch Wechselwirkung zwischen bewegten und relativ dazu ruhenden Atomen statt.*[4]) Die Lichtemission selbst hingegen ist rein Vorgang des einzelnen Atoms in Übereinstimmung mit geltenden Anschauungen über das Leuchten der Atome.

Offen bleibt die Frage, warum der Erregung der Nebenserie eine Neutralisation des positiven Atoms vorausgeht; eine Antwort müßte im Atommodell der Alkalien gesucht werden.

Den hierbei stattfindenden Vorgang mag man sich folgendermaßen veranschaulichen: Durch Wechselwirkung des bewegten positiv geladenen Kanalstrahlatoms mit einem ruhenden Atom nimmt das Kanalstrahlatom ein Elektron (Valenzelektron) auf; dabei wird ein weiteres Elektron auf eine andere Bahn

---

1) P. Lenard, a. a. O. und auch A. Hörnle, a. a. O.

2) C. Ramsauer und F. Wolf, Ann. d. Phys. **66**. S. 373. 1921.

3) Lichtanregung von Nebenserienlinien nach der Methode des „Elektronenstoßes“ ist nach unseren Ergebnissen in trägerfreiem Gas erst nach Überschreitung der Trägerbildungsspannung zu erwarten, was soweit man bisherige Messungen heranziehen kann, mit diesen in Einklang steht.

4) Untersuchungen an Flammen hatten das schon früher gezeigt. (Lenard, Elt.-Leitung in Flammen, Heidelb. Akad. 1914 und E. Zachmann, Diss. 27. IV. 1923, wo auch Wechselwirkung zwischen Metallatomen und Flammenmolekülen nachgewiesen wird.)

gehoben (Zustand der Erregung), das bei seiner Rückkehr die Lichtemission der Nebenserienlinie verursacht. Die leichte Aufnahme eines Elektrons (größere Intensität der Nebenserienlinien gegenüber den Funkenlinien) zur Neutralisation eines Atoms mag mit einer größeren Flächenausdehnung der den Nebenserien entsprechenden Elektronenbahnen gegenüber den Bahnen der Hauptserienlinien zusammenhängen, eine Auffassung, die sich mit der in neueren Atommodellen deckt. Das Auftreten eines solchen „*Emissionselektrons*" ist in ähnlicher Weise auch aus Phosphoreszenzuntersuchungen angezeigt.[1])

Da für die Alkalien der hier festgestellte Ladungszustand der Emissionszentren der einzelnen Serien im Umladeleuchten mit dem aus der räumlichen Verteilung der Lichtemission im elektrischen Bogen[2]) geschlossenen übereinstimmt, wird auch für die bekannten räumlichen Verteilungen der Lichtemission der von den Hrn. Kramsztyk[3]) und Hörnle[4]) untersuchten anderen Elementen der entsprechende Ladungszustand des Umladeleuchtens vorliegen. Danach sind die in der Zusammenfassung von Hrn. Hörnle als *Saumflammen* angeführten Gruppen bei der Erregung *elektrisch neutral*, die als *Hohlflammen* beobachteten Gruppen bei der Erregung *positiv* geladen.

Also für die *Erdalkalien bei der Erregung elektrisch neutral*:
Die Hauptserie der Einfachlinie.

Hingegen *bei der Erregung positiv* geladen:
Die 1. und 2. Nebenserie der Tripletlinien.
Die Hauptserie der Dubletlinien.
Die 1. Nebenserie der Dubletlinien.
Die 2. und 3. Nebenserie der Einfachlinien.

---

1) P. Lenard, Ausleuchtung und Tilgung der Phosphore, Teil I. Vgl. auch Hrn. Kossels Theorie des „rückfallenden" Elektrons. Verh. Phys. Ges. 1914. S. 809.

2) Eine weitere Verfolgung der räumlichen Lichtemission im elektrischen Bogen, wie es von H. Berthold (Phys. Zeitschr. 23. S. 178. 1922) mit Hervorkehrung von Sonderfällen der Flammenbilder- und demnach der Temperaturverteilung geschieht, erübrigt sich, nachdem jetzt der ganze Fragenkomplex eine zusammenfassende Deutung gefunden hat.

3) Ann. d. Phys. 48. S. 375. 1915.

4) a. a. O. Zusammenstellung. S. 316.

Für das *Abklingleuchten* ist unter Heranziehung der Ergebnisse Hrn. Seeligers[1]) anzunehmen, daß *bei der Emission neutral sind*:

Die Einfach- und die Tripletlinien.

Bei der Emission positiv geladen:

Die Dubletserienlinien.

Danach läge für die 2. und 3. Nebenserie der Einfachlinien und für die 1. und 2. Nebenserie der Tripletlinien Aufnahme eines Elektrons vor der Auslösung der Lichtemission vor, wie bei den Nebenserienlinien der Alkalien.

Ferner sind für *Zink, Magnesium und Quecksilber im Umladeleuchten positiv* geladen; *im Abklingleuchten elektrisch neutral*[2]):

Die 1. und 2. Nebenserie der Tripletlinien.

Elektrisch *neutral im Umlade- und Abklingleuchten* ist für *Hg die Linie* 253 $\mu\mu$.

Für *Aluminium* sind danach *im Umladeleuchten und im Abklingleuchten positiv* geladen:

Die 1. und 2. Nebenserie der Dubletlinien.

Nach Klarstellung der Ladungszustände vor und während der Lichtemission der Alkalien wäre nun auch die vorhandene Kenntnis der *Lichtabsorption und Reemission* mit den neuen Tatsachen zu vereinigen, im besonderen die Frage, warum im nichtleitenden Metalldampf vorhandene neutrale Atome nur die Hauptserie, nicht aber die Nebenserie absorbieren. Hierfür bot sich in den früheren Schlüssen Hrn. Lenards ohne weiteres eine Erklärung in der Auffassung, daß der Ladungszustand des Atoms während der Absorption dem der Emission entspreche.[3]) Unsere Versuche zeigen nun an, daß der Zustand des Atoms während der Absorption demjenigen bei der Erregung (nicht aber während der Emission) entspricht, was damit übereinstimmt, daß Absorption ja auch wieder zur Reemission führen kann, also Erregung durch Absorption möglich ist. Danach hat Absorption der Hauptserienlinien im unerregten neutralen

---

1) a. a. O., S. 433.

2) Wie es auch H. Wien (a. a. O.) für Hg gefunden hat.

3) Vgl. A. Hörnle, a. a. O. S. 326.

Metallatom statt, Absorption der Nebenserienlinien jedoch erst, nachdem der unerregte Metalldampf auf irgendeine Weise leitend gemacht wurde. Die Auffassung der Absorption als bedingt durch den Ladungszustand des unerregten Atoms läßt sich auch mit dem neuen Befund vereinen, wenn man sie dahin ändert, daß der Zustand des Atoms während der Absorption dem gerade vor der Emission (bei der Erregung) entspricht; eine Annahme, die auch durch die Tatsache schon nahegelegt wird, daß, wie oben bereits ausgeführt, Absorption geradezu zur Erregung benutzt werden kann. — Suchen wir den Vorgang der Absorption zusammen mit der Reemission anschaulich zu verfolgen:

Ein Lichtquant fällt auf ein neutrales unerregtes Atom und löst dort ein Elektron aus, das nach Rückkehr auf seine ursprüngliche Bahn wieder ein gleiches Lichtquant reemittieren kann. Dieser Fall läge bei der Hauptserie vor, wofür auch die Versuche sprechen.

Fällt ein Lichtquant auf ein positiv geladenes Atom, so wird hier wiederum ein Elektron ausgelöst. Kehrt nun dieses Elektron zurück, so könnte eine Linie des Funkenspektrums emittiert werden. — Da der Versuch zeigt, daß die Emission der Nebenserienlinien im neutralen Atomzustand erfolgt, muß, damit ein positiv geladenes Atom nach der Absorption eine Nebenserienlinie emittieren kann, erst ein von außen aufgenommenes Elektron das Atom neutralisieren und erst dann könnte bei Rückkehr des ausgelösten Elektrons eine Nebenserienlinie zur Reemission kommen. Atome, die keine Gelegenheit haben, von außen ein Elektron aufzunehmen, könnten daher überhaupt nicht Nebenserienlinien reemittieren, sondern nur Funkenlinien. Eine Neutralisation des positiv geladenen, durch Einstrahlung zur Emission der Nebenserie erregten Atoms müßte während der Verweilzeit des ausgelösten Elektrons erfolgen, daher würde im verdünnten kalten Dampf unter entsprechenden Erregungsbedingungen wegen der Kürze dieser Verweilzeit eine Reemission von Nebenserienlinien viel weniger häufig sein als von Funkenlinien, die ja reemittiert werden, wenn eine solche Aufnahme eines Elektrons nicht stattgefunden hat. Dichter erhitzter Metalldampf, der mehr Gelegenheit zur Neutralisation positiver Atome bietet, müßte dagegen die Intensität der reemittierten

Nebenserienlinien erheblich steigern gegenüber den Funkenlinien.[1])

In anderer Weise vermag die Theorie des Atommodells die vorliegenden Verhältnisse zu erklären, indem sie die Lichtabsorption nicht als Frage des Ladungszustandes des absorbierenden Atoms behandelt, sondern als Folge der, von der Grundbahn des Atoms (Hauptserienlinien) ausgehend, durch die auftreffenden Serienlinien zur Verfügung stehenden Energiedifferenzen, wobei tatsächliches Statthaben von Lichtabsorption und Reemission durch das Auswahlprinzip geregelt wird.[2]) Danach absorbiert neutraler Na-Dampf zunächst nur die der Grundbahn entsprechenden Hauptserienlinien. Als erste absorbierbare Nebenserienlinie käme nach dem Auswahlprinzip von Sommerfeld die 1. Linie der 3. Nebenserie ($2p - 3p$) in Frage und zwar erst dann, wenn die Hauptserienlinien 3303 Å. ($3p - 1{,}5s$) und 5896 ($2p - 1{,}5s$) auf den Dampf auftreffen. Nach dem Auswahlprinzip von Bohr wären die ersten absorbierbaren Nebenserienlinien die 1. Linien der scharfen 11404 Å. ($2p - 1{,}5s$) und der diffusen Nebenserie 8196 Å. ($2p - d$). Die anderen Nebenserienlinien könnten zur Absorption, bzw. Reemission, kommen, wenn noch kürzerwellige Hauptserienlinien als 3303 auf den Na-Dampf treffen, wiederum geregelt durch das Auswahlprinzip.

Experimentelle Tatsachen zur Klärung dieser Frage fehlen bisher. Auch die Untersuchungen Hrn. Füchtbauers[3]) an Hg-Dampf lassen keine Entscheidung zu, ob bei der von ihm beobachteten Reemission einer ganzen Reihe Nebenserienlinien bei Bestrahlung mit intensivem Licht der Hg-Linie 2537 die Reemission tatsächlich nach den Vorstellungen des Atommodells erfolgt. Denn da diese Reemission gerade bei intensiver Bestrahlung eintritt, die auch lichtelektrische Wirkung an den Hg-Atomen verursacht und damit das Vorhandensein positiv geladener Quecksilberatome im kalten Dampf außer Zweifel steht[4]), bleiben diese Untersuchungen auch in Einklang mit unserer einfacheren Deutung, daß Absorption der Nebenserien an den positiven Ladungszustand des absorbierenden Atoms mit danach folgender Aufnahme eines Elektrons gebunden ist.[1]) Beide Erklärungsversuche stehen zudem nicht als Gegensätze einander gegenüber, sondern sind geeignet, unsere Kenntnis vom Atombau nach verschiedenen Richtungen hin zu erweitern. Ein Eingehen auf den Ladungszustand bei Experimenten zur Feststellung der Grundbahn des Atoms könnte hier fruchtbare Arbeit leisten.

---

[1]) Die mir zugänglichen Untersuchungen von R. W. Wood lassen sich für den hier ins Auge gefaßten Fall nicht heranziehen.

[2]) Vgl. A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien S. 390, 1922 und C. Füchtbauer, Phys. Zeitschr. 21. S. 635. 1920.

[3]) Phys. Zeitschr. 21. S. 635. 1920.

[4]) Das Auftreten der Funkenlinie 2848, deren Träger ja vor und während der Emission positiv geladen sind, kann auch in dieser Weise erklärt werden.

Zum Schluß möchte ich Hrn. Geheimrat Lenard, auf dessen Anregung ich diese Untersuchung unternahm, für viele wertvolle Ratschläge auch an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

Heidelberg, Mai 1923.

---

1) Eine experimentelle Durchführung des oben skizzierten Gedankengangs — relativ intensivere Reemission der Nebenserienlinien gegenüber den Funkenlinien bei dichterem und heißerem, leitendem Dampf — verspräche eine Entscheidung, ob die Lichtabsorption an den Ladungszustand gebunden ist oder nach dem Schema des Bohrschen Atommodells verbunden mit Auswahlprinzip vor sich geht.

(Eingegangen 16. Juni 1923.)

2. *Bemerkungen*
zu der Abhandlung von Friedrich Kottler „Zur Theorie der Beugung an schwarzen Schirmen"[1];
von E. Maey.

Die mathematisch exakte Fassung, welche die Bedeutung des schwarzen Schirmes für die Beugung in der genannten Arbeit[1]) gefunden hat, gibt ihr einen Wert, der nur bei genauer Kenntnis der geschichtlichen Entwicklung des Problems recht gewürdigt werden kann. Da aber diese bei den kurzen Literaturangaben der Arbeit nicht immer ganz klar und richtig dargestellt ist, sehe ich mich zu folgenden Bemerkungen dazu veranlaßt.

I. Zu Anmerkung 3) auf S. 455.

Daß die hier theoretisch abgeleitete Erscheinung als Randerscheinung zuerst von W. Wien beobachtet sei, ist nicht zutreffend. Diese war schon Grimaldi bekannt. Auch Newton und Young beschrieben sie eingehend. Das habe ich ausführlicher schon an anderer Stelle[2]) auseinandergesetzt. Fresnel dagegen überging sie, wahrscheinlich weil er sie nicht aus seinen Integralen ableiten konnte und daher für keine echte Diffraktionserscheinung hielt. Seitdem verschwand sie für etliche Jahrzehnte aus allen Bearbeitungen der Beugungserscheinungen und in den meisten fehlt sie auch heute noch, wo immer die Beugung hinter einem Spalt als einfachste Beugungserscheinung an die Spitze gestellt wird, obwohl doch inzwischen ihre grundlegende Bedeutung für die Auffassung aller Beugungserscheinungen klargestellt ist.

---

1) Fr. Kottler, Ann. d. Phys. 70. S. 405. 1923.

2) E. Maey, Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr. 17. S. 11. § 1. Die einfachste Beugungserscheinung und die Geschichte ihrer Kenntnis. 1904.

Es ist der Erfolg der Arbeiten von W. Wien[1]) und M. Gouy[2]), erneut die Aufmerksamkeit auf diese Erscheinung gelenkt zu haben. Durch jene angeregt, habe ich dann sie zuerst als echte Beugungserscheinung nachgewiesen[3]) durch Ableitung aus dem Kirchhoffschen Integral und den Vergleich mit der Beobachtung, nach der sie in der Wellenfläche, Phase und Intensität im wesentlichen mit dem theoretisch gewonnenen Ergebnis übereinstimmt. Die Ergebnisse meiner Arbeit einerseits und die unbefriedigende Grundlage andererseits, auf der das Kirchhoffsche Integral beruhte, die ich in § 1 meiner Arbeit in aller Deutlichkeit gekennzeichnet hatte, veranlaßten dann Sommerfeld[4]), die theoretische Ableitung auf ganz neuem Wege zu gestalten. Die exaktere mathematische Behandlung führte aber zu wenig abweichenden Ergebnissen und mußte sich auf den besonders einfachen Fall des senkrechten Einfalls beschränken, während es mir gelungen war, die Beugung für beliebigen Einfallswinkel gegen die Beugungskante mathematisch abzuleiten und durch Beobachtung zu bestätigen. Die Bedeutung dieser allgemeinen Darstellung erhellt aus ihrer Verwertung in der Ultramikroskopie.[5])

II. Zu der Näherungsformel (10^+) auf S. 453

$$u^B \sim \frac{1}{4\pi} e^{-i\left(k\varrho_P+\frac{\pi}{4}\right)} \sqrt{\frac{2\pi}{k\varrho_P}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2},$$

bemerkt Kottler auf S. 454, „daß dieses Resultat natürlich bei der gewöhnlichen Behandlung der Kirchhoffschen Lösung als eines Flächenintegrals und der dabei üblichen ziemlich wilden Annäherung, die im wesentlichen auf eine Anlehnung an die alten unzureichenden Formeln von Fresnel hinausläuft, nicht erzielt hätte werden können.“

---

[1]) W. Wien, Ann. d. Phys 28. S. 117. 1886.

[2]) M. Gouy, Ann. d. chim. et d. phys. VI. 8. S. 145. 1886.

[3]) E. Maey, Ann. d. Phys. 49. S. 69. 1893.

[4]) A. Sommerfeld, Math. Ann. 47. S. 317. 1895.

[5]) H. Siedentopf, Über ultramikroskopische Abbildung linearer Objekte. Zeitschr. f. wissenschaftl. Mikroskopie. XXIX. S. 1—47. 1912; E. Maey, Die räumliche Lagerung von Kanten im mikroskopischen Objekt bei Dunkelfeldbeleuchtung. Ebenda XXIX. S. 48—57. 1912.

Dazu muß ich auf die Tatsache hinweisen, daß ich auf S. 97 meiner Arbeit die Amplitude

$$a_1 = \frac{10000}{4\pi}\sqrt{\frac{\lambda}{\varrho_0}}\,\mathrm{cotg}\,\frac{\delta}{2}$$

angegeben hatte, wobei $\mathrm{cotg}\,\delta/2$ mit $\mathrm{tg}\,\vartheta/2$ durchaus identisch ist; also gerade der Faktor, durch den sich das Ergebnis bei Kottler von dem bei Sommerfeld unterscheidet, ist von mir genau wie bei Kottler aus dem Kirchhoffschen Flächenintegral abgeleitet, und zwar auch für große Beugungswinkel, freilich nicht durch eine wilde Annäherung, sondern durch wohlerwogene Heranziehung neuer Glieder, die bei den bisherigen Auswertungen vernachlässigt waren. Die Übereinstimmung erstreckt sich auch auf alle übrigen Faktoren, wenn diese auch anders geschrieben sind. Auch die in den folgenden Zeilen ausgesprochene Kritik der Kirchhoffschen Lösung, die doch zweifellos gegen Fresnel einen guten Schritt vorwärts bedeutet, geht in ihrer allgemeinen Fassung über das berechtigte Maß hinaus.

III. Zu dem Vergleich mit den vorliegenden Beobachtungen. Nr. 29, S. 455.

Dieser ist sehr kurz abgetan. Die meinen werden nicht näher in Betracht gezogen, weil sie an Stahlschneiden ausgeführt sind; die von Gouy sollen für die Formeln von Kottler sprechen, weil sie stärkeren Abfall der Intensität mit zunehmendem Beugungswinkel erkennen ließen. Hierbei muß aber nicht nur das Material des Schirmes, sondern auch seine Schärfe in Betracht gezogen werden, und welche Bedingung wichtiger ist, kann sich erst aus einem genaueren Vergleich ergeben, bei dem ich auch auf meine Beobachtungen noch einmal zurückkommen muß.

Ein Blick auf meine Beobachtungstafeln[1] I und II und die Schaulinie Fig. 1 zeigt die vorzügliche Übereinstimmung der Beobachtungen bei Beugungswinkeln von 2° bis 20° mit meiner Formel, also auch mit der von Kottler. Aber auch zu der Sommerfeldschen Formel passen diese sehr gut, da bei mäßigen Beugungswinkeln beide nur wenig voneinander abweichen (bei 10° noch nicht 1 Proz., bei 20° erst 2 Proz.). Die Abweichungen werden erst erheblich über 20° bis 75° in den Tafeln III und IV (Fig. 2). Diese liegen aber gar nicht in der Richtung der Sommerfeldschen Formeln, sonst müßten die beobachteten Werte größer sein; sie sind aber erheblich kleiner. Also ist der Grund dieser Abweichungen nicht in dem Material (Stahl) zu suchen, sondern in der unvollkommenen Schärfe, ein Umstand, dessen große Bedeutung auch rein geometrisch einleuchtet. Wenn nun die Beobachtungen von Gouy[1]) an geschwärzten Schirmen einen noch stärkeren Abfall der Helligkeit verrieten, so haben wir in erster Linie dafür die noch geringere Schärfe eines mit Ruß geschwärzten Schirmes als Grund anzusehen. Daher können diese auch nicht als Stütze der Formel von Kottler gelten. Es gibt tatsächlich bis jetzt meines Wissens keine Beobachtungen, die zugunsten der einen oder andern Formel sprechen. Diese sprechen nur jede für sich selbst und widersprechen sich in ihren Abweichungen auch gar nicht, da sie von verschiedenen Voraussetzungen ausgehen. Ihre Unterschiede sind andererseits so gering, daß sie bis jetzt gar nicht von praktischer Bedeutung sind, und die Aussicht, durch neue Beobachtungen an verfeinerten Versuchsbedingungen auch praktisch ihren Unterschied zu bestätigen, ist sehr gering. Denn die Schärfe des von mir benutzten Stahlschirmes war das Äußerste, was ich damals mit größter Sorgfalt erreichen konnte und übertraf die eines Rasiermessers ganz bedeutend. Auch ich habe Beobachtungen an schwarzen Schirmen angestellt; diese zeigten sich aber teils als zu stumpf, teils gar an der Kante durchscheinend, also als ganz ungeeignet für einen Vergleich mit der Theorie, die in erster Linie einen scharfen Schirm voraussetzt. Vollkommene Schärfe und Schwärze scheinen physikalisch unvereinbar zu sein.

---

[1] A. a. O. S. 100.

Die vollständige Übereinstimmung der von Kottler gegebenen Näherungsformel mit der meinigen scheint mir aber auch noch den Erfolg zu haben, daß dadurch auch meine allgemeinere Formel für gebeugte Wellen bei schiefem Einfall eine erfreuliche Stütze erfährt. Dies dürfte deswegen von besonderem Werte sein, als jene eine anschauliche Vorstellung der Wellen des gebeugten Lichtes vermittelt, die ich in der Darstellung bei Kottler noch vermisse; denn bei der Auswertung des Randintegrals beschränkt er sich wieder auf paralleles Licht und senkrechten Einfall.

---

[1]) M. Gouy sagt darüber (S. 170, unten) nur kurz: „La lumière diffractée est faible et un peu jaunâtre". Messungen gibt er hierfür nicht an.

Im übrigen aber erkenne ich in der Arbeit von Kottler wegen der mathematischen Präzision der Bedeutung des schwarzen Schirmes einen großen Fortschritt, der auch für krummlinig begrenzte schwarze Schirme eine exakte Grundlage bildet.

Bonn, 16. Juni 1923.

(Eingegangen 19. Juni 1923.)

3. *Über das normale Kathodengefälle in Luft;*
von A. Schaufelberger.

§ 1. Bedeckt bei einer elektrischen Entladung durch Gase das negative Glimmlicht die Kathode noch nicht vollständig, so versteht man nach Warburg[1]) unter *normalem Kathodengefälle* die Potentialdifferenz zwischen der Kathode und einem Punkte der Grenze des Faradayschen Dunkelraumes und des negativen Glimmlichtes. Da das Potentialgefälle im negativen Glimmlicht nach Warburg bei geringen Drucken klein ist, so kommt es hierbei nicht auf die genaue Lage dieses Punktes an.

Eine neuere Definition des Kathodengefälles rührt von Stark[2]) und Gehlhoff[3]) her. Danach versteht man unter Kathodengefälle die Potentialdifferenz zwischen der Kathode und einem Punkte an der Grenze des Crookesschen Dunkelraumes und des negativen Glimmlichtes. Gehlhoff wurde hierzu aus zwei Gründen geführt. Einmal bemerkte er, daß bei höheren Drucken das Gefälle im Glimmlicht gegen das Gefälle im Crookesschen Raum nicht zu vernachlässigen ist, und zweitens fand er, daß das Gefälle im Glimmlicht selbst etwas vom Druck abhängt.

Die Messungen der vorliegenden Arbeit beziehen sich auf ein Kathodengefälle, das in § 6 in Anlehnung an die Warburgsche Festsetzung näher definiert wird. Ein Vergleich der gewonnenen Resultate mit den neueren Messungen von Rottgardt[4]) ist aber hierbei doch durchführbar, da zwar Rottgardt das Kathodengefälle nach der Definition von Gehlhoff bestimmte, gleichzeitig aber auch die Potentialdifferenz im negativen Glimmlicht gemessen hat.

§ 2. Schon Warburg (a. a. O.) hat darauf hingewiesen, daß geringe Feuchtigkeitsspuren einen sehr großen Einfluß auf das Kathodengefälle ausüben. Da eine Durchsicht der Literatur die Vermutung nahe legte, daß die meisten Beobachter auf diesen Feuchtigkeitseinfluß nicht genügend geachtet hatten, wurde die Aufgabe gestellt: erstens die Beeinflussung des Kathodengefälles durch geringe Feuchtigkeit systematisch und noch vollständiger, als Warburg es getan hatte, zu untersuchen, zweitens die Kathodengefälle an verschiedenen Kathodenmaterialien in möglichst trockenem Gase zu bestimmen.

---

[1]) E. Warburg, Wied. Ann. **31**. S. 545. 1887; **40**. S. 1. 1890.

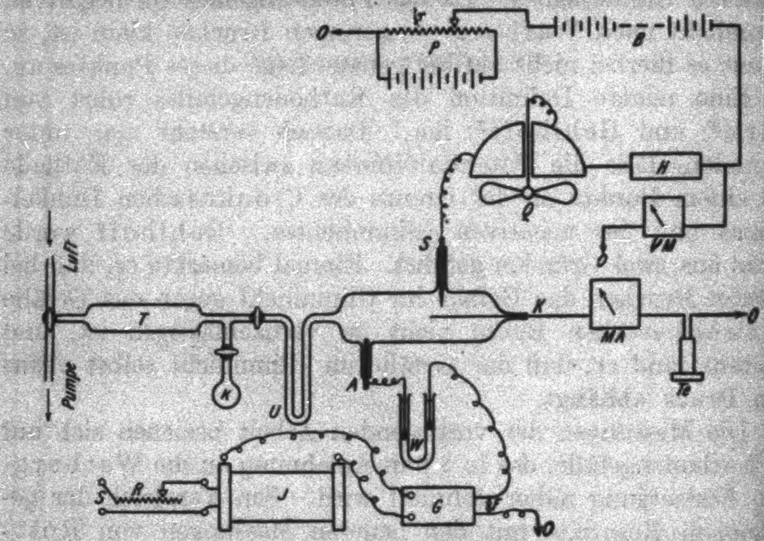
[2]) J. Stark, Die Elektrizität in Gasen S. 169. 1902.

[3]) G. Gehlhoff, Ann. d. Phys. **24**. S. 553. 1907.

[4]) K. Rottgardt, Ann. d. Phys. **33**. S. 1161. 1910.

Der Einfachheit halber wurde als Gas atmosphärische Luft gewählt.

§ 3. Die *Versuchsanordnung* ist in Fig. 1 schematisch dargestellt. Als Stromquelle diente entweder eine Akkumulatorenbatterie von 960 Volt, die genügend fein abstufbar war, oder aber eine Gleichrichteranordnung nach Greinacher[1]), die in Fig 1 angedeutet ist. Der städtische Wechselstrom (105 Volt, 50 Perioden) wurde hierbei in dem Induktorium *J* in die Höhe transformiert und dann in der Greinacherschen Anordnung *G* gleichgerichtet. Der Vorschaltwiderstand *R* diente zur be-



Schema der Versuchsanordnung.

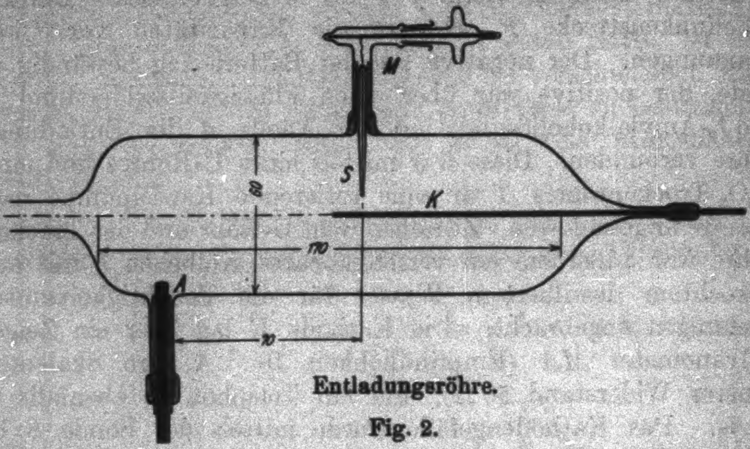
Fig. 1.

---

[1]) H. Greinacher, Phys. Zeitschr. 17. S. 343. 1916.

quemen Einstellung der gewünschten Spannung. Wurden den Gleichrichterzellen eine Kapazität von 2 Mikro-Farad parallel geschaltet, so war die Spannung genügend konstant, d. h. die durch kleine Spannungsschwankungen des Netzes bedingten Meßfehler lagen innerhalb 1°/₀ des Meßergebnisses. Die Parallelfunkenstrecke *F* schützte die Kapazitäten vor Überspannungen. Der negative Pol der Batterie lag beständig an Erde, der positive war über einen Flüssigkeitswiderstand *W* (CdJ_2-Amylalkohollösung) mit der Anode *A* der Entladungsröhre verbunden. Diese war mittels eines U-Rohres und eines P_2O_5-Trockenrohres *T* an eine rotierende Kapselpumpe nach Gaede angeschlossen. Zwischen dem U-Rohr und der Trockenröhre war außerdem ein verschließbares Kölbchen *k* mit ausgekochtem destilliertem Wasser für die Feuchtigkeitsuntersuchungen angebracht. Die Kathode *K* lag über ein Zeigergalvanometer *MA* (Empfindlichkeit 10^{-7} A. pro Skalenteil, innerer Widerstand 50 Ω), und ein Telephon *Te* ebenfalls an Erde. Das Kathodengefälle wurde mittels der Sonde *S* bestimmt. Zur Messung der Sondenspannung diente ein Quadrantenelektrometer *Q* von Carpentier mit einer Schwingungsdauer von etwa 11 Sek. und aperiodischer Einstellung in idiostatischer Schaltung. Es gestattete die Messung von Potentialdifferenzen bis zu 70 Volt bei einer mittleren Empfindlichkeit von 0,3 Volt pro Skt. Zur Beobachtung höherer Spannungen wurde der Nadel und dem mit ihr verbundenen Quadrantenpaar eine konstante positive Hilfsspannung erteilt, die einer besonderen Batterie *B* mit vorgeschalteter Potentiometeranordnung *P* entnommen, und in jedem einzelnen Falle etwa 50—70 Volt unter der zu messenden Spannung gewählt wurde. Die Einstellung der Hilfsspannung erfolgte vermittelst des Regulierwiderstandes *r* und des Voltmeters *VM* (Empfindlichkeit 3 V/Skt.). Es ergab sich bei Verwendung der Hilfsspannung nach sorgfältiger Isolation der Zuleitungen für Spannungen beispielsweise von 300—370 Volt eine Eichkurve für die Empfindlichkeit des Elektrometers, welche mit derjenigen von 0—70 Volt vollständig identisch war. Zum Schutze des Elektrometers führte die Zuleitung der Hilfsspannung über den Graphitwiderstand *H* (10^6 Ω).

§ 4. Die Form und die wesentlichen Dimensionen der endgültig gebrauchten Entladungsröhren sind der Fig. 2 zu entnehmen (Angaben in mm). Versuche in einer engeren Röhre (35 mm Durchm.) ergaben im wesentlichen dieselben Ergebnisse. Die Elektroden waren mit weißem Siegellack in die Ansatzröhren eingekittet. Als Anodenmetall diente bei allen Messungen das wenig zerstäubbare Aluminium. Der Anodendraht war in ein Glasröhrchen eingelassen, so daß seine freie Oberfläche nur etwa das Doppelte der vom Anodenlicht bedeckten Fläche ausmachte. Zur exakten Einstellung der Sonden *S* wurde der aus Fig. 2 ohne weiteres ersichtliche Mechanismus *M* verwendet. Die Sondenspitzen bestanden aus 0,02 mm dickem Platindraht, welcher höchstens 0,1—0,2 mm aus dem umgeschmolzenen Glasschutze herausragte. Da jeder Körper, der in den leuchtenden Teil einer Glimmentladung hineingebracht wird, störend auf die dort vorhandene Ladungsverteilung einwirkt, wurde dem (bei einzelnen Versuchen in das Glimmlicht eintauchenden) Ende des Sondenkörpers eine Dicke von höchstens 0,5 mm gegeben. Die so hergestellten Sonden reagierten auf kleinste radiale Verschiebungen innerhalb der dritten Kathodenschicht, sie erwiesen sich also als gut empfindlich.



Entladungsröhre.

Fig. 2.

Unmittelbar vor dem Einsetzen der Kathoden wurden dieselben mit feinem Schmirgel blank poliert und darauf mit einem Leinenlappen kurz nachgerieben. Zur möglichsten Vermeidung der Abgabe okkludierter Gase während des Stromdurchganges wurden die schwer schmelzbaren Metalle außerdem vor dem Polieren gut ausgeglüht.

Für die definitiven Messungen bestand die Apparatur aus drei solchen, gleichen, miteinander kommunizierenden Entladungsgefäßen. Diese Anordnung wurde getroffen, nachdem über das Verhalten des Kathodenfalles an Pt in Luft ein größeres Beobachtungsmaterial vorlag. Sie gestattete eine Vergleichung der Meßergebnisse an drei verschiedenen Metallen bei sehr nahe gleichem Feuchtigkeitsgehalt.

§ 5. Bei Sondenmessungen muß das Verhältnis zwischen der von der Sondenspitze aufgenommenen und der durch unvollkommene Isolation vom Sondendrahte abfließenden Elektrizitätsmenge möglichst groß sein. Demnach gewinnt die Isolation der Quadranten des Elektrometers und seiner Zuleitungen in dem Maße an Bedeutung, in welchem die Aufnahmefähigkeit der Sonde durch Verkleinerung, bzw. Verfeinerung ihrer Spitze verringert wird. Ebenso darf die Zuleitung der Hilfsspannung nicht über einen allzu großen Schutzwiderstand führen, da sich sonst an seinen Klemmen bei nicht vollkommener Isolation ein Spannungsabfall von einigen Volt beobachten läßt. Die Konstanz der Elektrometereinstellung und die Reproduzierbarkeit der Meßresultate geben durchaus keine Gewähr für vollkommene Isolation. So ließen sich z. B. sogar bei äußerst mangelhafter Isolation des Schutzwiderstandes *H* reproduzierbare Eichkurven aufnehmen, welche im Sinne zunehmender Spannung verschoben erschienen. Erst nachdem der Schutzwiderstand sorgfältig isoliert war, konnten die Eichkurven bei den verschiedensten Hilfsspannungen vollständig zur Deckung gebracht werden.

Nach Warburg (a. a. O.) ist die Isolation der Sonde dann als genügend zu betrachten, wenn bei geerdeter Kathode oder bei geerdeter Anode die Spannungsdifferenz zwischen Sonde und Anode gleich gemessen wird. Derartige Kontrollmessungen ergaben einen mittleren Unterschied von 1,6 Volt, d. h. einen Betrag, welcher innerhalb der Meßfehlergrenze liegt.

Isolieren die Quadrantenpaare unvollkommen gegeneinander, so tritt dies um so deutlicher hervor, je größer die Potentialdifferenz zwischen ihnen ist. Für die kleinere Kompensations-(Hilfs-)Spannung (größerer Elektrometerausschlag) würde sich eine kleinere Sondenspannung als für die dem Kathodengefälle näher liegende, größere Kompensationsspannung, ergeben. Die angestellten Versuche zeigten vollkommene Unabhängigkeit der Elektrometerangabe von der Größe der Hilfsspannung.

§ 6. Die Sondenmethode von **Hittorf**[1]) ist zwar viel angewandt worden, um die Potentialverteilung in den verschiedenen Gebieten einer elektrischen Gasentladung zu untersuchen, doch sind immer wieder Bedenken dagegen erhoben worden[2]). Die hauptsächlichen Mängel der Methode bestehen darin, daß erstens die Sonde die Entladungsbedingungen etwas verändert, und zweitens, daß die Sonde ein ihrem Orte entsprechendes Potential gar nicht anzunehmen braucht, falls z. B. die sie treffenden Elektronen oder Kanalstrahlen eine beträchtliche Eigengeschwindigkeit besitzen. Auf den letzteren Punkt hat besonders **Kossel**[3]) in überzeugender Weise aufmerksam gemacht.

Diese Störung der Entladungsbedingungen durch das Vorhandensein der Sonde wird besonders dann augenfällig, wenn die Sondenspitze in das Glimmlicht, oder sogar ein wenig in den **Crookes**schen Dunkelraum eintaucht, und zwar scheint dabei eine Abhängigkeit vom Kathodenmaterial zu bestehen. So sind z. B. diese Störungserscheinungen an Cu-Kathoden besonders deutlich zu beobachten, und zwar sieht es so aus, als ob die leuchtenden Teilchen der Entladung gleichsam von der Sondenspitze abgestoßen würden, während sich zugleich ein markanter Schattenwurf[4]) auf der Kathodenoberfläche feststellen läßt. Ein weiteres Zeichen für die veränderte Ladungsverteilung durch den Sondenkörper, ist wohl auch darin zu erkennen, daß unter diesen Umständen die Sonde einen zu kleinen Spannungsabfall im negativen Glimmlicht ergibt. So wurde z. B. bei den, für diese Störung besonders empfindlichen Kathodenmaterialien (Ni, Cu, Pb) oft nur ein Glimmlichtgefälle von einigen Volt gefunden, was mit den tatsächlichen ungestörten Verhältnissen im Widerspruch sein dürfte[1]).

---

[1]) **W. Hittorf**, Wied. Ann. **20**. S. 726. 1883.

[2]) Der Beweis von **W. H. Westphal** (Verh. Deutsch. Phys. Ges. **14**. S. 223. 1912) für die Zuverlässigkeit der Sondenmethode ist nicht stichhaltig. Wenn **Westphal** mit seiner absolut einwandfreien Methode den „Kathodensprung" an einer glühenden **Wehnelt**schen Oxydkathode nachweist, so kann er daraus nicht auf die Richtigkeit der Sondenmessungen deshalb schließen, weil er mit diesen auch einen Kathodensprung an kalten Elektroden gemessen hat. Selbst wenn ein Kathodensprung an glühenden Oxydkathoden besteht, braucht ein solcher an kalten Kathoden doch nicht vorhanden zu sein, sondern kann durch die Sondenmethode vorgetäuscht werden. (Vgl. hierzu **W. Kossel**, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. **18**. S. 326. 1921.)

[3]) **W. Kossel**, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. **18**. S. 326 (vgl. besonders § 46 u. 47) 1921.

[4]) **A. Schuster**, Proc. Roy. Soc. London **47**. S. 557. 1890; **P. Villard**, Journ. de Phys. (3) **8**. S. 5. 1889; **A. Wehnelt**, Wied. Ann. **67**. S. 421. 1889; **Edgar Meyer** u. **H. Schüler**, Ann. d. Phys. **56**. 507. 1918.

Daß bei diesen Beobachtungen nicht etwa ein (Isolations)-Defekt an der Sonde vorlag, konnte durch einen Versuch einwandfrei nachgewiesen werden: Dieselbe Sonde, welche an Cu usw. den erwähnten kleinen Spannungsabfall im negativen Glimmlichte anzeigte, ergab an dem anscheinend für diese Störung ganz unempfindlichen Pt immer wieder das normale Glimmlichtgefälle von etwa 60 Volt.

Folgendes Experiment zeigt auch deutlich, wie sehr die Meßergebnisse durch das Eintauchen der Sonden in das negative Glimmlicht gestört werden: Zwei gleiche Entladungsgefäße von der beschriebenen Form wurden miteinander verblasen. Die beiden Kathoden, von welchen die eine aus Cd-, die andere aus Pd-Draht bestand, konnten leicht vertauscht werden. Die zwei verwendeten Sonden unterschieden sich in der Dicke des Glasschutzes. Eine Vertauschung der Kathodendrähte änderte nun nichts an den Meßergebnissen, solange sich die Sondenspitzen an der Grenze zwischen dem negativen Glimmlicht und dem Faradayschen Dunkelraume befanden. Dagegen wurden in denselben Punkten *innerhalb* des negativen Glimmlichtes die Spannungsdifferenzen Sonden-Kathoden nach dem Vertauschen der Kathodendrähte von den beiden Sonden *verschieden* angegeben. Befanden sich im besonderen die Sonden an der Grenze zwischen dem Crookesschen Dunkelraume und dem negativen Glimmlichte, so war der Unterschied der Potentialwerte, die von den beiden Sonden bei *demselben* Kathodenmetall angegeben wurden, derart, daß die berechneten Glimmlichtgefälle sich um etwa 50 Proz. unterschieden.

---

[1]) Es sei hier auf den hohen Anfangswert des Potentialabfalles $\varDelta V$ im Glimmlicht bei Ni (Tab. II) aufmerksam gemacht, welcher bei allen späteren Versuchen nicht reproduziert werden konnte. Ebenso konnte an Cu ein einziges Mal, unmittelbar nach dem Einsetzen einer neuen Sonde $\varDelta V$ zu 25 Volt beobachtet werden. Währenddem aber V_{ka}, das Potential an der Grenze des Faradayschen Dunkelraumes, konstant blieb, wuchs V_{ki}, d. i. die von der Sonde an der äußeren Grenze des Crookesschen Dunkelraumes aufgenommene Spannung, in einigen Minuten bis auf 5—6 Volt an V_{ka} heran, d. h. $\varDelta V = (V_{ka} - V_{ki})$ nahm bis auf einen Wert von 5—6 Volt ab. Nach einmaliger Stromunterbrechung verkleinerte sich diese Differenz sogar nochmals um 1 Volt.

Die Ergebnisse *innerhalb* des negativen Glimmlichtes hängen also jedenfalls in hohem Maße von der Gestalt und dem Bau der Sonde ab, und zwar werden die Potentialwerte im negativen Glimmlichte um so größer gefunden, je größer die durch die Sonde verursachte Störung der normalen Ladungsverteilung im Glimmlichte ist. Das geringe negative Glimmlichtgefälle, welches durch derartige gestörte Messungen gefunden wird, kann dazu verleiten, an der irrigen Meinung festzuhalten, als ob im negativen Glimmlichte kein nennenswerter Spannungsabfall vorhanden wäre[1]). Ist nun durch die Störung der Sonden das Glimmlichtgefälle sehr klein geworden, so ergibt sich natürlich auch gute Konstanz und Reproduzierbarkeit des Kathodengefälles, ohne daß es auf die ganz genaue Stellung der Sonde innerhalb des Glimmlichtes ankommt. Nach dem Gesagten darf aber diese Konstanz und Reproduzierbarkeit des Kathodengefälles nicht als beweisend für die Güte der Messungen angeführt werden. Diese beschriebene Unsicherheit der Sondenmessungen innerhalb des negativen Glimmlichtes läßt somit die von Gehlhoff und Rottgardt (a. a. O.) verwandte Definition nicht als einwandfrei erscheinen. Auch die Versuche und Überlegungen von Kossel (a. a. O.) stützen durchaus diese Ansicht.

Es wurde deshalb für angezeigt gehalten, in Anlehnung an Warburg *das Kathodengefälle als die Potentialdifferenz eines Grenzpunktes zwischen dem negativen Glimmlicht und dem Faradayschen Dunkelraume einerseits und der Kathode andererseits zu definieren*[2]).

§ 7. Evakuiert man eine Glimmlichtröhre auf den zur Messung des Kathodengefälles geeigneten Druck (3—4 mm Hg), so beobachtet man nach einigen Tagen, auch wenn während dieser Zeit keine Entladung durch das Rohr gegangen war, eine deutliche Verkleinerung aller Glimmlichtdimensionen bei gleichzeitiger Abnahme des Kathodengefälles. So kann beispielsweise nach 2 Tagen leicht ein Abfall des Meßwertes um 35 Volt festgestellt werden. Es wurden eine große Zahl Versuche angestellt, um den Nachweis zu erbringen, daß diese Veränderung der Entladungsbedingungen im abgeschlossenen Gefäße einem veränderten Feuchtigkeitsgehalte zuzuschreiben ist.

---

[1]) Tab. II zeigt, daß z. B. das Gefälle im negativen Glimmlicht an Pt bis zu 80 Volt betragen kann.

[2]) Diese Potentialdifferenz erwies sich in meiner Apparatur innerhalb der möglicherweise durch Feuchtigkeitsveränderungen verursachten Abweichungen als vom Drucke unabhängig.

Bekanntlich diffundiert aus einer Kapselpumpe Wasserdampf in die Apparatur, und zwar um so mehr, je stärker die Pumpe sich erwärmt hat. Es mußte deshalb die Gaedesche Kapselpumpe, welche zuerst ohne Zwischenschaltung eines Trockenrohres direkt an der Entladungsröhre angeschlossen war, die Höhe des Kathodenfalles in dem Sinne beeinflussen, daß bei längerer Inbetriebsetzung derselben, also bei ihrer Erwärmung, auch in der Entladungsröhre eine erhöhte Feuchtigkeit nachweisbar war. In der Tat erniedrigte sich das Kathodengefälle nach einstündigem Auspumpen um etwa 11 Volt. Damit ergab sich die Notwendigkeit des Einsetzens einer P_2O_5-Trockenröhre zwischen die Pumpe und das Meßgefäß, was in der Folge zu Ergebnissen führte, welche durchschnittlich 10 Volt höher waren, als sie bei sonst gleichen Versuchsbedingungen früher gemessen worden waren. Diese Trockenröhre, welche, abgesehen von einem Zwischenhahne, direkt an die Entladungsröhre angeschlossen war, gestattete nun erst die Beobachtung der Feuchtigkeitsveränderungen in der Entladungsröhre. Nachdem auch zwischen das P_2O_5-Rohr und die Pumpe ein zweiter Hahn eingesetzt war, bestand die Möglichkeit, durch den ersten Zwischenhahn die beiden Gefäße in jedem beliebigen Momente voneinander abzuschließen oder zu verbinden und dabei das Verhalten des Kathodengefälles zu beobachten. Die Resultate eines derartigen Versuches sind in Fig. 3 (die Abszissen bedeuten Stunden) wiedergegeben. Allerdings erfolgte bei dieser Aufnahme die Sondeneinstellung nach der Methode von Gehlhoff, was aber, da Pt als Kathode diente, für den Verlauf der Kurve bedeutungslos ist. Man sieht, daß das Öffnen des Hahnes (in der Figur bezeichnet als $+ P_2O_5$) ein Ansteigen des Kathodengefälles zur Folge hat, dagegen das jeweilige Abschließen der Entladungsröhre vom Trockenrohre ($- P_2O_5$) von einem Sinken des Meßwertes begleitet ist. Die Erklärung für dieses

Verhalten finden wir schon in den beiden **Warburgschen** Arbeiten, und zwar ist das Ansteigen des Kathodengefälles bei offenem Hahne offenbar auf den H_2O-Dampfentzug durch das Trockenmittel zurückzuführen, während das Abfallen der Kurve bei geschlossenem Hahne zweifellos auf die Abgabe von Feuchtigkeit von den Gefäßwänden hindeutet[1]). Bei der Abszisse 216 Stunden ist in Fig. 3 eine plötzliche, sprunghafte Änderung des Kathodenfalles zu beobachten. Der Grund für dieses Verhalten kann nicht angegeben werden.

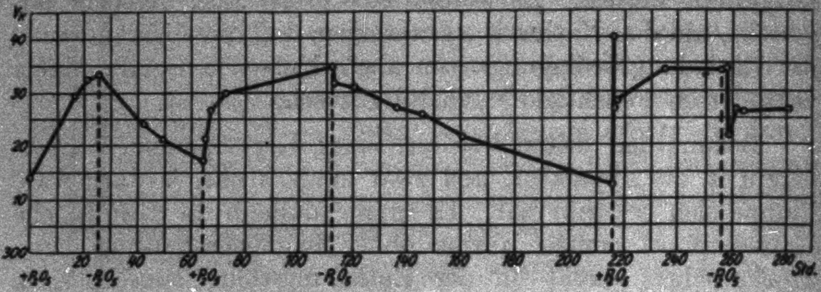


Fig. 3.

Eine ähnliche Kurve wurde aufgenommen, um einen allfälligen Einfluß der Zimmertemperatur auf die Wasserdampfabgabe der Gefäßwände an das Vakuum festzustellen. Da diese Versuche aber im wesentlichen negativ ausgefallen sind (wegen zu kleinen Temperaturänderungen), bieten sie kein weiteres Interesse.

Um die Kathodenfallmessungen möglichst dem Einflusse variabler Feuchtigkeitsverhältnisse in der Meßapparatur zu entziehen, wurde ein Verfahren[2]) angewandt, um die Wasserhaut auf den Gefäßwänden auf ein Minimum herunterzudrücken. Diese Wasserhaut beruht bekanntlich auf den hygroskopischen Eigenschaften des Glases, die durch eine kleine Quantität freien oder locker gebundenen Alkalis an der Glasoberfläche bedingt sind. Der Entfernungsprozeß dieses Alkalis besteht in einer vollständigen Entfettung der Glasoberfläche durch eine heiße Chromsäurelösung und darauf folgendem etwa einstündigem Auskochen der Meßapparatur in destilliertem Wasser, wobei das Alkali aufgelöst wird[1]). Der Effekt dieses Auskochens wurde nun durch folgende Messung (vgl. Fig. 4) festgestellt).

---

[1]) Vgl. analoge Beobachtungen über den Einfluß von geringen Feuchtigkeitsspuren auf das Funkenpotential in Luft bei **Edgar Meyer**, Ann. d. Phys. **65**. S. 335. 1921 und **H. Stücklen**, Ann. d. Phys. **65**. S. 369. 1921.

[2]) Auch angewandt von **H. Stücklen**, Ann. d. Phys. **65**. S. 369. 1921.

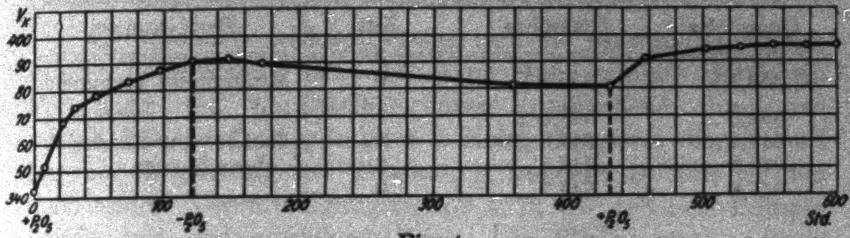


Fig. 4.

Das Entladungsgefäß blieb zuerst durch den geöffneten Zwischenhahn dauernd in Verbindung mit der Trockenröhre, was ein langsames Ansteigen des Kathodenfalles bedingte. Auf dem maximalen Wert angelangt, wurde alsdann der Hahn geschlossen, und da nun die Glaswände nur wenig Wasserdampf abgaben, konnte jetzt der hohe Meßwert längere Zeit beobachtet werden. Der Unterschied von Fig. 4 gegen Fig. 3 ist sehr in die Augen springend.

§ 8. Nach diesen Versuchen war zu erwarten, daß auch die Ergebnisse in einer aus Quarz hergestellten Entladungsröhre sich ähnlich verhalten würden, wie die in der ausgekochten Glasapparatur beobachteten Werte, da Quarz bedeutend weniger hygroskopisch ist, als unbehandeltes Glas. Die unternommenen Versuche rechtfertigten diese Erwartung vollständig.

An die Apparatur mit der ausgekochten Entladungsröhre wurde für diesen Versuch noch ein Entladungsgefäß aus Quarz von gleichen Dimensionen durch einen Schliff angesetzt und zwar so, daß sich beide Entladungsröhren symmetrisch zur Luftzuführung bzw. zum Trockenrohre befanden. Nachdem beide Gefäße mit Luft von gleicher Feuchtigkeit gefüllt waren, was durch das Vorhandensein von gleichem Kathodengefälle kontrolliert wurde, konnte jedes Gefäß für sich durch einen Hahn abgeschlossen, und die Veränderung des sich selbst überlassenen Inhaltes durch Messen des Kathodengefälles beobachtet werden. Als Kathoden dienten zwei Pt-Drähte, an denen im Verlaufe von 9 Tagen folgende Werte des Kathodengefälles gemessen wurden:

---

[1]) Angegeben von E. **Warburg** u. T. **Ihmori**, Wied. Ann. 27. S. 481. 1886.

Tabelle I.

Quarzröhre	Glasröhre	Zeit	Bemerkungen
353,7 V.	352,3 V.	0	Miteinander verbunden
352,3 „	348,6 „	1	Gefäße voneinander abgeschlossen
349,5 „	347,0 „	2	
349,5 „	346,7 „	3	
347,8 „	347,7 „	9	

Dieser Versuch läßt somit in beiden Röhren eine etwa gleiche Wasserdampfabgabe der Gefäßwände erkennen. Wenn man auch aus der Tab. I entnehmen könnte, daß die Feuchtigkeitsveränderungen in einer Quarzröhre gleichmäßiger erfolgen, als in der ausgekochten Glasröhre, (welcher Verlauf nicht immer genau reproduzierbar ist), so bleibt immerhin als wichtiges Ergebnis dieses Versuches bestehen, daß die in der beschriebenen Weise behandelte Glasoberfläche ebensowenig hygroskopisch ist, wie die Quarzglasoberfläche.

§ 9. In der Literatur findet man oft die verschiedenartigsten der zur Verfügung stehenden Trockenmittel kombiniert zur Entfeuchtung von Gasen. So hat **Rottgardt** beispielsweise außer P_2O_5 noch in konzentrierter H_2SO_4 getränkten Bimsstein verwendet. Dies scheint abgesehen davon, daß bei der Verwendung von H_2SO_4 als Trockenmittel mit einer geringen SO_2-Verunreinigung des Gases gerechnet werden muß, auch vom hygroskopischen Standpunkte aus unzweckmäßig zu sein[1]). Nachdem sich das Kathodengefälle in Luft als äußerst empfindliches Reagens auf die minimalsten Spuren von Feuchtigkeit ergeben hat, kann man aus der Höhe der erhaltenen Meßwerte in Luft auf die Wirksamkeit des angewandten Trocknungsverfahrens zurückschließen. Besondere Messungen an Pt in Luft ergaben folgende Resultate: Wurde das Gas zuerst über P_2O_5 und *alsdann* über konzentrierte H_2SO_4 geleitet, so fand sich das Kathodengefälle um etwa 15 Volt niedriger, als wenn die Entfeuchtung nur von P_2O_5 allein besorgt worden war. Erfolgte aber die Gaszufuhr zuerst über H_2SO_4 und dann über P_2O_5, so war praktisch keine Beeinflussung des Kathodengefälles durch die H_2SO_4 festzustellen.

---

[1]) Konzentrierte Schwefelsäure hat nur als 98,33 prozentiges Gemisch eine konstante Zusammensetzung. Die 100prozentige Säure gibt SO_3, die verdünnte Säure Wasser ab. (Vgl. **Alexander Smith**, Anorg. Chem., II. Aufl. S. 303.)

Als besonders wirksam erwies sich die Anordnung, wie sie in Fig. 1 dargestellt ist. Die Luftzufuhr erfolgte durch ein P_2O_5-Rohr und, unmittelbar daran anschließend, durch ein mittels flüssiger Luft gekühltes U-Rohr. Letzteres diente nicht nur zur Ergänzung der Trocknung, sondern in ihm wurden auch andere Verunreinigungen, wie z. B. Öl- und Fett-Dämpfe kondensiert und zurückgehalten. Die Wirkungsweise dieses Ausfrierverfahrens kommt in der Fig. 5 deutlich zur Veranschaulichung. Die Kurve, welche in einer unausgekochten Röhre aufgenommen worden ist, zeigt den sehr beträchtlichen Anstieg des Kathodengefälles, wenn mit flüssiger Luft getrocknet wird, und sie läßt auch schon eine gewisse obere Grenze des Kathodengefälles erkennen, welche dann erreicht wird, wenn von der Trockenapparatur nur noch soviel Wasserdampf absorbiert wird, als die Gefäßwände in der gleichen Zeit an das Vakuum abgeben. Es stellt sich also nach einiger Zeit ein Gleichgewichtszustand ein.

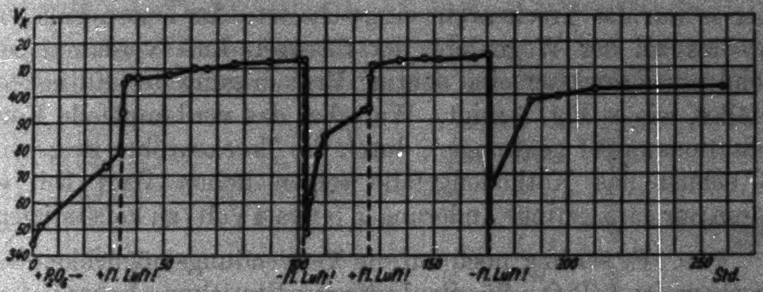


Fig. 5.

Von besonderem Interesse ist der Verlauf des Kathodengefälles in Fig. 5 im Momente der Wegnahme der flüssigen Luft, in der Figur bezeichnet durch „— fl. Luft“. Das Kathodengefälle sinkt in dem Augenblicke, wo das im U-Rohr ausgeschiedene Wasser wieder in das Vakuum verdampft bis etwa auf den Anfangswert hinunter, um dann aber rasch wieder bis zu einer gewissen Höhe anzusteigen[1]). Im Anstiege der Kurve bis zu 415 Volt heran, erkennt man aber vor allem, daß hier die flüssige Luft als außerordentlich gutes Trockenmittel wirkt, welches in Kombination mit dem Aussiedeverfahren der Meßapparatur zu bisher nicht gemessenen Extremwerten des Kathodengefälles führen muß.

Daß es sich bei der Verwendung der flüssigen Luft in der Hauptsache wirklich um ein Ausfrieren des Wasserdampfes handelt, wurde durch folgenden Versuch bewiesen. Zwischen das U-Rohr und dem Entladegefäß wurde noch eine P_2O_5-Trockenröhre parallel zu der schon bestehenden Verbindung gelegt. Vermittelst eines Dreiweghahns konnte entweder das U-Rohr direkt mit dem Entladegefäß verbunden werden, oder aber es war das Trockenrohr eingeschaltet. Im ersten Falle ergab das bei der Wegnahme der flüssigen Luft verdampfende Kondensationswasser eine enorme Erniedrigung des Kathodengefälles, wie es Fig. 5 zeigt. War aber das verdampfende Kondensationswasser gezwungen, durch die Trockenröhre zu gehen, so behielt das Kathodengefälle seinen hohen Wert bei; es waren nur ganz geringe Änderungen (etwa 4 Volt) zu konstatieren.

§ 10. Es sei hier noch auf die Verwendungsmöglichkeit der Trockenmittel (P_2O_5, flüssige Luft) zur Erreichung hoher Vakua bei beschränkter Leistung der Pumpe hingewiesen. Ein an die Apparatur angeblasener, und durch einen Hahn abschließbarer kleiner Kolben, welcher mit ausgekochtem, destilliertem Wasser gefüllt ist (Fig. 1), erlaubt die Luftfüllung sukzessive durch Wasserdampf zu ersetzen, der dann von einer angeschlossenen P_2O_5-Röhre absorbiert wird. Auf diese Weise gelang es in einem Falle das Vakuum in einer ausgekochten Röhre so hoch zu treiben, daß die Spannung einer gut funktionierenden Elektrisiermaschine keine sichtbare Entladung mehr zwischen den Elektroden hervorzubringen vermochte.

§ 11. Durch besonders angestellte Versuche ergab sich die Unabhängigkeit des Kathodengefälles von dem Vorhandensein von Hg-Dampf. Da dieses eine Bestätigung der älteren Versuche von **Warburg** (a. a. O.) ist, so braucht nicht näher darauf eingegangen zu werden.

---

[1] Vgl. die ganz ähnlichen Resultate für das Funkenpotential in Luft bei **Edgar Meyer**, Ann. d. Phys. **65**. S. 335. 1921.

§ 12. Nachdem das Verhalten des Kathodengefälles an Platin in Luft durch ausgedehnte Messungen festgestellt worden war, sollten nun die übrigen zur Verfügung stehenden Metalle (insofern es ihre chemischen Eigenschaften und die Möglichkeit, ihnen drahtförmige Gestalt zu geben, gestatteten) auf das gleiche Verhalten untersucht, und eventuell vorhandene Extremwerte gleichfalls bestimmt werden. Damit aber die aufgenommenen Meßwerte mit dem entsprechenden Kathodengefälle derselben Feuchtigkeitsphase an Platin verglichen werden konnten, wurden, wie einleitend bereits erwähnt, an die bis dahin benutzte Entladungsröhre noch zwei exakt gleich dimensionierte, ebenfalls ausgekochte Röhren symmetrisch angeblasen, so daß die Messungen in allen drei Röhren bei wohl sicher gleichen Verhältnissen (Druck und Feuchtigkeitsgrad) stattfanden.

Als erste Metalle wurden neben Platin Al und Ni gewählt. Die Beobachtungszeit erstreckte sich bei dieser Meßreihe über nahezu zwei Monate, wobei das U-Rohr während vier Tagen ununterbrochen mit flüssiger Luft gekühlt war. Es zeigte sich nämlich, daß die Trocknungszeit mit flüssiger Luft auf wenige Tage eingeschränkt werden kann, wenn die Apparatur vorher einige Wochen hindurch in dauernder Verbindung mit einer P_2O_5-Trockenröhre gestanden hat. Handelt es sich aber darum, in möglichst kurzer Zeit den Maximalwert des Kathodengefälles zu erreichen, so empfiehlt es sich, schon von Beginn der Beobachtungen an mit flüssiger Luft zu arbeiten, was auch in den Messerien der übrigen Metalle im Interesse der Zeitersparnis geschehen ist. Die Ergebnisse dieser Untersuchungen sind in der Tab. II zusammengestellt. Fig. 6 zeigt den zeitlichen Ver-

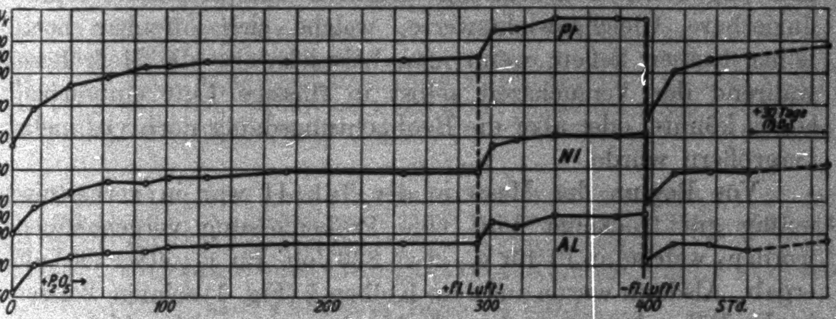


Fig. 6.

lauf der Kathodenfallwerte. Hierbei wurde die Glimmlichtlänge möglichst kurz gehalten; die Sonde befand sich in einer Ebene senkrecht zur Achse der Drahtkathode, und war etwa 1 cm von dem vorderen Ende der Kathode nach hinten gerückt[1]).

Wie aus der Tabelle ersichtlich, sind die Werte nach Gehlhoffscher Einstellung (v_{ki}) noch mitgemessen worden, dagegen sind die v_{ki}-Kurven der Übersicht halber in Fig. 6 nicht eingetragen. Man sieht, daß sich die Veränderungen der Kathodenfallwerte bei Kühlung mit flüssiger Luft (in der Fig. bezeichnet als + Fl. Luft) in den letzten drei Tagen innerhalb der Meßfehlergrenze (± 1 Proz.) bewegen. Hier, sowie auch bei den späteren Meßreihen wurde der größte der drei letzten Werte als endgültiges Ergebnis des Versuches benützt.

Es muß aber ausdrücklich bemerkt werden, daß diese Meßwerte keine absoluten Maxima darstellen, sondern es sind gewissermaßen der beschriebenen Versuchsanordnung und dem hier angewandten Trocknungsverfahren entsprechende, reproduzierbare Gleichgewichtswerte, welche sich offenbar noch höher treiben ließen, wenn man beispielsweise die Meßröhren während der Versuchszeit selbst in flüssige Luft eintauchen lassen könnte, oder aber die Beobachtungsdauer noch viel mehr vergrößern würde.

Vor Beginn der Messerie der Tab. II war in verhältnismäßig gut trockener Luft eine Probemessung vorgenommen worden, welche an Pt für v_{ki} etwa 333 Volt, für v_{ka} etwa 390 Volt ergab. Alsdann wurde aus dem Kolben *k* (Fig. 1) solange Wasser in die Röhre hinein verdampft, bis das rote positive Licht und das rötliche negative Licht in eine gleiche, tiefblaue Farbe umgeschlagen waren. Bei dieser hohen Feuchtigkeit war es jedoch unmöglich, eine Messung vorzunehmen, da ein lautes Singen im Telephon das Vorhandensein von intermittierendem Strom anzeigte und die Unruhe der Elektrometernadel keine Ablesung auf der Skala gestattete. Erst von einem gewissen höheren Trockenheitsgrade an hörte das Singen auf, und von da an beginnen die Aufzeichnungen der Tab. II.

Die Werte an Al sind anfänglich nicht genau bestimmbar, da beständig ein spontanes Ausschlagen der Elektrometernadel (in Richtung abnehmender v_k) stattfindet, welches begleitet wird durch ein heftiges ununterbrochenes Knacken im Tel

---

[1]) Vgl. Hehl, Phys. Zeitschr. 3. S. 548. 1902.

Tabelle II.

J = Stromstärke in Milliampère.
v_{ka} = Kathodengefälle in Volt nach **Schaufelberger** } gemessen.
v_{kt} = „ „ „ „ **Gehlhoff** } gemessen.
$\Delta v = (v_{ka} - v_{kt})$.

Pt				Al				Ni				
J	v_{ka}	v_{kt}	$v\Delta$	J	v_{ka}	v_{kt}	Δv	J	v_{ka}	v_{kt}	$v\Delta$	Std.
0,452	344,8	273,6	71,2	0,574	252,9	225,3	27,6	0,540	290,0	244,1	45,9	0,0
0,405	366,7	288,6	78,1	0,597	269,9	229,6	40,3	0,436	305,8	288,6	17,2	15,0
0,392	382,0	307,3	74,7	0,611	275,2	245,5	29,7	0,607	315,5	297,5	18,0	39,0
0,446	386,8	320,6	66,2	0,603	277,8	248,7	29,1	0,493	321,7	308,8	12,9	63,0
0,432	393,0	325,4	67,6	0,563	278,2	250,5	27,7	0,523	320,7	310,1	10,6	87,0
0,432	393,1	327,2	65,9	0,584	281,5	245,5	36,0	0,553	324,0	308,4	15,6	101,0
0,412	395,8	331,2	64,6	0,561	281,6	245,3	36,3	0,540	324,2	307,8	16,4	125,0
0,432	395,3	330,8	64,5	0,598	282,8	245,5	37,3	0,530	328,5	314,8	13,7	174,0
0,426	398,0	331,7	66,3	0,591	282,3	250,4	31,9	0,563	327,3	314,3	13,0	246,0
0,422	400,2	335,6	64,6	0,581	282,8	248,8	34,0	0,553	328,0	314,1	13,9	292,0
+ fl. Luft												
0,392	417,2	354,2	63,0	0,621	296,5	271,4	25,1	0,587	344,4	331,8	12,6	301,0
0,402	417,2	352,3	64,9	0,567	293,7	258,4	35,3	0,581	348,2	336,1	12,1	316,0
0,395	424,5	359,5	65,0	0,567	301,3	265,9	35,4	0,540	351,0	336,5	14,5	340,0
0,405	424,3	357,6	66,7	0,587	300,1	263,4	36,7	0,540	351,2	336,6	14,6	378,0
0,405	423,9	359,8	64,1	0,594	302,2	268,0	34,2	0,540	353,3	337,4	15,9	396,0
− fl. Luft												
0,439	362,2	311,0	51,2	0,608	272,8	242,2	30,6	0,587	309,2	298,3	11,3	396,5
0,452	391,5	336,1	55,4	0,608	283,5	247,8	35,7	0,587	327,6	315,6	12,0	414,0
0,392	399,8	360,9	38,9	0,486	283,1	250,8	32,3	0,540	328,8	317,7	11,1	436,0
0,351	402,2	357,2	45,0	0,509	279,2	243,8	35,4	0,479	328,1	317,7	10,4	460,0
nach weiteren 30 Tagen (+ P_2O_2)												
0,378	407,2	351,8	55,4	0,513	285,6	255,1	30,5	0,442	332,9	321,0	11,9	1180,0

phon. Der hierdurch bedingte Fehler ist für v_{kt} etwa dreimal so groß (etwa 15 Volt), wie für v_{ka}. Mit zunehmender Trockenheit verschwindet diese Erscheinung mehr und mehr.

Die Messungen an Ni sind leicht auszuführen, und geben keinen Anlaß zu besonderen Bemerkungen.

§ 13. Es wurden insgesamt Dauermessungen an 17 verschiedenen Metallen vorgenommen, und mit Ausnahme des Bi und Mg, an allen dasselbe Verhalten gegenüber der Feuchtigkeit festgestellt. Auch das Maximum des Meßwertes stellte sich überall gleichzeitig mit dem an Pt ein, ein Beweis dafür, daß die Veränderlichkeit des Kathodengefälles nicht mit einer chemischen Veränderung der Kathodenoberfläche, sondern nur mit der Zusammensetzung der Gasfüllung verknüpft sein dürfte. Immerhin wurde darauf verzichtet, das Kathodengefälle schon von einer möglichst großen Feuchtigkeit der Luftfüllung an zu verfolgen (wie etwa in § 12), sondern es wurde im Interesse einer rascheren Austrocknung auch beim Auswechseln der Kathoden der Zutritt von Feuchtigkeit möglichst vermieden. Ebenso wurden die Werte v_{ki} aus den bereits erwähnten Gründen nicht weiter verfolgt, was schließlich nur ein frühzeitiges Leitendwerden des gläsernen Sondenschutzes durch den Zerstäubungsprozeß an der Kathode zur Folge gehabt hätte. Der Verlauf der zeitlichen Veränderung des Kathodengefälles ist überall (mit Ausnahme von Mg und Bi) vollkommen analog den in Fig. 4 aufgezeichneten, so daß wir uns mit der Zusammenstellung der Höchstwerte (abgerundet auf ganze Volt) (Tab. III) und der Erwähnung von dem besonderen Verhalten einzelner Metalle bei der Glimmentladung begnügen.

Tabelle III.

Kathode	J	v	φ
Mg	0,60	247	2,7
Al	0,59	302	3,0
Bi	0,80	339	3,7
Ni	0,54	353	—
F	0,39	363	3,7
Zn	0,25	372	3,4
Cd	0,47	375	—
Cu	0,40	375	4,0
Ir	0,23	379	—
Co	0,44	381	—
Pb	0,59	392	—
Sn	0,36	393	3,8
Sb	0,38	396	—
Au	0,38	418	—
Pd	0,48	421	—
Pt	0,40	425	4,4
Ag	0,36	428	4,1
C [1]	—	(438)	4,1

---

[1] Wegen v_{ka} bei C vgl. § 16. Der Wert 438 Volt ist in feuchterer Luft gemessen, doch ist nicht untersucht, ob dieser Wert mit wachsender Trockenheit auch ansteigt.

Der Vollständigkeit halber sind in Tab. III auch unter J die gleichzeitig gemessenen Stromstärken in Milliampères angegeben. Sie gestatten aber wegen der Verschiedenheit der Drahtdicken und der nur ungefähr gleichlang gehaltenen Glimmlichtüberdeckung, keinerlei Schlüsse auf den Zusammenhang zwischen Stromdichte und Kathodengefälle zu ziehen.

Besondere Bemerkungen:

Mg: Kathode bleibt blank. Ununterbrochenes Aufblitzen an der Sonde mit gleichzeitigem Ausschlagen der Elektrometernadel und Knacken im Telephon. Das Parallelschalten einer Kapazität (0,5 M.-F.) zwischen Sonde und Elektrometer einerseits und der Erdleitung (Kathode) andererseits, ebenso die Zwischenschaltung eines Graphitwiderstandes ($5 \times 10^6\,\Omega$) zwischen Sonde und Elektrometer, vermochten diese „Szintillationen" an der Sonde weder zu verstärken, noch sie abzuschwächen, so daß zu deren Erklärung die Annahme von Schwingungen (Elektrometer als Kapazität) ausgeschlossen ist. Beim Aufblitzen an der Sonde zeigten die Elektrometerausschläge Schwankungen von etwa 1—2 Volt, und zwar im Sinne eines abnehmenden Kathodenfalles. Der Wert 247 Volt dürfte also jedenfalls um einige Volt zu niedrig sein.

Besonders zu bemerken ist hier noch, daß bei Magnesium der Kathodenfall innerhalb der untersuchten Grenzen unabhängig von der Feuchtigkeit zu sein scheint (vgl. § 17).

Al: siehe § 12.

Bi: Stäbchen aus diesem Metalle unter Luftabschluß in einem Glasröhrchen gegossen. Blank. Einstellung des Elektrometers gut.

An diesem Metalle scheint der Feuchtigkeitsgehalt des Gases ebenfalls innerhalb der untersuchten Grenzen das Kathodengefälle wenig zu beeinflussen (vgl. § 17).

Ni: siehe § 12.
Fe: blank, gute Einstellung des Elektrometers.
Zn: „ „ „ „ „
Cd: „ „ „ „ „
Cu: „ „ „ „ „
Ir: „ „ „ „ „

Von diesem Metalle stand nur ein etwa 15 mm langes Stückchen von unregelmäßigem Querschnitte zur Verfügung, so daß die Sondeneinstellung nur mangelhaft erfolgen konnte.

Co: blank, gute Einstellung des Elektrometers. Draht unvollkommen rund.

Pb: Einstellung des Elektrometers nicht immer stabil. Es existiert tatsächlich ein niedriger Anfangswert¹) für v_{ka} welcher der blanken Kathodenoberfläche entsprechen dürfte. Der Wert steigt beständig, bis die vom Glimmlicht überdeckte Oberfläche mit einer blauen Schicht überdeckt ist.

Sn: blank, gute Einstellung des Elektrometers.

Sb: blank, Einstellung des Elektrometers nicht so sehr konstant. Querschnitt des Drahtes quadratisch mit abgerundeten Kanten.

Au: Leichte Dunkelfärbung des Drahtes. Gute Einstellung des Elektrometers. Starke Zerstäubung und dadurch Schwärzung der Sonde.

Pd: blank, gute Einstellung des Elektrometers.

Pt: „ „ „ „ „

Ag: Anlauffarben. Gute Einstellung des Elektrometers. Schwärzung der Sonde. Stabile Entladung nur bei einer gewissen Länge des Glimmlichtes.

§ 14. In Tab. III sind unter φ noch diejenigen Energiemengen angegeben, die nötig sind, um ein Elektron aus einer Metalloberfläche herauszuziehen. Diese φ sind durch die Untersuchungen von Richardson, Langmuir und anderen für verschiedene Metalle bekannt²). Man bemerkt einen parallelen Gang in φ und v_{ka}, so daß größeren φ im allgemeinen auch ein größeres v_{ka} entspricht. Uns scheint die Feststellung dieses Verlaufes um so wichtiger, als auch Holst u. Oosterhuis³) ein analoges Verhalten für die Funkenpotentiale verschiedener Metalle in Neon gefunden haben.

§ 15. Wenn an einer Kathode während einiger Zeit Glimmentladung stattgefunden hat, so wird dadurch das Kathodenmaterial etwas modifiziert, sei es, daß durch die Zerstäubung die Metalloberfläche gereinigt wird⁴), sei es, daß, je nach der

---

1) K. Rottgardt, a. a. O.

2) Die in Tab. III angegebenen φ sind entnommen: I. Langmuir, Trans. Am. El. chem. Soc. **29.** S. 125. 1916.

3) G. Holst u. E. Oosterhuis, Physica **1.** S. 78. 1921.

4) E. Warburg, Wied. Ann. **31.** S. 591. 1887.

Natur der Kathode, Oxydation eintritt.[1]) Durch diese Veränderung wird auch der Kathodenfall etwas beeinflußt. Diese Oberflächenveränderungen werden durch den Gasinhalt des Entladerohres (bei uns Luft) wieder rückgängig gemacht, sobald die Unterbrechung der Entladung längere Zeit (Stunden, Tage) dauert. Damit im Zusammenhang erweist sich der Elektrometerausschlag im ersten Momente nie als konstant, wenn nicht vorher eine Entladung von mindestens einigen Minuten der Messung vorausgegangen ist. Erst nach Bildung der erwähnten Oberflächenveränderungen sind reproduzierbare Werte für das Kathodengefälle zu erhalten. Der erste Ausschlag, unmittelbar nach dem Einschalten, steht meistens über, in einigen Fällen aber auch unterhalb dem definitiven Einstellungswerte. Hat nun das Glimmlicht längere Zeit eine bestimmte Länge der Kathode überdeckt, so ergibt sich an diesem „veränderten“ Teil der Kathode ein Kathodengefälle, welches in den meisten Fällen um mehrere Volt unterhalb dem entsprechenden Werte für den „unveränderten“ Kathodenteil liegt. Vergrößert man dann die Stromstärke durch Verkleinerung des Vorschaltwiderstandes, so wird das Glimmlicht erst von jenem Momente an auf den bis dahin an der Entladung unbeteiligten Teil der Kathode übergreifen, wenn die Stromdichte so groß ist, daß ihr das Kathodengefälle des unveränderten Teiles der Kathode entspricht. Die Stromdichte ist dann an dem schon länger benutzten Teile der Kathode größer, als an dem frisch mit Glimmlicht überdeckten, und dementsprechend ist auch ein Unterschied der Lichtintensität an den beiden Teilen von bloßem Auge leicht festzustellen. Man kann also gewissermaßen solange von einem anomalen Kathodengefälle an dem ersten Teil der Kathode sprechen, bis die Oberflächenveränderungen auch an dem zweiten Teil der Kathode eingetreten sind. Dies ist dann der Fall, wenn die Lichtintensitäten der ganzen Kathode konstant geworden, und der Elektrometerausschlag wieder auf seinen ursprünglichen Wert zurückgegangen ist.

Diese Auffassung wird gestützt durch die Tatsache, daß die Vergrößerung der Stromstärke um kleine Beträge meistens schon dieselbe Erhöhung des Kathodengefälles um einige Volt zur Folge hat, welche auch bei einer Vergrößerung der Strom-

---

1) G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. 9. S. 709. 1902.

stärke um das zwei- oder mehrfache erhalten wird. So erhöhte in einem Falle eine Vergrößerung der Stromstärke um 10 Proz. den Kathodenfall plötzlich um etwa 4 Volt, ohne daß sich aber dabei die Glimmlichtlänge sichtlich verändert hätte. Eine nun folgende weitere Vergrößerung der Stromstärke verursachte dann ein plötzliches Ausdehnen des Glimmlichtes über die Kathode hin, ohne merklichen weiteren Anstieg des Kathodengefälles. Unmittelbar darauf erfolgte aber ein langsames und stetiges Zurückgehen des Elektrometerausschlages bis auf den ursprünglichen Meßwert hinunter. Diese scheinbare Abhängigkeit des Kathodengefälles von der Stromstärke war jedoch nicht zu beobachten, wenn dem Versuche eine Entladung längs der ganzen Kathode von etwa $^1/_2$ Stunde Dauer vorangeschickt worden war.

Wenn die vorstehenden Erklärungen den wirklichen Verhältnissen entsprechen, so müßte es durch passende Konstruktion des Kathodendrahtes gelingen, an einem Metalle mit niedrigem Kathodengefälle den höheren Kathodenfall eines anderen Metalles herzustellen. Um dies zu prüfen, wurde in einen Pd-Draht ($v_{ka} = 421$ Volt) ein etwa 2,5 cm langer, gleich dicker Al-Draht ($v_{ka} = 302$ Volt) eingesetzt und die so hergestellte Kathode so in die Entladungsröhre eingesetzt, daß der Kathodenfall am Al bei verschiedenen Stromstärken gemessen werden konnte. In der Tat entsprachen die gefundenen Werte (Tab. IV und Fig. 7) vollständig den Erwartungen. Die ersten Messungen wurden bei einer Überdeckung des Al-Drahtes von etwa 1,5 cm Länge vorgenommen[1]) und blieben auch bei Vergrößerung der Stromstärke solange praktisch konstant (Teil I von Fig. 7), bis das Glimmlicht das Palladium berührte. Die weiteren Werte (Teil II der Kurve Fig. 7), welche gewissermaßen einen Übergang vom normalen zum anomalen Kathodengefälle an Al darstellen, sind zweifellos eine Folge der veränderten Ladungsverhältnisse, die im regulären, zylindrischen Glimmlichte durch das Zusammendrücken des vorgelagerten, ausgebuchteten Teiles des Glimmlichtes[2]) bei seinem allmählichen Übergang auf das Palladium entstehen. Von dem Momente an, wo bei weiterer Vergrößerung der Stromstärke auch der reguläre, zylindrische Teil des Glimmlichtes an die Übergangsstelle vom Aluminium zum Palladium herantritt ($v_{ka} = 310$ Volt), wächst das Kathodengefälle am Al exakt proportional mit der

---

[1]) Vgl. dazu die Meßresultate an Al, Tab. II.

[2]) Vgl. **Lehmann**, Verh. des Naturw. Ver. Karlsruhe 1902, Bd. 15. 13. Seite der Abhandlg.

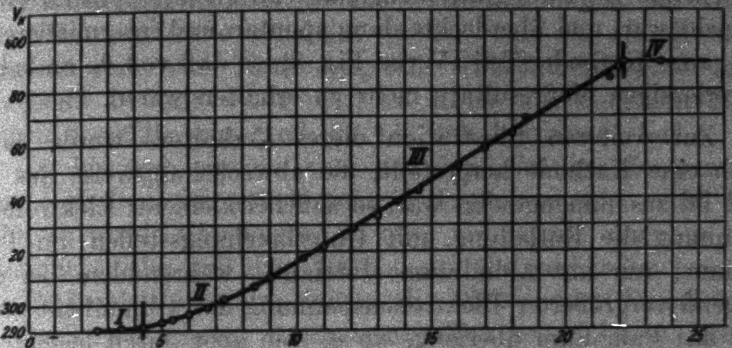


Fig. 7.

Tabelle IV.

J	v_{ka}	Bemerkungen
0,175	290,8	v_{ka} normal.
0,236	291,3	
0,290	291,7	
0,338	293,6	Übergang des vorgelagerten, ausgebuchteten Glimmlichtes auf das Pd.
0,364	294,7	
0,405	296,4	
0,452	299,2	
0,493	302,2	
0,567	306,8	
0,608	310,3	
0,688	317,6	v_{ka} anomal.
0,743	322,1	
0,811	328,8	
0,878	333,3	
0,925	338,8	
0,978	343,0	
1,079	352,3	
1,146	358,3	
1,214	363,8	
1,248	369,6	
1,363	378,8	
1,464	384,6	
1,484	388,5	
1,497	390,5	
1,593	390,5	Spontanes, intermittierendes Überspringen des Glimmlichtes auf das Pd.

Stromstärke[1] (Teil III von Fig. 7). Dieser lineare Anstieg setzte sich bei gleichzeitiger Zunahme der Lichtintensität solange fort, bis der dem Feuchtigkeitsgehalt des Gases entsprechende Wert des Kathodengefälles an Pd (v_{ka} = 390,5 Volt) erreicht war, und überdeckte dann spontan und intermittierend die ganze Kathode (Teil IV von Fig. 8), so daß von da an keine zuverlässigen Meßresultate mehr zu erhalten waren.

Zur weiteren Illustration dieses Verhaltens wurde dann noch eine Kathode hergestellt, die abwechslungsweise aus Al und Pd zusammengesetzt war, so daß bei kleinerer Elektrodenspannung die Entladung, mit Unterbrechungsstellen am Palladium, nur am Aluminium stattfand, währenddem bei genügend vergrößerter Elektrodenspannung das Glimmlicht auch auf das Palladium überging, wo es sich aber durch bedeutend geringere Lichtstärke und größere Dicke gegenüber der Entladung am Aluminium deutlich abhob.

Durch diese Versuche ist gezeigt, daß scheinbare Abhängigkeit des Kathodengefälles von der Stromstärke durch Veränderungen der Kathodenoberfläche bedingt sein können, welche sich durch längere Entladung längs der ganzen Kathode besser als durch Schmiergeln und Polieren beheben lassen.

§ 16. Schon bei den ersten Vergleichsmessungen (Pt, Al, Ni, § 12) konnte bei verschiedenem Kathodenmaterial ein auffälliger Unterschied der Dicke der kathodischen Glimmschichten, d. h. des Abstandes eines äußersten Punktes des negativen Glimmlichtes von der Kathodenoberfläche, bei gleichem Gasdruck beobachtet werden. Und zwar schien, nach rohen Abschätzungen, die Glimmlichtdicke an diesen 3 Metallen sich sowohl mit steigendem Atomgewichte, als auch mit wachsendem Kathodengefälle zu vergrößern.

Zur Entscheidung der Frage, ob hier eine wirkliche Gesetzmäßigkeit vorliegt, wurden an Kohle einige Messungen angestellt, in der Erwartung, daß hier der Unterschied entsprechend dem niedrigen Atomgewichte der Kohle besonders scharf hervortrete. Um die Hauptapparatur aber nicht mit Kohlenoxyden zu verunreinigen, wurden diese Versuche in einer speziellen Versuchsröhre ausgeführt, und, damit trotzdem ein-

---

[1] G. C. Schmidt, Ann. d. Phys. 1. S. 640. 1900.

Vergleich stattfinden konnte, wurde der gut geglühte Kohlenfaden einer Glühbirne in einen Kupferdraht eingesetzt, so daß die Glimmlichtdicken an beiden Materialien nebeneinander beobachtet werden konnten. Es zeigte sich nun, daß an der Kohle die Glimmlichtdicke erheblich größer war als am Kupfer, während sich das Kathodengefälle (Feuchtigkeitsgrad entsprechend Pt-Luft = 345 Volt) an Kohle aus mehreren Messungen ebenfalls sehr groß, zu 438 Volt bestimmen ließ.

Da hiernach ein einfacher und durchsichtiger Zusammenhang zwischen Glimmlichtdicke und Atomgewicht nicht besteht, so wurde untersucht, ob etwa ein solcher zwischen der Glimmlichtdicke und dem Kathodengefälle vorhanden ist.

Es handelt sich also darum, die Dicken des Glimmlichtes an den verschiedenen Kathodenmetallen bei gleichem Druck unter sich, und mit den gleichzeitig gemessenen Kathodenfallwerten zu vergleichen. Dazu wurden die Entladungserscheinungen an den verschiedenen Kathoden bei stets gleicher Gegenstandsweite photographiert, und aus den Platten die Relativwerte der Glimmlichtdicken entnommen.

Die wiederholte Einregulierung auf gleichen Druck nach dem jeweiligen Auswechseln der verschiedenen Kathodendrähte erfolgte dadurch, daß in einer der angeblasenen Entladungsröhren die äußere Begrenzung des Glimmlichtes an einer Pt-Kathode immer wieder auf eine festbleibende Sondenspitze eingestellt wurde. Damit war zugleich die Möglichkeit gegeben, gleichzeitig die gefundenen Kathodenfallwerte der Reihe nach nochmals auf ihre Reproduzierbarkeit zu prüfen (Tab. V: v_{ka}-Kontrolle), in dem der Feuchtigkeitsgrad bei den einzelnen Messungen[1]) durch gleichzeitige v_{ka}-Messung an der Pt-Kathode kontrolliert wurde. Tab. V enthält die Resultate.

Es ergaben sich im allgemeinen größere Glimmlichtdicken für die Metalle mit höherem Kathodengefälle, doch lassen die vorhandenen Meßfehler (Druckeinstellung, Ausmessung des photographischen Bildes usw.) außer dieser Feststellung wohl keine anderen Schlüsse zu. Immerhin ist es noch von einigem Interesse darauf hinzuweisen, daß diese Ergebnisse mit denen von Aston[2]) übereinzustimmen scheinen. Aston hat in Sauer-

---

[1]) Tab. V läßt erkennen, daß der Feuchtigkeitsgrad der über P_2O_5 eingeströmten Luftfüllung bei den einzelnen Versuchen wenig variierte.

[2]) F. W. Aston, Proc. Roy. Soc. A. 87. S. 437. 1912.

Tabelle V.

Kathode	Ordnungszahl	v_{ka} (Pt)	v_{ka}-Kontrolle	Glimmlichtdicke mm	Kathodendurchmesser mm
Mg	12	404,6	242	1,885	0,537
Al	13	402,2	284,6	2,599	0,422
Bi	83	398,3	344,6	3,172	—
Ni	28	403,2	337,1	3,198	0,507
Fe	26	400,7	347,8	3,449	0,564
Zn	30	404,4	360,5	3,057	0,541
Cd	48	405,0	351,7	3,427	0,805
Cu	29	403,0	356,6	3,176	0,461
Ir	77	395,4	360,0	3,134	—
Co	27	404,0	368,6	3,339	—
Pb	82	399,7	382,7	3,517	0,760
Sn	50	401,0	372,0	3,318	0,774
Sb	51	402,5	371,5	3,515	—
Au	79	397,0	401,2	3,702	0,473
Pd	46	401,0	399,0	3,671	0,806
Pt	78	402,7	403,4	4,284	0,529
Ag	47	399,6	398,3	4,121	0,798

stoff die Länge des Crookesschen Dunkelraumes für die Einheit der Stromdichte bei einem Druck von $^1/_{10}$ mm Hg als Funktion des Kathodenmaterials gemessen und gefunden, daß die Metalle, geordnet nach wachsendem Dunkelraum, dieselbe Reihenfolge zeigen, wie nach wachsendem Kathodenfall. Allerdings haben wir bei unseren Versuchen die Dicke von allen drei kathodischen Schichten zusammen genommen gemessen, Aston aber nur die von zwei (erste Kathodenschicht mit Crookesschem Dunkelraum), doch ist das vielleicht kein so fundamentaler Unterschied. Von größerer Bedeutung dürfte aber sein, daß Aston seine Werte auf gleiche Stromdichte bezogen hat, wir aber nicht. Auf diesen letzteren Umstand dürfte es zurückzuführen sein, daß die Metalle Bi, Ni, Cd und Fe aus der Reihe der Tab. V etwas herausfallen.

Diese Versuche zeigen nebenbei die gute Reproduzierbarkeit der gemessenen Kathodenfallwerte an allen angeführten Metallen, da sie, entsprechend dem Feuchtigkeitsgrade, gut unter sich, und mit den früheren Ergebnissen übereinstimmen.

§ 17. Es sollen nun die hier gefundenen Werte des Kathodengefälles mit den Resultaten anderer Beobachter verglichen werden. Systematische Untersuchungen des Kathodengefälles in *Luft* liegen nur vor in den Arbeiten von **Warburg** (a. a. O.) und **Rottgardt** (a. a. O.).

Bei einem Vergleich mit den Ergebnissen von **Warburg** ist zu bedenken, daß diesem Forscher zur Trocknung noch keine flüssige Luft zur Verfügung stand, er somit unmöglich zu ganz hohen Werten des Kathodengefälles gelangen konnte. **Warburg** findet für Pt in trockenster Luft einen Höchstwert von 388 Volt, während hier 425 Volt gemessen wurde. Die Definition des Kathodengefälles ist bei **Warburg** (vgl. § 1) und bei uns (vgl. § 6) in so enger Übereinstimmung, daß hierauf diese Diskrepanz nicht geschoben werden kann. Der einzige Unterschied ist der, daß wir die Sonde stets exakt auf die Grenze zwischen Glimmlicht und **Faraday**schen Dunkelraum einstellten, **Warburg** aber auf die genaue Stellung der Sonde keinen besonderen Wert legte, da er bei seinen Versuchsbedingungen ein zu vernachlässigendes Potentialgefälle im Glimmlicht hatte. Es scheint vielmehr, daß die Differenz an Pt von etwa 37 Volt auf die verschieden gute Trocknung zurückzuführen ist. Dabei sei bemerkt, daß ein Kathodengefälle an Pt von 388 Volt, einem verhältnismäßig sehr trockenen Zustand entspricht, denn, wie aus Fig. 6 ersichtlich, ist eine Trocknungszeit von etwa 70 Stunden notwendig, um diesen Wert zu erhalten. Das bedeutet aber um so mehr, wenn man bedenkt, daß erstens unsere Versuche in *ausgekochten* Glasgefäßen angestellt wurden, die also nur eine geringe Wasserdampfmenge an ihrer Oberfläche adsorbiert haben, und daß zweitens, wie Fig. 6 lehrt, selbst in solchen Gefäßen, mit P_2O_5-Trocknung allein überhaupt nur der im Vergleich zu **Warburg** wenig höhere Wert von 400 Volt zu erreichen ist. Zu bemerken ist, noch, daß **Warburg** an Pt in mäßig trockener Luft 340—350 Volt gefunden hat, was auch mit unserem Anfangswert der Tab. I (345 Volt) gut koindiziert.

Weniger gut ist die Übereinstimmung bei einem Vergleich mit den Messungen der **Rottgardt**schen Arbeit. Wie aber im folgenden gezeigt werden soll, läßt sich mit großer Wahrscheinlichkeit zeigen, daß die **Rottgardt**schen Werte in *Luft* (über diese kann hier allein etwas definitives ausgesagt werden) alle, mit Ausnahme der Beobachtungen an Mg und Bi durch relativ große Feuchtigkeit viel zu niedrig ausgefallen sind.

Rottgardt hat neben dem Kathodengefälle nach der Definition von **Gehlhoff** auch noch gemessen: „die Potentialdifferenz zwischen einem Punkt, etwa 1,5—3 mm vom negativen Glimmlicht entfernt, und der Kathode in Volt.“ Diese Werte, die er mit P bezeichnet, sollten nahe identisch sein mit unseren v_{ka}-Werten, denn der einzige Unterschied zwischen ihnen ist der, daß bei der Messung von v_{ka} möglichst *exakt* auf die Grenze des Glimmlichtes gegen den **Faradayschen** Dunkelraum eingestellt wurde, bei der Messung von P aber die Sonde noch 1,5—3 mm in den **Faraday**-Dunkelraum hineingerückt war, was keinen großen Unterschied machen dürfte. Aus diesem Grunde lassen sich daher die Ergebnisse von **Rottgardt** mit den unsrigen leicht vergleichen, indem man seine P-Werte[1] unseren v_{ka}-Werten gegenüberstellt. Das ist in Tab. VI für Luft ausgeführt.

Tabelle VI.

Kathoden-material	P nach Rottgardt	v_{ka} nach Schaufelberger	Differenz ($v_{ka} - P$)
Mg	253	247	− 6
Al	257	302	+ 45
Bi	313	339	+ 26
Ni	283	353	+ 70
Fe	301	363	+ 62
Zn	313	372	+ 59
Cd	304	375	+ 71
Cu	295	375	+ 80
Ir	—	379	—
Co	—	381	—
Pb	322	392	+ 70
Sn	318	393	+ 75
Sb	309	396	+ 87
Au	322	418	+ 96
Pd	—	421	—
Pt	324	425	+101
Ag	323	428	+105

In der Tab. VI sind die v_{ka}-Werte nach wachsender Größe aufgeführt. Man sieht, daß die Reihenfolge der P-Werte nicht immer dieselbe ist. Ferner zeigt sich, daß die v_{ka}-Werte mit einer Ausnahme (Mg) immer bedeutend größer sind, als die Rottgardtschen *P*-Werte. Für Wismut ist die Differenz am kleinsten (+ 26 Volt), für die anderen Kathodenmaterialien schwankt sie zwischen 45 und 105 Volt. Aus diesen Feststellungen kann man natürlich noch nicht schließen, welche Werte die richtigen sind, aber folgende Überlegungen scheinen zwingend zu zeigen, daß die Rottgardtschen Messungen falsch sind, und zwar wegen hohen Wasserdampfgehaltes zu niedrig gemessen.

---

[1] **Rottgardt** gibt (a. a. O. Tab. 18) die höchsten und niedrigsten beobachteten P-Werte an (maximale Differenz 20 Volt). Wir wählen hier zum Vergleich die höchsten Werte. Die niedrigen Werte würden den Vergleich noch ungünstiger machen.

Bei den Bemerkungen zu Tab. III (§ 13) war konstatiert worden, daß bei „Magnesium der Kathodenfall innerhalb der untersuchten Grenzen *unabhängig* von der Feuchtigkeit zu sein scheint.“ Und gerade die Messungen an Mg von Rottgardt stimmen mit den unsrigen sehr gut überein (auf 6 Volt). Es folgt daraus, daß die Rottgardtschen Beobachtungen mit den hier angestellten sehr wohl vergleichbar sind, und beste Übereinstimmung ergeben, falls die Wirkung der Feuchtigkeit eine untergeordnete Rolle spielt. Auch an Wismut, bei dem nach § 13 die Feuchtigkeit ebenfalls wenig Einfluß hat, stimmte v_{ka} mit *P* noch ziemlich befriedigend (auf 26 Volt) überein. Alle Materialien aber, bei denen der Wasserdampf das Kathodengefälle erniedrigt, zeigen auch bei Rottgardt viel kleinere Werte.

Noch auf andere Weise läßt sich dieser Schluß stützen. In der Tab. II (§ 12) sind Meßreihen angegeben, bei denen das Kathodengefälle v_{ka} an Al, Ni, und Pt mit wachsender Entfeuchtung der Luft gemessen wurde. Gleichzeitig sind in dieser Tabelle auch die v_{ki}-Werte angegeben, die mit den Rottgardtschen K-Werten, seinem Kathodenfall *K*, der Definition nach übereinstimmen. Nun zeigt sich recht gute Übereinstimmung zwischen den Rottgardtschen Werten und unseren *Anfangswerten, die aber großer Feuchtigkeit entsprechen*, wie Tab. VII zeigt. Die Übereinstimmung zwischen v_{ka} und *P* bzw. zwischen v_{ki} und *K* ist hiernach so frappant, besonders wenn man noch bedenkt, daß bei der Messung der v_{ki} die Form der Sonde eine Rolle spielt (vgl. § 6), daß daraus wohl die folgenden Schlüsse gezogen werden dürfen: 1. *Unter denselben Bedingungen* geben die Rottgardtschen Messungen und unsere recht gut übereinstimmende Werte und 2. die Rottgardtschen Werte sind durch das Vorhandensein von Wasserdampf, mit Ausnahme der von Mg und Bi, alle viel zu klein ausgefallen.

Tabelle VII.

	v_{ka} (Schaufelberger) Anfangswerte	P (Rottgardt)	Differenz ($v_{ka} - P$)	v_{kt} (Schaufelberger) Anfangswerte	K (Rottgardt)	Differenz ($v_{kt} - K$)
Al	253	257	− 4	225	229	− 4
Ni	290	283	+ 7	244	258	− 14
Pt	345	324	+ 21	274	277	− 3

Wenn so die Richtigkeit der Beobachtungen von **Rottgardt** in Zweifel gezogen werden, so bezieht sich das nur, wie ausdrücklich nochmals bemerkt sei, auf Luft. Nimmt man an, was wahrscheinlich ist, daß **Rottgardt** auf die Trocknung der anderen verwendeten Gase (Wasserstoff, Stickstoff[1]), Argon, Sauerstoff und deren Gemische) ebensowenig Sorgfalt verwendet hat, wie bei Luft, so werden auch diese Werte zum mindesten unsicher. Denn schon **Warburg** hat gezeigt (a. a. O.), daß das Kathodengefälle in Stickstoff sich mit wachsender Feuchtigkeit ähnlich wie in Luft, in Wasserstoff dagegen in entgegengesetztem Sinne ändert. Für Argon und Sauerstoff läßt sich dagegen nichts aussagen, da bei diesen Gasen nicht bekannt ist, welche Rolle der Wasserdampf bei der Messung des Kathodengefälles spielt.

Was sich sonst in der Literatur an Angaben über das Kathodengefälle in Luft vorfindet, ist nicht das Ergebnis spezieller Untersuchungen, sondern hat sich bei anderen Versuchen mehr nebenbei ergeben. Immerhin seien die Resultate erwähnt. So findet **Gehlhoff** (a. a. O.) bei seinen Vorversuchen in Luft für v_{ka} die Werte:

Pt: 342 Volt
Cu: 292 „
Zn: 290 „

während wir finden:

Pt in feuchter Luft:	345 Volt, in trockener Luft:	425 Volt
Cu „ „ „ :	319 „ , „ „ „ :	375 Volt
Zn in zieml. trock. Luft:	352 „ , „ „ „ :	372 „

---

[1] Stickstoff war vielleicht trockener als die anderen Gase, denn **Rottgardt** gibt bei dessen Herstellungsmethode an: „Stundenlanges Stagnieren über im Vakuum lange Zeit ausgeglühtem, glühendem Kupfer und tagelanges Trocknen über P_2O_5 und an Natronkalk.“

Stark[1]) mißt in Luft an Pt in der Regel 340 Volt.

Ferner hat **Eisenmann**[2]) einen v_{kt}-Wert an Al in Luft von 215 Volt angegeben, der mit unserem Anfangswert der Tab. II (also in feuchter Luft) $v_{kt} = 225$ Volt, befriedigend übereinstimmt.

Auch diese Zahlen von **Gehlhoff**, **Stark** und von **Eisenmann** weisen zweifellos auf unvollkommene Trocknung der verwendeten Luft hin.

§ 18. Es dürfte wohl noch verfrüht sein, eine Hypothese aufzustellen, die den enormen Einfluß von geringen Feuchtigkeitsspuren auf das Kathodengefälle zu deuten vermag. Es sei aber darauf hingewiesen, daß nach den Versuchen von **Edgar Meyer**[3]) auch ganz ähnliche Verhältnisse bei den Funkenpotentialen in Luft vorliegen. Eine Theorie muß sicherlich diese Analogie berücksichtigen.

Zusammenfassung der Resultate.

1. Es ist gezeigt worden, daß die Ergebnisse von Sondenmessungen *innerhalb* des negativen Glimmlichtes wesentlich vom Bau und der Gestalt der Sonde abhängen, und somit nur mit ein- und derselben Sonde genau reproduziert werden können. Dementsprechend ist der Begriff des Kathodengefälles als Spannungsdifferenz zwischen einem Punkte an der Grenze des negativen Glimmlichtes gegen den **Faraday**schen Dunkelraum hin und der Kathode definiert worden.

2. Bei Behandlung mit heißem destilliertem Wasser erhält man eine Glasoberfläche, welche hinsichtlich des Unvermögens, Feuchtigkeit aufzunehmen und abzugeben, den Eigenschaften des Quarzes nicht nachsteht.

3. Wenn eine für Kathodenfallmessungen bestimmte Luftfüllung möglichst wirksam getrocknet werden soll, so ist es unzweckmäßig, das Gas außer über P_2O_5 noch über H_2SO_4 konz. zu leiten. Denn die Verwendung von H_2SO_4 bedingt ein erheblich tieferes Kathodengefälle als wenn die Trocknung nur von P_2O_5 allein besorgt wird, was jedenfalls auf geringere Trocknung zurückzuführen ist.

---

1) **J. Stark**, Ann. d. Phys. **12**. S. 19. 1903.

2) **K. Eisenmann**, Verh. d. D. Phys. Ges. **14**. S. 307. 1912.

3) **Edgar Meyer**, Ann. d. Phys. **65**. S. 335. 1921.

4. In der flüssigen Luft besitzen wir ein außerordentlich wirksames Mittel zur Entfeuchtung einer abgeschlossenen Gasfüllung. Es genügt aber nicht, das Gas einfach durch ein mit flüssiger Luft gekühltes U-Rohr in das Meßgefäß einströmen zu lassen, denn der Trockenheitsgrad läßt sich in demselben noch steigern, wenn das Gefäß mehrere Tage in dauernder Verbindung mit dem gekühlten Rohre bleibt.

5. Das in vorstehender Arbeit angewandte Trocknungsverfahren ergibt gut reproduzierbare Höchstwerte des Kathodengefälles. Durch die Anordnung von drei kommunizierenden Meßgefäßen konnte die Feststellung gemacht werden, daß sich an allen Metallen diese Höchstwerte beim gleichen Trockenheitsgrade einstellen.

6. Die scheinbare Abhängigkeit des Kathodenfalles von der Stromstärke beim Verändern der Glimmlichtlänge, ist auf die Erscheinung einer besonderen Art von anomalem Kathodengefälle zurückgeführt, und daran anschließend an Aluminium das Kathodengefälle eines anderen Metalles erzeugt worden.

7. Entsprechend der verwendeten Definition des Kathodengefälles sind an 17 verschiedenen Metallen in Luft von äußerster Trockenheit neue, und unter sich vergleichbare Kathodenfallwerte gemessen worden.

8. Eine Gegenüberstellung unserer Kathodenfallwerte mit den von I. Langmuir (a. a. O.) angegebenen Energiemengen, welche ein Elektron benötigt, um den Austrittswiderstand an einer Metalloberfläche zu überwinden, zeigt uns einen parallelen Gang der beiden Größen an.

9. Die Ausmessung der photographischen Aufnahmen der Glimmlichter an den verschiedenen Metallen zeigte, daß sich an den Metallen mit höherem Kathodenfall im allgemeinen eine größere Glimmlichtdicke vorfindet.

10. Die von Rottgardt (a. a. O.) in Luft gefundenen Kathodengefälle lassen sich nur mit unseren Ergebnissen, welche in relativ feuchtem Gase gemessen wurden, zu einem Vergleiche heranziehen. Ebenso besteht eine Übereinstimmung seiner Angaben mit unseren Endwerten nur für die beiden einzigen Metalle Mg und Bi, deren Kathodengefälle in Luft im Gegensatze zu allen übrigen untersuchten Metallen, von Feuchtigkeitsspuren wenig beeinflußt wird. Diese Feststellungen führen uns

zu dem Schlusse, daß Rottgardt bei seinen Untersuchungen der Trocknung der Gase zu wenig Aufmerksamkeit geschenkt hat, so daß seine Kathodenfallwerte in Luft keinen Anspruch auf Zuverlässigkeit erheben können.

Die vorliegende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Zürich ausgeführt. Es ist mir eine angenehme Pflicht, meinem verehrten Lehrer, Hrn. Prof. Edgar Meyer für die Anregungen und die stetige Förderung dieser Arbeit auch an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank auszusprechen. Ebenso bin ich Hrn. Prof. Greinacher für seine freundlichen Ratschläge zu großem Danke verpflichtet.

Zürich, Physikal. Institut der Universität.

(Eingegangen 3. Juli 1923.)

4. *Untersuchungen über die Erzeugung sehr kleiner Wellen mit Glühkathodenröhren nach Barkhausen und Kurz;*

von Adolf Scheibe.

(Auszug aus der Jenaer Dissertation.)

§ 1. Einleitung. I. Technischer Teil: § 2. Die Senderöhren. — § 3. Die Apparatur zur Wellenerzeugung. — § 4. Die Meßeinrichtung. II. Versuchsergebnisse: § 5. Gruppierung und Form der Maxima. — § 6. Konstanz der Wellenlänge. — § 7. Beeinflussung der Wellenlänge durch äußere Einwirkungen. — § 8. Theoretische Abhängigkeit der Wellenlänge von den Spannungen und Dimensionen. — § 9. Experim. Abhängigkeit der Wellenlänge vom Emissionsstrom, von den Spannungen und Dimensionen. — § 10. Die Schwingungsbereiche. — § 11. Die Abhängigkeit der Schwingungen „höherer Frequenz" von den Spannungen und Dimensionen. — § 12. Die Intensität der beiden Wellen. — § 13. Die längsten u. die kürzesten Wellen. — § 14. Zusammenfassung.

§ 1. Die Schaltung zur Erzeugung kurzer ungedämpfter Wellen nach Barkhausen und Kurz.

Verbindet man die Anode einer Senderöhre mit zylindrischen Elektroden — wie sie von Schott & Gen., Jena, während des Krieges hergestellt wurden — mit dem negativen Pol einer Hochspannungsbatterie, das Gitter mit dem positiven Pol einer zweiten Batterie, während die anderen Pole dieser beiden Batterien mit dem Heizfaden verbunden sind, so können äußerst schnelle ungedämpfte Schwingungen entstehen[1]) (vgl. Fig. 1).

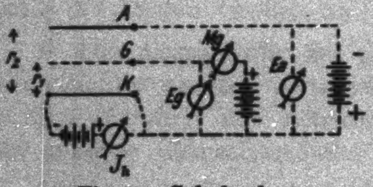


Fig. 1. Schaltschema.

Barkhausen und **Kurz** nehmen an, daß die Schwingungen durch Elektronen erzeugt werden, die infolge der durch die Gitterspannung erhaltenen Beschleunigung durch die Gittermaschen hindurchfliegen und dann infolge der Abstoßung seitens der negativ aufgeladenen Anode zu einem Hin- und Herpendeln um das Gitter gebracht werden.

---

[1]) **Barkhausen** und **Kurz**, Phys. Zeitschr. XXI, 1920, 1.

Durch die vereinfachende Annahme, daß die Elektroden nicht zylindrisch, sondern eben und parallel angeordnet sind, gelangen sie zu einer Formel, die die Beziehung zwischen der Wellenlänge und den Potentialen und Dimensionen der Röhre festlegt.

Wenn wir die folgenden Bezeichnungen einführen:

Ea, r_2 = Spannung der Anode gegen den Heizfaden, Radius der Anode,

Eg, r_1 = Spannung des Gitters gegen den Heizfaden, Radius des Gitters,

v_0 = Lichtgeschwindigkeit,

e/m = Spez. Elektronenladung,

dann ist die Größe der Wellenlänge gegeben durch:

$$\lambda = 4 \cdot v_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \frac{e}{m} Eg}} \frac{r_2 Eg - r_1 Ea}{Eg - Ea} .$$

Wenn man die Spannungen in Volt und die Radien in cm mißt, so ergibt sich schließlich:

$$\lambda = \frac{2000}{\sqrt{Eg}} \frac{r_2 Eg - r_1 Ea}{Eg - Ea} \text{ cm} .$$

Danach wird die Wellenlänge also allein durch die angelegten Spannungen und die Röhrendimensionen bestimmt.

Ziel der Arbeit.

Das Ziel der Arbeit bestand nun darin, mit einfachen Mitteln Röhren zur Erzeugung kurzer Wellen zu bauen, deren Konstanz und Intensität möglichst groß sein sollten.

Zu diesem Zwecke mußten die Schwingungsbereiche der Röhren auf ihre Abhängigkeit von den Dimensionen und angelegten Spannungen untersucht werden.

I. Technischer Teil.

§ 2. Die Senderöhren.

1. Ich nenne die Elektroden folgendermaßen:

Glühelektrode (Heizfaden),
Gitterelektrode (Gitter),
Außenelektrode (äußerer Zylinder).

Da nach Vorversuchen Röhren mit plattenförmiger Außenelektrode keine Schwingungen zeigten, gab ich dieser die Form eines Kreiszylinders und der Gitterelektrode aus praktischen Gründen die eines Prismas mit quadratischer, rechteckiger oder sechseckiger Grundfläche. Die aus einem einzigen geraden Faden gebildete Glühelektrode bildete bei allen Röhren die Mittellinie des Gitterprismas (s. a. Fig. 20).

Die Außenelektrode wurde aus elektrolytischem Kupfer hergestellt. Die Gitterelektrode bestand aus einem Gerüst aus Molybdändraht, auf welches Wolframdraht von 0,08mm Stärke spiralig aufgewickelt war. Die Glühelektrode war ein 0,15 mm starker Wolframdraht, der durch eine Zugfeder aus Wolfram-Einkristalldraht straff gehalten wurde. Zur Sicherung eines einwandfreien Kontaktes genügte das Festbinden des Heizdrahtes mit dünnem Kupferdraht an seinen Stromzuführungen innerhalb der Röhre.

Auf gute Isolation zwischen Gitter- und Glühelektrode mußte größter Wert gelegt werden, das war aber nicht ganz leicht zu erreichen, da es aus technischen Gründen notwendig war, daß ein an dem oberen Ende des Gittergerüstes angebrachter Glashaken den Heizfaden in seiner richtigen Lage (Mittellinie) hielt. Beim Elektronenbombardement trat eine starke Bestäubung dieses Glashakens und infolge der Erwärmung eine elektrolytische Leitfähigkeit ein, die allmählich zum Kurzschluß der zwischen Gitter und Heizfaden liegenden hohen Spannung führte. Die Störungen konnten durch besondere Anordnung des Glashakens vermieden werden.

Der Röhrenfuß wurde in längerer Form als üblich gebaut, um ihn mehrmals verwenden zu können.

Das Glasmaterial war Jenaer Röhrenglas und Molybdänglas. Die Längs- und Querdimensionen der gebauten Röhren sind in der Tab. 1 zu finden.

Tabelle 1.

Röhre	Durchmesser der Außenelektrode cm	Gitterquerschnitt	Länge einer Seite des Gitterquerschnittes	Wirksame Länge des Gitters	Anzahl der Gitterwind. pro cm Gitterlg.	Lage der Gitterelektrode zur Außenelektrode
A_1	0,86	quadratisch	0,6	5	10	konzentr.
A_2				5	10	„
A_3				5	2	„
A_4				2	10	„
B	1,72	quadratisch	0,6	5	10	„
C_1	1,50	sechseckig	0,7	5	10	„
C_2	1,72	quadratisch	1,0	5	10	„
D	1,72	quadratisch	0,6	5	10	exzentr.
E	1,72	längl. Rechteck	0,6 u. 1,0	5	10	konzentr.
F	1,72	sechseckig	1,3	5	10	„
G	0,86	quadratisch	0,3	2	10	„

Der Zylinder der Außenelektrode überragte die Gitterelektrode in jedem Fall um 0,5 cm nach beiden Seiten. Der glühende Teil der Glühelektrode besaß bei jeder Röhre die Länge der betreffenden Gitterelektrode (wirksame Gitterlänge). Die kleinste Röhre mit engstem Gitter war die Röhre *G*, sie war mit meinen Hilfsmitteln gerade noch zu bauen.

2. Das Evakuieren der Röhren geschah in der üblichen Art und Weise durch Außenheizung der Röhre auf ca. 480° C und durch Entlüftung der Metallteile mittels Elektronenbombardement. Besonders sorgfältig wurde die Entgasung der Gitterelektrode durchgeführt. Die notwendige Leistung wurde von einer Hochspannungsmaschine von 500—5000 Volt Klemmenspannung bei 0,1 Amp. Belastung geliefert.

Die Pumpapparatur bestand aus drei hintereinander geschalteten Gaedeschen Pumpen: Der Diffusionspumpe, der Quecksilberrotationspumpe und der Kapselpumpe.

Die zum Ausfrieren des Quecksilberdampfes nötige Temperatur stellte eine Kältemischung von fester Kohlensäure und Toluol her.

3. Die Röhren wurden nach dem Evakuieren an der Pumpapparatur gelassen. Sämtliche Untersuchungen wurden bei laufenden Pumpen ausgeführt, so daß etwa noch

frei werdende Gasreste sofort entfernt wurden. Der Druck wurde durch ein Mc-Leodmanometer bestimmt, er betrug etwa 1×10^{-5} mm Hg.

Die Lebensdauer der Röhren war im Durchschnitt eine geringe. Dies hatte seine Ursache in der übermäßig starken Belastung, die nötig war, um die Schwingungsbereiche zu finden und bis zum Aussetzen der Schwingungen zu verfolgen. Die hohen Spannungen der Gitterelektrode gegen die Glühelektrode und der starke Emissionsstrom von 5—6 Milliamp./mm^2 Heizdrahtoberfläche führten schnell zu einer starken Fadenzerstäubung.

Die Lebensdauer kann erheblich dadurch verlängert werden, daß man die für den betreffenden Schwingungsbereich geeignetste Röhre auswählt und die Schwingungen von außen durch einen Resonator (später!) unterstützt, wodurch man in die Lage versetzt wird, schon bei wesentlich geringerem Emissionsstrom genügend Schwingungsenergie zu erhalten. Der Benutzung der Röhren auch in abgeschmolzenem Zustande steht dann nichts im Wege.

§ 3. Die Apparatur zur Wellenerzeugung.

Die Apparatur bestand aus der Senderöhre, der Heizbatterie für die Glühelektrode, den Hochspannungsbatterien für die Außen- und Gitterelektrode, den dazu gehörigen Spannungs- und Strommessern und der Kopplungseinrichtung, die die Energie der Wellenlängenmeßanordnung übermittelte.

Das Schaltungsschema wurde bereits in Fig. 1 angegeben.

Die Batterien mußten höchste Konstanz besitzen, da z. B. Schwankungen des Heizstromes von noch nicht 0,1 Proz. jede Wellenlängenbestimmung unmöglich machten.

Vorschaltwiderstände und Potentiometerschaltungen sorgten für feinste Einstellungsmöglichkeit des Heizstromes und der Spannungen.

Der Strommesser im Heizkreis und die Spannungsmesser der Batterien waren Präzisionsinstrumente.

Die Widerstände und Meßinstrumente waren in 1—1,50 m Entfernung von der Röhre angeordnet, von hier aus liefen die Zuleitungen zur Röhre bifilar.

Um die Röhren leicht auswechseln zu können, wurden sie mit den aus ihnen herausragenden Elektrodenzuleitungen in eine

Art Steckdose (Röhrensockel) eingesteckt. Diese bestand aus einem Hartgummiklotz, in den vier mit Quecksilber gefüllte senkrechte Glasröhren eingesetzt waren, in die die Elektrodenzuleitungen eingetaucht werden konnten. Das Quecksilber dieser 4 Glasröhren stand mit Quecksilbernäpfen in Verbindung, in die die von den Batterien kommenden Zuleitungen eintauchten.

Aus der einen Stirnseite des Klotzes ragten zwei 2 cm entfernte und 3 cm lange parallele Kupferstäbe heraus, die mit den zur Gitter- und Außenelektrode führenden Quecksilberröhren verbunden waren. Auf diese beiden Kupferstäbe wurden als „Antennen“ verschieden lange Messingröhren aufgesetzt, durch die die Koppelung mit der Meßeinrichtung (Lechersystem) hergestellt wurde.

§ 4. Die Meßeinrichtung.

Die Wellenlängen wurden mit Hilfe eines Lecherschen Drahtsystemes gemessen. Das System bestand aus zwei 1,25 mm dicken, in 2 cm Entfernung voneinander ausgespannten Kupferdrähten. Die Drähte waren zwischen den Stirnwänden einer aus Eichenholz angefertigten Meßbank ausgespannt. Diese Bank bestand aus zwei Führungsschienen, zwischen denen ein 30 cm langer, genau eingepaßter Schlitten bewegt werden konnte. Die Bewegung geschah mittels einer Lenkeinrichtung vom Platze des Beobachters aus. Auf dem Schlitten war die Plattenbrücke mit dem Indikator angebracht, der zum Nachweis der stehenden Wellen diente.

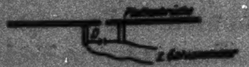
Die Plattenbrücken bestanden aus kreisförmigen Kupferscheiben von 1 mm Dicke und 16,5 cm Durchmesser mit zwei symmetrisch zum Mittelpunkt gelegenen Durchbohrungen, durch welche die Lecherdrähte senkrecht zur Plattenebene geführt wurden.

Die Indikatoren befanden sich stets auf der der Senderöhre abgewandten Seite der Brücke. Als Indikator diente entweder ein Kristalldetektor oder ein Hochvakuumthermoelement. Der Detektor wurde entweder direkt[1]) mit den beiden Hälften der in diesem Fall durchgeschnittenen Plattenbrücke verbunden (Fig. 2a) oder kapazitiv, indem an ihm zwei 10 cm lange Antennen angebracht waren, die isoliert durch zwei Löcher in der Brücke in den Schwingungsraum hineinragten (Fig. 2b).

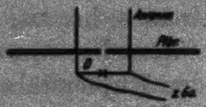
---

[1]) **Schriever**, Ann. **63**, S. 660. 1920.

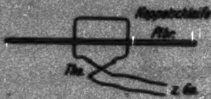
Die Koppelung des Thermoelements erfolgte mit Hilfe einer Koppelschleife, die isoliert durch die Plattenbrücke geführt wurde (massive Plattenbrücke, Fig. 2c).



a) Direkte Detektorkoppelung.



b) Kapaz. Detektorkoppelung.



c) Koppelung der Thermoelemente.

Fig. 2.

Zum Aufsuchen der Wellen diente die empfindlichere Anordnung des direkt gekoppelten Detektors. Der lose (kapazitiv) gekoppelte Detektor und das Thermoelement ergaben zwar geringere Eigendämpfung, konnten aber nur bei kräftigeren Wellen benutzt werden.

Die Koppelung zwischen Lechersystem und Sender geschah dadurch, daß sich die Antennen des Röhrensockels in variabler Höhe über dem bei Benutzung des Detektors offenen, des Thermoelementes geschlossenen vorderen Ende des Drahtsystems befanden.

Als Stromanzeiger wurde beim Gebrauch des Detektors ein Spiegelgalvanometer von Hartmann & Braun von $1,5 \times 10^{-8}$ Amp./Skt. Empfindlichkeit bei 495 Ω innerem Widerstand und 8 sec Schwingungsdauer benutzt, beim Gebrauch des Thermoelementes ein kleines Spiegelgalvanometer von Siemens & Halske von 5×10^{-9} Amp./Skt. Empfindlichkeit bei 55 Ω Spulenwiderstand und 2,5 sec Schwingungsdauer. Es kam weniger auf höchste Empfindlichkeit als auf kurze Schwingungsdauer an, zu lange Schwingungsdauer machte infolge der scharfen Resonanz das Aufsuchen der Maxima der stehenden Wellen fast unmöglich.

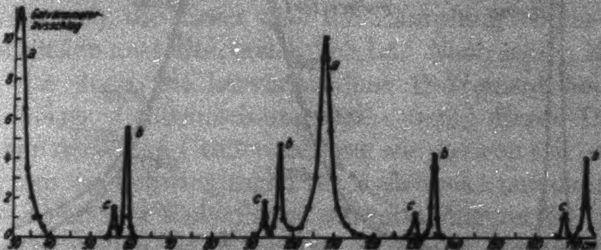
Die Einteilung der Meßbanklänge in mm genügte zur Bestimmung der Wellenlänge völlig, da ihre große Länge die Auswertung einer großen Anzahl von Knotenabständen gestattete.

II. Versuchsergebnisse.

§ 5. Gruppierung und Form der Maxima.

Zum Auffinden der Schwingungen einer neu zu untersuchenden Röhre erwies es sich als vorteilhaft, der Gitterelektrode eine möglichst hohe Spannung (ca. 250 Volt) zu geben und die Spannung der Außenelektrode von geringen zu immer höheren negativen Werten anwachsen zu lassen. Fernerhin war es zweckmäßig, mit der Heizung an die oberste Grenze zu gehen. War dann eine Spannung der Außenelektrode gefunden, bei der die Röhre genügend intensive Wellen erzeugte, so wurden allmählich Gitterspannung und Fadenheizung verändert, bis die Röhre ohne übermäßige Belastung gut arbeitete. Eine solche Kombination von Gitterspannung, Außenelektrodenspannung und Heiz- bzw. Emissionsstromstärke wird zukünftig als „Betriebsbedingung“ bezeichnet.

Untersuchte man dann mit dem Indikator die Verteilung der Maxima auf dem Lecherschen Drahtsystem, so ergab sich



Intensitätsverteilung nach dem Lecherschen Drahtsystem.
Fig. 3.

im allgemeinsten Fall eine solche, wie sie durch Fig. 3 dargestellt wird. Die Maxima ließen sich in 3 Gruppen zusammenfassen.

1. Die mit a) bezeichneten Maxima, die einer längeren und meist stärkeren Welle angehören, die hinfort „lange Welle“ (oder Schwingung „geringerer Frequenz“) genannt wird,
2. die mit b) bezeichneten, die einer kürzeren und meist schwächeren Welle angehören, diese wird „kurze Welle“ oder (Schwingung „höherer Frequenz“) genannt,
3. die mit c) bezeichneten, die dadurch entstehen, daß die Wellen der Gattungen *a* oder *b* über die Plattenbrücke hinausgelangen und am Ende der Lecherdrähte reflektiert werden.

Wir werden später sehen, daß die Gattungen *a* und *b* nicht gleichzeitig vorhanden zu sein brauchen. Das Erscheinen der Reflexionswellen *c* trat stärker bei der geschlitzten, als bei der massiven Plattenbrücke auf. Ein das Ende des Drahtsystems kurz schließender Flüssigkeitswiderstand von $R=\sqrt{\frac{L}{C}}=500\,\Omega$ war geeignet, ihre Intensität zu schwächen bzw. ganz zu unterdrücken (L und C = Selbstinduktion und Kapazität pro cm Länge des Lechersystems).

Einige Intensitätskurven der Schwingungen a und b sind in Figg. 4 und 5 eingezeichnet. Die Kurven wurden teils mit

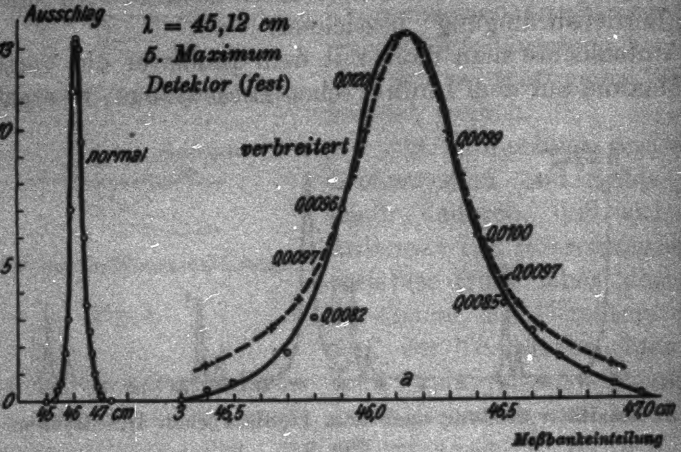


Fig. 4.

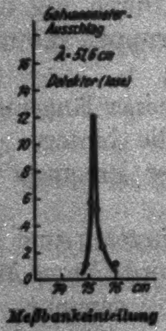


Fig. 5b.

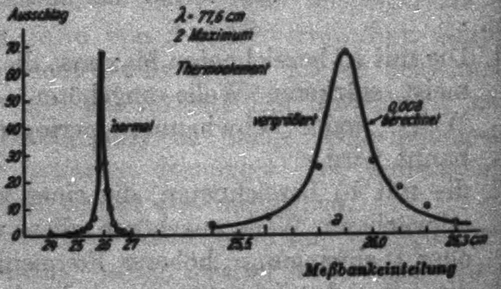


Fig. 5a.

dem fest (Fig. 4) bzw. lose (Fig. 5b) gekoppelten Detektor, teils mit dem Thermoelement (Fig. 5a) aufgenommen. Nach der **Bjerknes**schen Methode wurde das Dekrement aus einigen Kurven berechnet. Für die stark verbreiterte Kurve 4a (mit dem Detektor in direkter Koppelung aufgenommen) ist das Dekrement an die einzelnen Kurvenpunkte angeschrieben, liegt zwischen 0,0082 und 0,012; die mit Kreuzen versehene Kurve ist für das Dekrement 0,0097 berechnet worden. Die starke Abweichung des unteren Teiles der gemessenen Resonanzkurve hat vielleicht seine Ursache in der Benützung des Detektors als Indikator. Den experimentell gemessenen Punkten (Thermoelement) in Fig. 5a ist eine berechnete Resonanzkurve mit dem Wert des Dekrements 0,0080 angeglichen worden.

Wir haben also in den Intensitätskurven Resonanzkurven vor uns. Das Dekrement ist sehr gering, es wird zum kleinsten Teil durch den Widerstand bzw. die Strahlung des Drahtsystems und zum größten Teile durch die Absorption in den Brücken bestimmt, wie z. B. aus den Betrachtungen von Weichmann[1]), die dieser über die Dämpfung seitens massiver Plattenbrücken anstellte, ersichtlich ist. Nach seinen Messungen beträgt das durch sie hervorgerufene Dekrement bei Schwingungen obiger Größenordnung 0,01—0,02; dieses Dekrement ist also von derselben Größenordnung wie das von mir gemessene.

Da nun die Schwingungen für Meßzwecke nur dann brauchbar sind, wenn ihre Wellenlänge während längerer Zeit genügend konstant ist, sollen im folgenden Abschnitt Fragen behandelt werden, die sich mit der Konstanz der Wellenlänge beschäftigen.

§ 6. Konstanz der Wellenlänge.

In den folgenden Tabb. 2 und 3 sind zwei Konstanzprüfungen aufgeschrieben, die an zwei verschiedenen Röhren während einer Zeitdauer bis zu einer Stunde vorgenommen wurden.

Tabelle 2.

a	b	c	d	e	f	
Zeitdauer Minuten	$\lambda/2$ cm	$\lambda/2$ cm	$\lambda/2$ cm	Mittel aus b bis d cm	Mittlerer Fehler cm	
0	38,80	38,77	38,70	38,76	± 0,036	$\lambda/2$ mittl. 38,78 cm Einzelwert ± 0,1 cm ± 0,26 %
15	38,80	38,80	38,80	38,80	± 0,0	
30	38,80	38,80	38,80	38,80	± 0,0	
40	39,00	39,00	38,90	38,96	± 0,036	
50	38,68	38,60	38,70	38,66	± 0,036	
60	38,80	38,80	38,70	38,76	± 0,036	

λ = Wellenlänge.

---

1) Weichmann, Ann. 66, S. 526. 1921,

In den Spalten b bis d der Tab. 2 sind drei schnell nacheinander gemessene Wellenlängenwerte eingetragen, aus denen das in Spalte e stehende Mittel genommen wurde.

Tabelle 3.

a	b		c	d	e	
Zeitdauer Min.	Knotenlagen mm	mm	λ/2 cm	Mittel aus c cm	Mittlerer Fehler cm	
0	1. 2446 11. 0600	11. 0593 1. 2449	18,53 18,49	18,510	± 0,02	
10	1. 2447 11. 0601	11. 0602 1. 2449	18,45 18,48	18,465	± 0,015	λ/2 mittl. 18,501 cm Einzelwert ± 0,02 cm ± 0,11 %
20	1. 2447 11. 0594	11. 0595 1. 2448	18,52 18,50	18,530	± 0,01	
30	1. 2 449 11. 0 598	11. 0597 1. 2448	18,52 18,50	18,510	± 0,01	
40	1. 2448 11. 0598	11. 0599 1. 2448	18,49 18,50	18,495	± 0,005	
50	1. 2449 11. 0600	11. 0600 1. 2449	18,48 18,49	18,490	± 0,00	

Die Werte in Tab. 3 wurden dadurch gefunden, daß zur bestimmten Zeit der 1. und 11., darauf der 11. und 1. Knoten abgelesen wurde (Sp. b); aus diesen Knotenlagen wurden die beiden Wellenlängen der Spalte c ermittelt, die dann wieder den Mittelwert in Spalte d ergaben.

Die Fehler der Einzelwerte sind danach sehr gering, sie bewegen sich zwischen ± 0,11 und ± 0,26 Proz. Wenn wir nun noch bedenken, daß während der Untersuchungsdauer infolge der hohen Belastung Verschiebungen des Gitters in seiner Lage zu den anderen Elektroden wohl möglich waren, starke Fadenzerstäubung immer eintrat und die Spannungen und Ströme ständig nachreguliert werden mußten, so kann von einer genügenden Konstanz der Schwingungen während der Zeitdauer einer Stunde gesprochen werden.

Ungünstiger werden die Verhältnisse, wenn die Röhren lange Zeit in Betrieb waren, wenn sie dabei übermäßig stark belastet wurden oder wenn sie längere Zeit von der Pumpapparatur abgeschnitten waren, so daß sie bei Neubenutzung z. T. wieder entgast werden mußten.

Tabelle 4.

a	b	c	d	e	f
Röhre	Datum $\lambda/2$ cm	Datum $\lambda/2$ cm	$\Delta\lambda/2$ cm	$\Delta\lambda/2$ °/₀	Betriebszustand in der Zwischenzeit
XVIII	26. XI. 15,80	30. XI. 15,52	− 0,28	− 1,77	dauernd in Betrieb
XVIII	30. IX. 16,40	5. X. 16,60	+ 0,20	+ 1,20	dauernd in Betrieb
XVa	28. IX. 15,32	13. X. 15,47	+ 0,15	+ 1,00	dauernd außer Betrieb
M[1]	20. III. 40,40	22. III. 40,40	± 0,00	± 0,00	dauernd in Betrieb
X	11. V. 22,42	27. V. 22,38	− 0,04	− 0,18	dauernd außer Betrieb
XVI	25. X. 29,32	28. X. 29,29	− 0,04	− 0,14	dauernd in Betrieb
XVI	31. X. 28,07	1. XI. 28,12	+ 0,05	+ 0,18	Kontrollmessungen

Tab. 4 gibt uns eine Zusammenstellung von Wellenlängendifferenzen, die auftraten, wenn die Röhren nach längeren Zeiten wieder mit denselben Spannungen und Strömen betrieben wurden. Wir sehen, daß im extremsten Fall eine Differenz von − 0,28 = − 1,77 Proz. vorkam. Diese Röhre wurde dauernd stark beansprucht und brannte kurz nach den Vergleichsmessungen durch.

Die gefundenen Differenzen der anderen Vergleichsmessungen sind $\leqq$ 1,2 Proz., somit darf von einer genügenden Reproduzierbarkeit der Wellen gesprochen werden, besonders, da sich im nächsten Abschnitt auch zeigen wird, daß die Wellenlänge durch außen angebrachte Schwingungskreise kaum beeinflußt werden kann.

§ 7. Beeinflussung der Wellenlängen durch äußere Einwirkungen.

Wenn die Vorstellung der Schwingungserzeugung nach **Barkhausen** und **Kurz** richtig ist, so ist zu erwarten, daß die Wellenlänge nur unabhängig von den Dimensionen und angelegten Spannungen ist und daß durch angeschaltete Schwingungskreise höchstens die Intensität, nicht aber die Länge der

---

[1] **Schottsche** Röhre.

Wellen beeinflußt wird. Bei den verwandten kurzen Wellen wirken aber bereits die Antennen als Schwingungskreise, ähnliche Wirkungen müssen die Zuleitungen haben.

Die Versuche zeigten nun, daß die Führung der Zuleitungen zum Röhrensockel und die Länge der Antennen wohl die Intensität, nicht aber die Länge der Wellen und den Charakter der Schwingungen beeinflußten. Die Unterschiede in den Wellenlängen lagen innerhalb der Meßfehler. Nur bei einer einzigen Röhre war ein abweichendes Verhalten zu finden.

Bei dieser Röhre (*B*) war es nämlich möglich, die Schwingungen bei passend gewählter Betriebsbedingung durch die Antennen so zu beeinflussen, daß eine völlig anders geartete Schwingung, wie die Resonnanzkurve *a* in Fig. 6 zeigt, entstand. Zum Vergleich sind die normalen Resonanzkurven der eingestellten Elektronenschwingung für drei andere Antennenlängen mit eingezeichnet, die ich dann erhielt, wenn ich die im Falle *a* angewandte Antennenlänge verkürzte. Die Form der Resonanzkurve zeigt, daß hier offenbar eine andere Wellenform, vielleicht gedämpfte Wellen, vorliegt, also eine ganz andere Art von Schwingungen, die mit den hier untersuchten ungedämpften Schwingungen nichts zu tun haben und nicht weiter untersucht zu werden brauchen. Eine Verwechslung mit den ungedämpften Wellen ist durch die Form der Resonanzkurve, die eine genauere Wellenlängenmessung von vornherein unmöglich macht, ausgeschlossen.

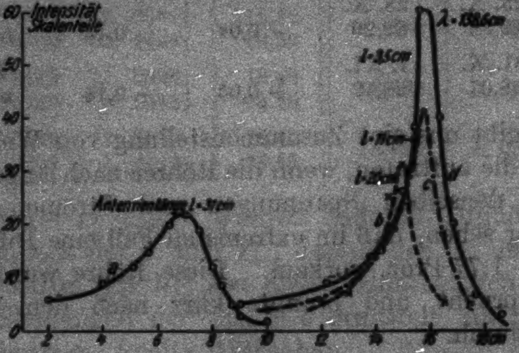


Fig. 6.

Wir können also sagen, daß die ungedämpften Elektronenschwingungen von großer Konstanz, reproduzierbar und in ihrer Frequenz von außen kaum beeinflußbar sind.

Wir wenden uns nun der Hauptaufgabe zu, die Abhängigkeit der Frequenz bzw. Wellenlänge von den Dimensionen und Betriebsbedingungen zu untersuchen.

Da die Versuchsergebnisse jedoch besser verständlich werden, wenn wir sie an der Hand eines Wegweisers besprechen, so soll deshalb zuerst berechnet werden, welche Ergebnisse die Theorie erwarten läßt.

§ 8. Die theoretische Abhängigkeit der Wellenlänge von den Spannungen und Dimensionen.

Barkhausen und **Kurz** hatten ihre Formel (vgl. S. 55) dadurch gewonnen, daß sie die Schwingungsdauer des Elektrons für eben angeordnete Elektroden berechneten. Im folgenden soll an Stelle dieser Anordnung die bei den Versuchen vorhandene zylindrisch-symmetrische treten (Fig. 7).

Führen wir folgende Bezeichnungen ein:

r = Entfernung von der Achse,
r_0 = Radius des Heizfadens,
r_1 = ,, der Gitterelektrode,
r_2 = ,, ,, Außenelektrode,
E = Potential in der Entfernung r,
E_0 = ,, des Heizfadens $= 0$,
Eg = ,, der Gitterelektrode,
Ea = ,, ,, Außenelektrode,
ε = Ladung des Elektrons,
m = Masse des Elektrons,
v = Geschwindigkeit des Elektrons,
τ = Periodendauer,
c = Lichtgeschwindigkeit,
$\lambda = c \cdot \tau$ = Wellenlänge,

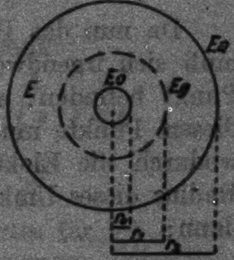


Fig. 7

so ergibt sich für die Bewegung eines Elektrons, wenn man die Austrittsgeschwindigkeit des Elektrons vernachlässigt, die Energiegleichung:

$$(1) \qquad \frac{m}{2} v^2 = \varepsilon \cdot E, \quad \text{also} \quad (1\text{a}) \quad v^2 = 2 \frac{\varepsilon}{m} \cdot E.$$

a) Für einen Punkt im Raume Kathode—Gitterelektrode ergibt sich als Potential

$$E = Eg \frac{\ln \frac{r}{r_0}}{\ln \frac{r_1}{r_0}}$$

und somit als Geschwindigkeit

$$v^2 = 2\frac{e}{m}E = 2\frac{e}{m}Eg\,\frac{\ln\frac{r}{r_0}}{\ln\frac{r_1}{r_0}}$$

$$= \varkappa_1^2\cdot\ln\frac{r}{r_0}$$

und daraus

$$v = \frac{dr}{dt} = \varkappa_1\sqrt{\ln\frac{r}{r_0}} \tag{2}$$

wobei

$$\varkappa_1 = \sqrt{2\frac{e}{m}\cdot Eg\cdot\frac{1}{\ln\frac{r_1}{r_0}}}$$

ist.

b) Für einen Punkt im Raume Gitter–Außenelektrode ergibt sich als Potential:

$$E - Eg = \frac{Ea - Eg}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\ln\frac{r}{r_1}\,. \tag{3}$$

Da nun das Potential der Außenelektrode negativ ist, so muß sich irgendwo zwischen den Entfernungen r_1 und r_2 ein Punkt befinden, an dem das Potential gleich Null ist. An diesem Punkte muß auch die Geschwindigkeit gleich 0 werden, wodurch die Elektronen in ihrer Bewegung umkehren. Den Radius dieses Umkehrpunktes bezeichnen wir mit r_u und haben dann:

$$-Eg = \frac{Ea - Eg}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\ln\frac{r_u}{r_1} \tag{4a}$$

und daraus ergibt sich für r_u:

$$\left\{\begin{aligned} \ln\frac{r_u}{r_1} &= \frac{Eg}{Eg - Ea}\ln\frac{r_2}{r_1}\,,\\ r_u &= r_1\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{Eg}{Eg-Ea}}\,. \end{aligned}\right. \tag{4b}$$

Somit läßt sich (3) unter Benützung von (4a) schreiben:

$$E = \frac{Ea - Eg}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\left(\ln\frac{r}{r_1} - \ln\frac{r_u}{r_1}\right) = \frac{Ea - Eg}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\cdot\ln\frac{r}{r_u}\,.$$

Es ergibt sich dann als Geschwindigkeit:

$$v^2 = 2\,\frac{e}{m}\,E = 2\,\frac{e}{m}\,\frac{Eg - Ea}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\ln\frac{r_u}{r}$$

$$= \varkappa_2^{\,2}\ln\frac{r_u}{r},$$

und daraus

(5) $$v = \frac{dr}{dt} = \varkappa_2\sqrt{\ln\frac{r_u}{r}},$$

wobei

$$\varkappa_2 = \sqrt{2\,\frac{e}{m}\,\frac{Eg - Ea}{\ln\frac{r_2}{r_1}}}$$

ist.

c) Danach berechnet sich aus (2) für die Zeit des Durchfliegens des Kathodengitterraumes der Wert:

$$t_1 - t_0 = \frac{1}{\varkappa_1}\int_{r_0}^{r_1}\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{r}{r_0}}}\,dr = \frac{2r_0}{\varkappa_1}\int_0^{\sqrt{\ln\frac{r_1}{r_0}}} e^{u^2}\,du$$

und aus (5) für die Zeit Gitter → Umkehrpunkt:

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\varkappa^2}\int_{r_1}^{r_u}\frac{dr}{\sqrt{\ln\frac{r_u}{r}}} = -\frac{2r_u}{\varkappa_2}\int_{\sqrt{\ln\frac{r_u}{r_1}}}^{0} e^{-y^2}\,dy$$

oder wegen (4b) unter Einsetzung des Wertes für r_u:

$$t_2 - t_1 = \frac{2r_1}{\varkappa_2}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{Eg}{Eg - Ea}}\int_0^{\sqrt{\frac{Eg}{Eg - Ea}\ln\frac{r_2}{r_1}}} e^{-y^2}\,dy\,.$$

Die Einsetzung der Werte für $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ ergibt dann als Zeit für das Durchfliegen der Strecke Kathode → Umkehrpunkt, d. h. für die Hälfte der Schwingungsdauer τ:

$$t_2 - t_0 = \frac{\tau}{2} = \frac{2r_1}{\sqrt{2\,\frac{e}{m}\,Eg}}$$

$$\cdot\left\{\frac{r_0}{r_1}\sqrt{\ln\frac{r_1}{r_0}}\int_0^{\sqrt{\ln\frac{r_1}{r_0}}} e^{u^2}\,du + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\frac{Eg}{Eg - Ea}}\sqrt{\frac{Eg}{Eg - Ea}\ln\frac{r_2}{r_1}}\int_0^{\sqrt{\frac{Eg}{Eg - Ea}\ln\frac{r_2}{r_1}}} e^{-y^2}\,dy\right\},$$

oder wenn die Radien in cm und die Spannungen in Volt gemessen werden, unter Einführung neuer Abkürzungen:

$$
(6)\quad \left\{ \begin{aligned} \lambda = c \cdot \tau = & \frac{4c \cdot r_1}{\sqrt{2\frac{e}{m} Eg \cdot 10^8}} \\ & \cdot \left\{ f\left(\sqrt{\ln \frac{r_1}{r_0}}\right) + g\left(\sqrt{\frac{Eg}{Eg - Ea} \ln \frac{r_2}{r_1}}\right) \right\} \text{cm}. \end{aligned} \right.
$$

Die Funktionen

$$
f\left(\sqrt{\ln \frac{r_1}{r_0}}\right) \quad \text{und} \quad g\left(\sqrt{\frac{Eg}{Eg - Ea} \ln \frac{r_2}{r_1}}\right)
$$

haben dabei die Formen:

$$
f(x) = x\, e^{-x^2} \int_0^x e^{u^2}\, du,
$$

$$
g(x) = x\, e^{x^2} \int_0^x e^{-u^2}\, du.
$$

Ihr Verlauf 1) ist in den Figg. 8 und 9 gezeichnet und in Tab. 5 durch eine Anzahl von Zahlenwerten gegeben:

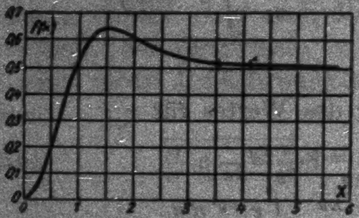


Fig. 8. $f(x) = e^{-x^2} x \int_0^x e^{u^2}\, du.$

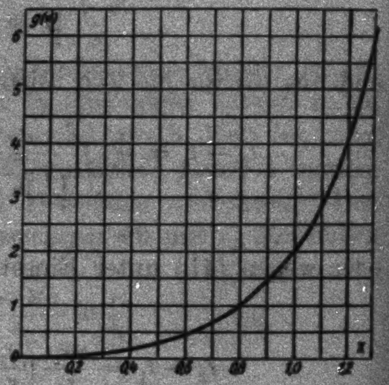


Fig. 9. $g(x) = e^{x^2} x \int_0^x e^{-u^2}\, du.$

---

1) Für die Berechnung von $\int_0^x e^{u^2}\, du$ wurden die Tabellen aus „Schumann, Elektrische Durchbruchsfeldstärken von Gasen", S. 238 entnommen, die mir der Verfasser in liebenswürdiger Weise schon vor Erscheinen des Buches zur Verfügung stellte. Die Berechnung des Fehlerintegrals $\int_0^x e^{-u^2}\, du$ erfolgte nach den Funktionstafeln von Jahnke-Emde.

Tabelle 5.

x	$f(x)$	$g(x)$	x	$f(x)$	$g(x)$
0	0	0	1,8	0,63419	40,86
0,1	0,00998	0,010	2,0	0,60968	98,01
0,5	0,21228	0,289	3,0	0,534	—
0,8	0,42568	0,998	4,0	0,516	—
1,0	0,53808	2,020	5,0	0,510	—
1,2	0,60872	4,088	7,0	0,504	—
1,5	0,64237	12,190	∞	0,500	—

Die Formel (6) zeigt nun folgendes:

1. Abhängigkeit der Wellenlänge von den Dimensionen.

   a) Vergrößert man die Querdimensionen, d. h. die Radien r_0, r_1, r_2 so, daß die Röhre sich selbst ähnlich bleibt, so ist die Wellenlänge proportional r_1, d. h. proportional dem Gitterradius.

   b) Wird der Gitterradius r_1 konstant gehalten, so hängt die Schwingungszahl einmal vom Verhältnis r_1/r_0 und dann vom Verhältnis r_2/r_1 ab; erstere Abhängigkeit ist sehr gering, weil man bei den praktisch herstellbaren Dimensionen sich durchweg rechts des Maximums der Kurve $f(x)$ bewegt (die bei meinen Untersuchungen in Betracht kommenden Werte von $f(x)$ liegen zwischen den Abszissen 1,9 und 2,5). Die Abhängigkeit vom Verhältnis r_2/r_1 ist infolge der dauernd ansteigenden Funktion $g(x)$ derart, daß mit zunehmenden r_2/r_1 die Wellenlänge immer wächst. Daraus folgt, daß bei konstanten r_0 und r_1 die Wellenlänge mit r_2 größer wird.

2. Die Formel (6) zeigt weiter:

   a) bei konstantem Verhältnis $Eg/(Eg - Ea)$ muß λ umgekehrt proportional $\sqrt{Eg}$ sein.

   b) Bei konstantem Eg muß die Wellenlänge zunehmen, wenn $Eg/(Eg - Ea)$ vergrößert wird. Da Ea immer negativ ist, bedeutet dies, daß die Wellenlänge mit zunehmendem $|Ea|$ abnimmt.

Es sollen nun die Versuchsergebnisse an der Hand der Theorie behandelt werden. Dabei ergeben sich zwei Fragestellungen:

1. Inwieweit stimmen die gefundenen Wellenlängen mit den berechneten überein,
2. treten die von der Theorie vorausgesagten Wellen stets auf oder ist ihr Auftreten an gewisse weitere Bedingungen geknüpft (Schwingungsbereiche)?

Vorerst muß jedoch festgestellt werden, ob die Voraussetzungen der Theorie insofern zutreffen, als die beobachteten Wellenlängen unabhängig vom Heizstrom bzw. Emissionsstrom sein sollen.

§ 9. Experimentelle Abhängigkeit der Wellenlängen von dem Emissionsstrom, den Spannungen und Dimensionen.

Bei den Messungen wurde so verfahren, daß man einen möglichst hohen Heiz- bzw. Emissionsstrom einstellte und dann durch Veränderung der Gitter- bzw. Außenelektrodenspannung einen schwingungsfähigen Zustand einregulierte.

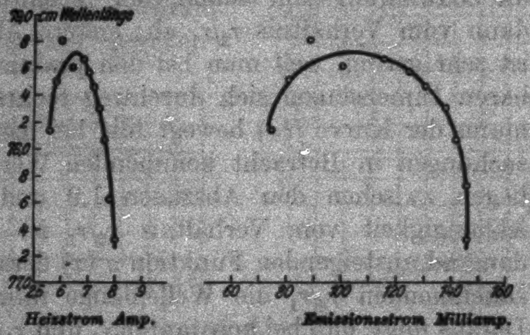


Fig. 10.

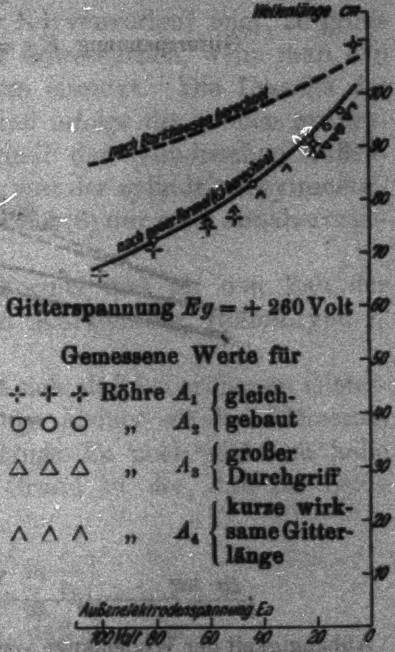
1. Ich komme nun zuerst auf den Einfluß des Emissionsstromes zu sprechen.

Die Röhre A_2 z. B. zeigte eine Abhängigkeit der Wellenlänge vom Heiz- bzw. Emissionsstrom gemäß Fig. 10. Der Emissionsstrom wurde durch Messung des vom Gitter aufgenommenen Elektronenstromes bestimmt, da der von der Außenelektrode aufgenommene kleiner als 0,001 Amp. war, und daher vernachlässigt werden konnte. Die Figur ergibt somit zuerst eine geringe Zunahme und dann eine stärkere Verkürzung der Wellenlänge. Die maximale Änderung der Wellenlänge vom Einsetzen der Schwingungen bis zur höchst zulässigen Belastung des Fadens betrug nur ca. 2 Proz.

Ein ähnlicher Verlauf der Abhängigkeit ergab sich auch für andere Röhren. Über die Ursache der Wellenlängenänderung ist auf Grund des vorliegenden Versuchsmaterials noch nichts zu sagen. Jedenfalls können wir feststellen, daß innerhalb weniger Prozent die Schwingungszahl unabhängig vom Emissionsstrom ist¹), so daß bei den folgenden Betrachtungen über die Spannungsabhängigkeit dieser Einfluß nicht berücksichtigt werden braucht.

2. Um die Abhängigkeit der Wellenlänge von den Spannungen feststellen zu können, wurde so verfahren, daß die Gitterspannung konstant gehalten und die Außenelektrodenspannung verändert wurde.

a) In Fig. 11 ist die für Röhrentyp A berechnete Kurve stark ausgezogen eingetragen. Für die Berechnung wurde als Gitterradius r_1 infolge des quadratischen Gitterquerschnittes die kürzeste Entfernung von der Achse (Heizfaden) zum Gitter gewählt. Außerdem wurde der Spannungsabfall von ca. 8 Volt am Heizfaden dadurch berücksichtigt, daß Eg um $+4$ Volt und Ea um -4 Volt verändert wurden. Zum Vergleich sind dann die experimentellen Kurven für die Röhren A_1—A_4 beigefügt.



Abhängigkeit der Wellenlänge von der Außenelektrodenspannung

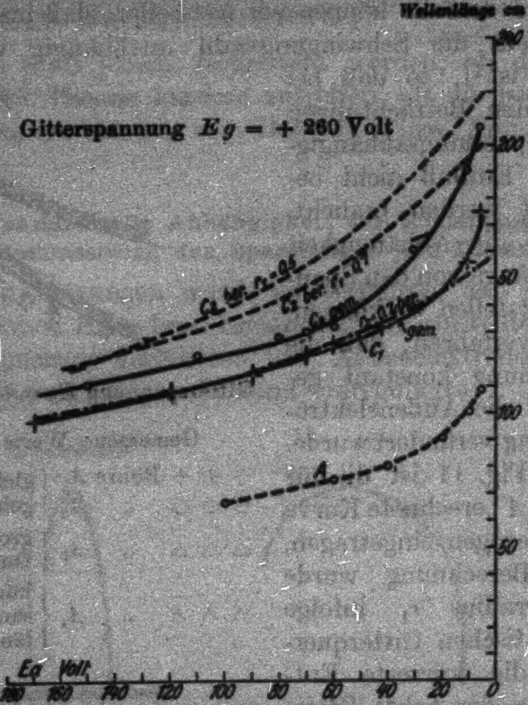
Fig. 11.

---

[1] Wesentlich für diesen Punkt war, daß die Röhre dauernd auf äußerstem Vakuum gehalten wurde. War diese Bedingung z. B. bei abgeschmolzenen Röhren nicht erfüllt, so wurde eine viel stärkere, aber nicht reproduzierbare Wellenlängenabhängigkeit vom Heizstrom festgestellt.

Die Röhren A_1 und A_2 waren einander möglichst gleich gebaut worden, wir sehen jedoch geringe Abweichungen der experimentellen Werte voneinander, da es ja technisch nicht möglich ist, genau gleiche Röhren zu bauen.

Röhre A_3 besaß im Gegensatz zu A_1 bzw. A_4 einen ca. dreimal so großen Durchgriff, Röhre A_4 dagegen nur $^3/_5$ der wirksamen Gitterlänge der drei anderen Röhren. Wir finden, daß auch die Werte dieser beiden Röhren nicht sonderlich von den mittleren Werten der beiden gleichgebauten Röhren abweichen.



Abhängigkeit der Wellenlänge von der Spannung der Außenelektrode.
Fig. 12.

Beim Vergleich der ber. und gem. Kurven ergibt sich, daß die Theorie den Verlauf der Wellenabhängigkeit sehr gut wiedergibt. In der Figur wurde noch der Wellenlängenverlauf eingetragen, wie ihn die Formel von Barkhausen und Kurz (S. 55) ergeben würde. Man sieht, daß unsere Formel (6) den Versuchsergebnissen besser entspricht als die von Barkhausen und Kurz.

b) Ebenso günstig fällt der Vergleich der theoretischen und experimentellen Kurve für Röhre C_1 in Fig. 12 (S. 74) aus. Der Gitterquerschnitt war sechseckig und als Gitterradius wurde in der Berechnung die Länge der Polygonseite von 0,7 cm eingesetzt. Auch hier stimmen gemessene und berechnete Werte fast überein.

Abweichender sind dagegen die Ergebnisse der Röhre C_2. Diese Röhre unterschied sich von C_1 dadurch, daß der Gitterquerschnitt quadratisch mit einer Seitenlänge von 1 cm war; außerdem war der Radius der Außenelektrode um 2,5 mm größer. Die Berechnung unter Einsetzung des kürzesten Gitterabstandes von 0,5 cm für r_1 ergibt, wie der Kurvenverlauf zeigt, zu große Werte, das ändert sich auch nur unwesentlich, wenn man den größten Gitterabstand von 0,7 cm einsetzt. Die Ursache der Abweichung muß darin liegen, daß infolge des großen quadratischen Gitterquerschnittes innerhalb der zylindrischen Außenelektrode das Feld schon so stark von der zylindrisch-symmetrischen Form abweicht, daß die Formel (6) nur noch annäherungsweise gilt.

Für die Diskussion dieser Formel und für den Bau der Röhren ergeben die berechneten Kurven der Röhrentype C jedoch verschiedenes Wichtige.

Aus den Kurven für C_2 ergibt sich, daß bei größerem Gitterradius (= 0,7 cm) die Wellenlänge kleiner als bei kleinerem Radius (0,5 cm) sein kann, so lange Ea noch nicht zu hohe Werte angenommen hat. Der Grund ist der, daß für beide Radien der Wert von

$$f(x) = f\left(\sqrt{\ln \frac{r_1}{r_0}}\right)$$

fast derselbe ist (0,58 und 0,59), daß dagegen

$$g(x) = g\left(\sqrt{\frac{Eg}{Eg - Ea} \ln \frac{r_2}{r_1}}\right)$$

bei geringem Unterschied der beiden Verhältnisse r_2/r_1 sich schon wesentlich ändert. (Beispiel: Für $Ea = -60$ ergibt sich:

$$r_1 = 0{,}5;\; g\,(x) = 2{,}15;\; \lambda = 168\text{ cm};$$
$$r_1 = 0{,}7;\; g\,(x) = 1{,}25;\; \lambda = 157\text{ cm.})$$

Der Vergleich der theoretischen Kurven von C_1 und C_2 bei einem Gitterradius $r_1 = 0{,}7$ cm zeigt, daß die geringe Änderung des Radius der Außenelektrode eine sehr starke

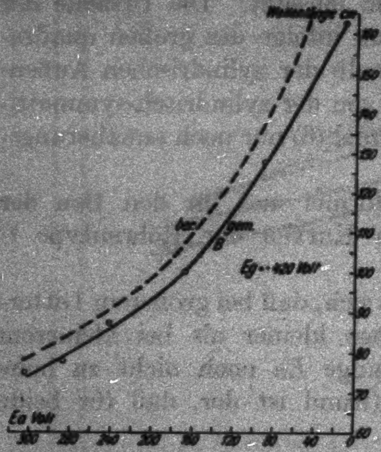
Änderung der Wellenlänge nach sich zieht, da wie vorher wiederum r_2/r_1 in $g(x)$ hauptsächlich für die Wellenlänge bestimmend ist. (Beispiel: $Ea = -60$ ergibt für

$$C_1: r_2 = 1{,}50 \text{ cm}; \; r_2/r_1 = 2{,}14; \; g(x) = 0{,}96; \; \lambda = 182 \text{ cm};$$

$$C_2: r_2 = 1{,}75 \text{ cm}; \; r_2/r_1 = 2{,}50; \; g(x) = 1{,}25; \; \lambda = 157 \text{ cm.})$$

Daraus geht hervor, daß es beim Röhrenbau hauptsächlich auf die Verringerung des Verhältnisses r_2/r_1 ankommt.

c) In Fig. 13 sind die Werte für die Röhre *B* eingetragen. *B* unterschied sich vom Typus *A* nur dadurch, daß ihr Außenelektrodenradius und somit das Verhältnis r_2/r_1 doppelt so groß war. Zur Untersuchung mußten als Gitterspannung 420 Volt benutzt werden, da bei kleineren Spannungen keine regelmäßigen Schwingungen auftraten; daher ist ein direkter Vergleich von *A* und *B* nicht möglich. Wir finden jedoch wiederum Übereinstimmung im Verlaufe der beiden Kurven und nur eine geringe Abweichung der absoluten Werte um 6—10 Proz.



Abhängigkeit der Wellenlänge von der Spannung der Außenelektrode.

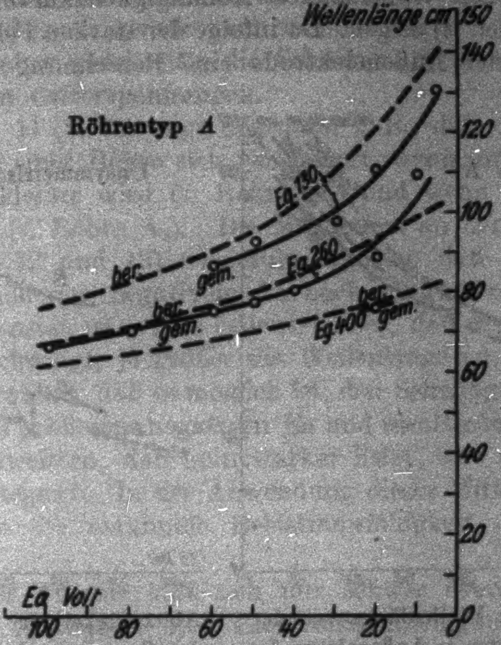
Fig. 13.

Es ergibt somit a) bis c) als Resultat, daß von der Theorie der Verlauf der Wellenlängenabhängigkeit von der Außenelektrodenspannung bei konstanter Gitterspannung gut wiedergegeben wird. Im folgenden Abschnitt soll der Einfluß der Gitterspannung bei konstanter Außenelektrodenspannung untersucht werden.

d) Zu diesem Zweck ist in Figg. 14 und 15 die Wellenlänge als Funktion der Spannung der Außenelektrode bei verschiedenen Gitterspannungen aufgetragen.

Fig. 14 für Röhre *A* zeigt, daß sich auch nach der Theorie die Wellenlänge mit der Gitterspannung bei konstanter Außenelektrodenspannung so ändert, wie es das Experiment ergab.

Für die Gitterspannung *Eg* = 400 Volt konnte nur bei einer einzigen Außenelektrodenspannung eine Wellenlängenmessung



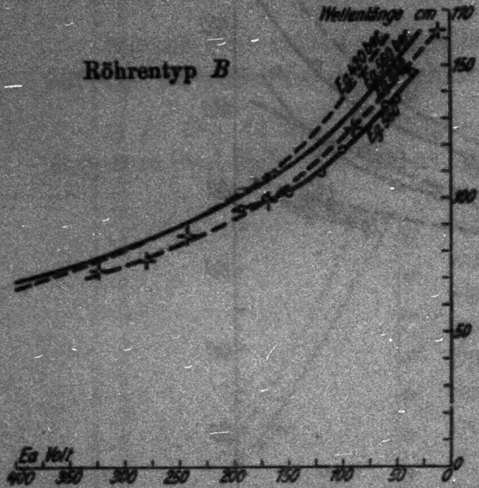
Abhängigkeit der Wellenlänge von der Spannung der Gitter- und der Außenelektrode.

Fig. 14.

vorgenommen werden, weil bei anderen Werten *Ea* die später zu besprechenden Schwingungen höherer Frequenz auftraten.

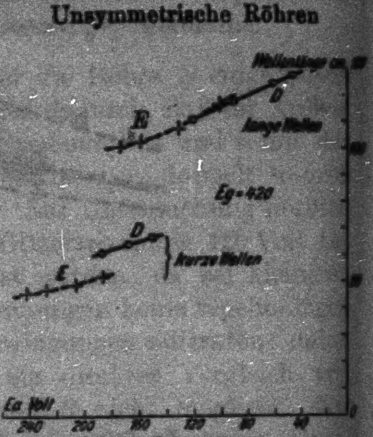
Fig. 15 für Röhre *B* gibt die Übereinstimmung der nach der Theorie zu erwartenden mit den gefundenen Resultaten noch besser wieder, insofern für hohe Gitterspannungen bei hohem *Ea* die Wellenlänge wieder zunimmt. Wir haben tatsächlich sowohl nach der Theorie wie nach dem Experiment ein bestimmtes *Ea*, bei dem die mit verschiedener Gitterspannung aufgenommenen Kurven sich schneiden.

e) Die Theorie der Schwingungserzeugung war nur für zylindrisch-symmetrische Röhren aufgestellt worden. Eine solche Symmetrie ist aber zur Schwingungserzeugung nicht notwendig, denn es ergaben auch Röhren, die zwar eine zylindrische Außenelektrode, aber ein exzentrisch gelegenes Gitter oder ein Gitter mit länglich rechteckigem Querschnitt besaßen, die Elektronenschwingungen, wie die mit den Röhren *D* und *E* aufgenommenen Wellenlängen-Abhängigkeitskurven in Fig. 16 („lange Wellen"!) zeigen. Da infolge der starken Feldverzerrung im Innern der Außenelektrode eine Berechnung der Wellenlänge unmöglich ist, so sei der Versuch hier nur erwähnt. Ich werde auf diese Röhren später noch einmal zurückkommen.



Abhängigkeit der Wellenlänge von der Spannung der Gitter- u. Außenelektrode.

Fig. 15.



Abhängigkeit der Wellenlänge von der Spannung der Außenelektrode.

Fig. 16.

§ 10. Die Schwingungsbereiche.

Während also die Theorie die Abhängigkeit der Wellenlänge von den Dimensionen und Spannungen befriedigend wiedergibt, kann sie ihrer Natur nach auf die Frage nach den Bedingungen, die das Einsetzen und Aussetzungen der Schwingungen regeln, keine Antwort geben, so daß wir hier auf das Experiment angewiesen sind.

Es ergab sich stets, daß die Röhren bei konstanter Gitterspannung nur innerhalb eines beschränkten Intervalles von *Ea* Schwingungen ergaben. Der Beginn dieses Intervalles lag bei *Ea* = ca. 0 Volt und das Ende bei einem mehr oder weniger hohen negativen *Ea*.

Die Kurven der vorhergehenden Figuren waren nun so aufgenommen worden, daß die Wellenlängen von einer Spannung *Ea* in der Nähe von 0 Volt bis zu dem negativen *Ea* verfolgt wurden, bei dem sie gerade noch meßbar waren. Die Kurven geben uns daher gleichzeitig die Schwingungsbereiche bei den verschiedenen Gitterspannungen.

Die Fig. 11 (S. 73) sagt uns dann z. B., daß der Schwingungsbereich einer Röhre sich verkleinert, wenn ihre wirksame Gitterlänge kleiner wird (s. Röhre A_4) und wenn der Durchgriff wächst (s. Röhre A_3). Die Messungen an den Röhren *C* und *B* (Fig. 12 und 13) wiederum ergeben, daß die Röhren bei um so höherem negativem *Ea* noch schwingen, je größer die Querdimension ist. Dies bedeutet aber, daß die Röhre um so leichter schwingt, je größer die Wellenlänge ist.

Es sei erwähnt, daß es möglich ist, den Schwingungsbereich dadurch nach größerem negativen *Ea* und somit nach kleineren Wellen zu erweitern, daß man stärker heizt, also die Energie der Wellen steigert. In der Anwendung dieses Mittels ist man jedoch durch die maximale Belastungsfähigkeit des Fadens beschränkt.

Nach der Theorie läßt sich nur schwer etwas über die Gründe des Aussetzens der Elektronenschwingungen sagen. Rechnet man einmal für die gefundenen unteren und oberen Grenzen der Schwingungsbereiche die Werte für $f(x)$ und $g(x)$ aus, so ergibt sich die Tabelle 6.

Tabelle 6.

Röhre	r_1 cm	r_2 cm	$f(x)$	$g(x)$ kürzeste → längste Welle	$g(x)/f(x)$	r_2/r_1
A	0,3	0,86	0,61	1,38 → 2,24	2,2 → 3,7	2,86
B	0,3	1,72	0,61	2,00 → 6,42	3,3 → 10,3	5,81
C_1	0,7	1,50	0,58	0,60 → 1,80	1,0 → 3,1	2,14
C_2	0,5	1,72	0,59	0,65 → 1,30	1,1 → 2,2	3,6

Nach der vorletzten Spalte war es nur bei einer Röhre möglich, durch Vergrößerung von *Ea* die Funktion

$$g(x) = g\left(\sqrt{\frac{Eg}{Eg - Ea}} \ln \frac{r_2}{r_1}\right)$$

auf denselben Betrag wie $f(x)$ zu bringen. Je größer das Verhältnis r_2/r_1 ist, um so größer wird scheinbar das kleinste zu erreichende $g(x)$, (Röhre C_2 ergibt kaum eine Abweichung davon). Die Tabelle läßt jedenfalls die Annahme zu, daß zur Aufrechterhaltung eines schwingungsfähigen Zustandes $g(x)$ größer $f(x)$ sein muß[1]), d. h., daß die Verweilzeit des Elektrons im Gitter-Außenelektrodenraum (prop. $g(x)$) immer ein Vielfaches von derjenigen im Glühkathoden-Gitterraum (prop. $f(x)$) ist.

Will man also möglichst kleine Wellen haben, so muß man, da sich nach der Tabelle $f(x) = f\left(\sqrt{\ln \frac{r_1}{r_0}}\right)$ mit r_1 kaum ändert (s. a. Fig. 8) $g(x)$ möglichst klein machen. Da nun mit Verkleinerung von $g(x)$ durch Vergrößerung von Ea bei einem bestimmten Ea die Schwingungen aussetzen, so muß man die Verringerung durch Verkleinerung von r_1 erhalten, wenn man dabei die anderen Dimensionen so ändert, daß die Röhre sich ähnlich bleibt (s. S. 71); andernfalls kann mit Verkleinerung von r_1 eine Vergrößerung der Wellenlänge eintreten (s. S. 75). Da der Verringerung der Dimensionen unter ein bestimmtes Maß aber technische Gründe entgegenstehen, so bliebe noch die Vergrößerung von Eg übrig, wenn nicht bei bestimmtem Ea mit der Vergrößerung von Eg auch eine solche der Wellenlänge eintreten könnte, wie wir an der Röhre B gesehen haben.

Durch all dieses würde also nur bewirkt, daß wir uns einer Grenze nähern, die wir nach kleinen Wellen zu nicht überschreiten können. Nun läßt uns aber gerade das Unvermögen, $g(x)$ nicht kleiner als $f(x)$ machen zu können, eine andere Hoffnung übrig.

Betrachten wir in der vorhergehenden Tabelle noch einmal das Verhältnis $g(x)/f(x)$, so erhalten wir Verhältniszahlen bis zu 10, d. h. die halbe Schwingungsdauer von der Kathode bis zum Umkehrpunkt des Elektrons gerechnet setzt sich aus zwei im Verhältnis 1 : 10 stehenden Teilen zusammen. Zeichnen wir uns z. B. für das Verhältnis 1 : 4 den Verlauf der Geschwindigkeit des Elektrons, das seine maximale Geschwindigkeit bei Passieren des Gitters hat, auf, so bekommen wir einen Kurvenzug gemäß Fig. 17.

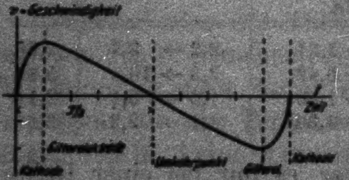


Fig. 17.

---

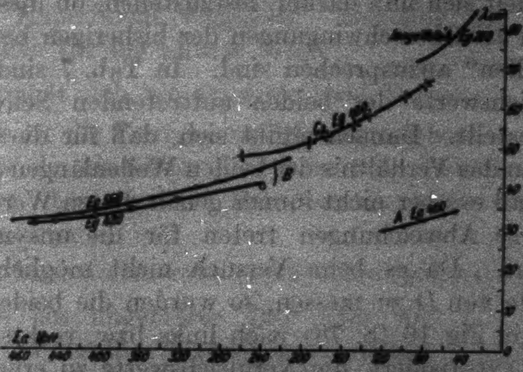
[1]) Versuche in dieser Hinsicht werden noch weiterhin angestellt.

Eine solche Kurvenform läßt aber das Auftreten von Schwingungen mit der doppelten Frequenz erwarten.

In der Tat zeigt sich, daß unter geeigneten Versuchsbedingungen Wellen „höherer Frequenz“ zu erhalten sind, wodurch die gewünschte Erweiterung des Schwingungsbereiches eintritt.

§ 11. Die Abhängigkeit der Schwingungen „höherer Frequenz“ von den Spannungen und Röhrendimensionen.

Das Aufsuchen dieser „kürzeren Wellen“ ist nicht ganz leicht, da die „längere Welle“ gewöhnlich mit auftritt und dann durch ihre meist viel größere Intensität das Messen der anderen unmöglich macht. Es hat sich jedoch gezeigt, wenn man den Heizstrom ganz allmählich bis zum schwingungsfähigen Zustand der Röhre steigert, daß die kleinere Welle etwas früher als die größere auftrat. Man erleichtert sich das Herangehen an den schwingungsfähigen Zustand sehr, wenn man im Gegensatz zum Verfahren beim Aufsuchen der „langen Wellen“ bei hoher negativer Spannung der Außenelektrode beginnt und diese dann allmählich verringert. Dadurch erhält man zuerst die „kürzere Welle“ bei einem bestimmten *Ea*, verstärkt man dann die Heizung, so tritt die „längere“ mit auf.



Abhängigkeit der „kurzen Wellen“ von der Spannung der Außenelektrode.

Fig. 18.

Es zeigte sich, daß bei diesen „kurzen Wellen“ die Abhängigkeit der Wellenlänge von den Spannungen und Strömen dieselbe wie bei den langen „Wellen“ war. In Fig. 18 sind die mit den Röhren *A*, *B*, *C* erzielten Kurven eingetragen. Auch hier finden wir eine Abnahme der Wellenlänge mit zunehmender Außenelektrodenspannung. Die für die Röhre *B* charakteristische Abweichung der Abhängigkeit der Wellenlänge von der Gitterspannung Eg bei hohem Ea war auch bei den „kurzen Wellen" zu finden. Wie die Figur zeigt, traten bei $Eg = 560$ Volt längere Wellen als bei $Eg = 420$ Volt auf.

In ihrer Konstanz, ihrer Unbeeinflußbarkeit durch äußere angeschaltete Kreise und in ihrer Reproduzierbarkeit verhielten sie sich genau so wie die „langen Wellen".

Die „kurzen Wellen" sind nach all diesen Messungen nicht das Produkt irgendwelcher Zufälligkeiten, sondern es kann mit ihnen genau so sicher wie mit den „langen Wellen" gearbeitet werden.

Es handelt sich nun darum, festzustellen, ob diese Schwingungen auch als Oberschwingungen der bisherigen betrachteten „langen Wellen" anzusprechen sind. In Tab. 7 sind eine Anzahl Vergleichswerte der beiden auftretenden Schwingungen zusammengestellt. Danach ergibt sich, daß für die symmetrischen Röhren das Verhältnis der beiden Wellenlängen annähernd 2 beträgt, daß es aber nicht immer genau diesen Wert hat. Besonders große Abweichungen treten für die unsymmetrische Röhre *D* auf. Da es beim Versuch nicht möglich war, die beiden Werte von *D* zu messen, so wurden die beiden Kurvenzüge für *D* in Fig. 16 (S. 78) nach links bzw. rechts bis $Ea = -130$ Volt extrapoliert, um Vergleichswerte zu erhalten, (was nach dem Kurvenverlauf statthaft ist).

Tabelle 7.

Röhre	λ_1 cm	λ_2 cm	λ_1/λ_2
A	95,00	47,50	2,00
B	89.40	47,72	1,87
B	74,70	37,04	2,02
F	338,70	166,50	2,04
E	100,00	52,00	1,92
D	108,00	70,00	1,54

Es ist daher vorläufig zweifelhaft, ob die „kurze Welle" als Oberwelle der „langen Welle" aufgefaßt werden darf, oder ob diese nicht durch einen ganz anderen Mechanismus entsteht. Für die Auffassung als Oberwelle spricht die Unsymmetrie in den Verweilzeiten der Elektronen in den beiden Elektrodenräumen, der zufolge Oberschwingungen von vornherein zu erwarten sind; dagegen spricht einerseits die Tatsache, daß die „kurze Welle“ allein gefunden wurde, ohne daß auch nur eine Andeutung der „langen Welle“ gleichzeitig vorhanden war, andererseits der Umstand, daß die „kurze Welle“ nicht immer die doppelte Frequenz der „langen Welle“ besitzt.

§ 12. Die Intensität der Wellen.

Über die Energie der „langen Welle“ kann die Theorie nichts aussagen, wir müssen uns bei Behandlung dieser Frage ganz aufs Experiment verlassen. Dasselbe gilt in noch erhöhtem Maße für die „kurze Welle“.

Es handelt sich um folgende zwei Fragen:

1. Wie ist die Energie im Schwingungsbereich einer Röhre über die einzelnen Wellen verteilt, hat die Energie bei einer bestimmten Betriebsbedingung vielleicht ein Maximum;
2. Wie kann die Energie der Schwingungen gesteigert werden?

1. Um ein ungefähres Bild über die Energieverteilung eines Schwingungsbereiches einer Röhre zu bekommen, verfuhr ich bei den Wellenlängenmessungen z. B. der Röhrentype *A* so, daß ich für das vierte Maximum einer jeden Welle auf dem Lecherschen Drahtsystem, die dadurch im Heizkreis des Brückenthermoelementes induzierte Stromstärke bestimmte.

In Fig. 19 ist der Intensitätsverlauf der am besten schwingenden Röhre A_1 als Funktion der Wellenlänge eingetragen. Die Änderung der Wellenlänge erfolgte durch Veränderung der Spannung der Außenelektrode bei einer Gitterspannung von 260 Volt. Die Figur zeigt einen unregelmäßigen Kurvenverlauf mit einem starken Maximum der Energie bei $\lambda = 90$ cm.

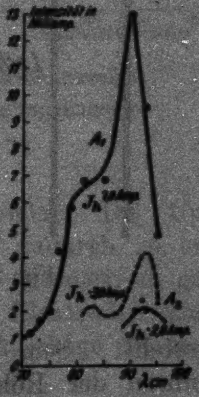


Fig. 19.

Zum Vergleich hierzu ist der mit Röhre A_3 (großer Durchgriff) unter denselben Bedingungen gewonnene Intensitätsverlauf eingetragen. Durch Steigerung des Heizstromes konnte dann der Schwingungsbereich für diese Röhre erweitert und die Energie erhöht werden (gestrichelter Kurvenzug).

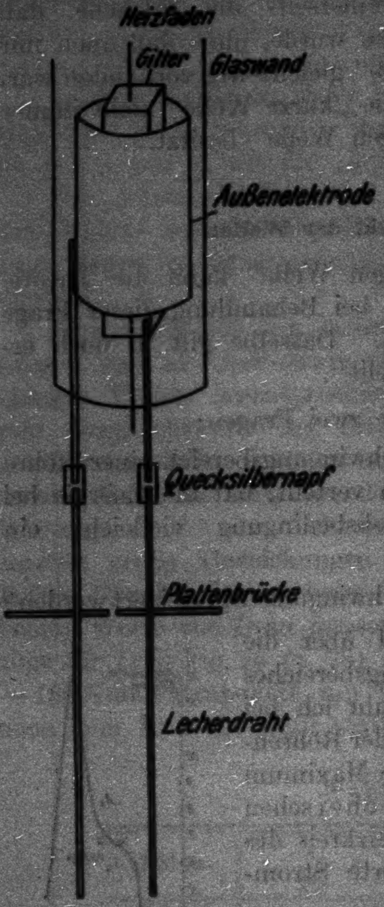


Fig. 20.

Ähnliche Kurven bekam ich bei Benutzung der Röhre A_4 (kleine Gitterlänge).

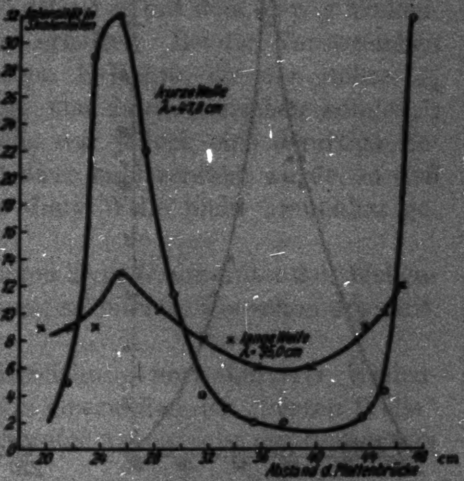
Eine Erklärung der eigenartigen Energieverteilung erhält man vielleicht dann, wenn man den Einfluß des Röhrensockels und der an ihm befestigten Antennen berücksichtigt. Beide bilden mit den Zuleitungen zur Röhre und der Röhrenkapazität ein schwingungsfähiges Gebilde, welches auf die Elektronenschwingungen verstärkend oder schwächend wirkt, je nach dem Verhältnis seiner Eigenschwingung zur Elektronenschwingung. Klarer und übersichtlicher wurden daher die Erscheinungen, als ich dieses komplizierte und unkontrollierbare Gebilde durch einen einfachen Resonanzkreis ersetzte, mit dem dann auch die Steigerung der Schwingungsenergie der Wellen gelang.

2. Dieser Resonanzkreis oder Resonator ist in Fig. 20 dargestellt. Sein Hauptmerkmal bestand darin, daß die im Innern der Röhre möglichst gerade und parallel geführten Elektrodenzuleitungen nach außen in Form eines Lecherschen Drahtsystems geradlinig weitergeführt wurden. Eine in der Mitte durchgeschnittene Plattenbrücke diente dann zum Abstimmen des Resonanzkreises. Die Zuleitungen für das Gitter

und die Außenelektrode wurden an dieser Brücke angelegt, so daß durch sie die Ausbildung von stehenden Wellen auf diesem System nicht gestört wurde. Die geradlinige Herausführung des Resonators aus der Röhre war wichtig, weil sonst an den Knickstellen störende Reflexionen der Wellen auftraten.

Der Einfluß des Resonators auf die Schwingungsenergie wurde nun in der Weise festgestellt, daß bei einer bestimmten eingestellten Elektronenschwingung der Röhre die Eigenschwingung des Resonators durch Verschieben der Plattenbrücke geändert wurde und als Maß der Schwingungsenergie wie auf S. 83 der Indikatorausschlag der auf die Elektronenschwingungen abgestimmten Meßbank aufgezeichnet wurde.

Der Intensitätsverlauf ist in Fig. 21 eingezeichnet, wobei als Abszisse die Entfernung der Plattenbrücke vom unteren Rand des Gitters als Maß für die Eigenschwingung des Resonators (= etwa $^1/_2$ Wellenlänge der Eigenschwingung) und als Ordinate der Ausschlag des Indikatorinstruments aufgetragen ist. Die Energie der ausgestrahlten Welle ist demnach stark von der Einstellung des Resonanzkreises abhängig. Die Unsymmetrie im Kurvenverlauf ist vermutlich dadurch zu erklären, daß der Resonator selbst nicht völlig symmetrisch gebaut war, da z. B. die Zuleitungen von den Elektroden zum äußeren Teil des Resonators in ihrer Länge um einige cm verschieden waren.



Einfluß des Resonanzkreises auf die Schwingungsenergie.

Fig. 21.

Die Wirkungsweise des Resonators wird so zu erklären sein, daß die Plattenbrücke die Wellen, die von dem Gitter und der Außenelektrode aus auf dem Resonator entlang laufen, reflektiert, so daß es bei günstiger Stellung dieser Brücke zur

Ausbildung von stehenden Wellen kommen wird. Resonatoreigenschwingung und Röhrenschwingung sind dann aufeinander abgestimmt.

Verfuhr man bei der Aufnahme der Schwingungsintensität einer Röhre unter Benutzung des Resonators dagegen so, daß man die Resonatorbrücke an einer Stelle liegen ließ, — also

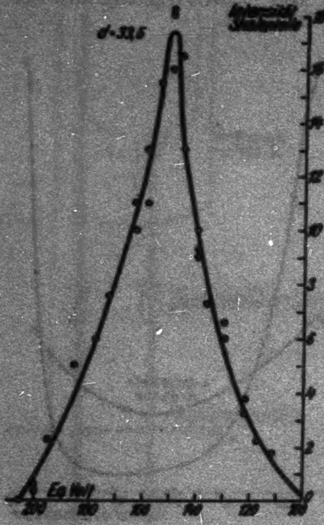
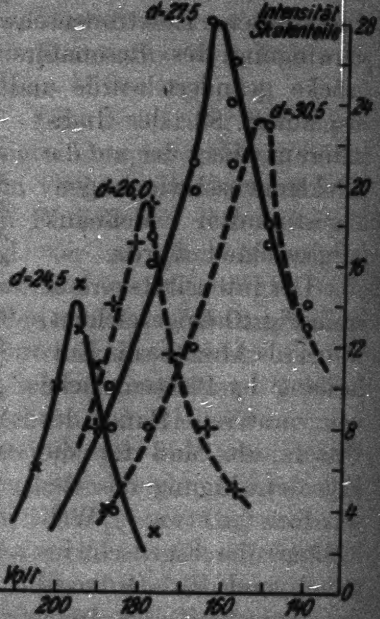


Fig. 22.



Intensitätsverteilung für verschiedene Resonatoreigenschwingungen (*d*).

Fig. 23.

eine bestimmte Eigenschwingung des Resonators einstellte —, und nun wie früher durch Variieren der Spannung der Außenelektrode die Wellenlänge veränderte und die Energie eines bestimmten Maximums einer jeden Welle maß, so erhielt man eine Intensitätsverteilung, wie sie Fig. 22 wiedergibt. Die Kurve hat jetzt im Gegensatz zu Fig. 19 einen regelmäßigen Verlauf mit einem scharfen Maximum. Dieses zeigt an, daß jetzt die Elektronenschwingung auf die Eigenschwingung des Resonators abgestimmt ist.

In Fig. 23 sind für verschiedene Resonatoreigenschwingungen, — bestimmt durch den Abstand der Plattenbrücke vom unteren Brückenrand —, die Intensitätskurven eingetragen, die sich gemäß Fig. 22 beim Abstimmen der Röhrenschwingungen ergaben. Wir sehen, daß unter sonst gleichen Bedingungen für jede Resonatorschwingung eine günstigste Elektronenschwingung gefunden werden kann.

In dem Resonator ist uns also ein Mittel gegeben, die Elektronenschwingung zu verstärken.

§ 13. Die längsten und die kürzesten Wellen.

Die vorhergehend besprochenen Messungen waren mit drei Röhrentypen *A*, *B*, *C* ausgeführt worden. Unter Ausnutzung der „kurzen Wellen" gelang es mit dem Typ *A* Wellenlängen knapp unter 30 cm zu erhalten. Bei den Vorversuchen habe ich mit der Schottschen K-Röhre, die der Röhre A_4 sehr ähnelte, eine Wellenlänge von 24 cm erreichen können.[1]) Zur Erzielung der 24 cm-Welle war jedoch eine derartige Belastung der Röhre nötig, daß diese bald zerstört wurde, so daß also für praktische Versuche diese Welle nicht brauchbar gewesen wäre.

Der Bau einer noch kleineren Type *G*, um unter den Wellenbereich der Type *A* zu kommen, scheiterte, wie schon erwähnt, aus technischen Gründen.

Ein anderer Weg zur Erreichung noch kürzerer Wellenlängen wäre das Aufsuchen von Oberwellen der „kurzen Welle" gewesen. Ich fand jedoch auch unter Ausnutzung des Resonators keine.

Nach dem Bereich der langen Wellen hin wurde durch Bau einer großen Röhre *F* eine Wellenlänge von 333,70 cm leicht erreicht. Die Röhre besaß dieselbe Außenelektrode wie *B* bzw. wie *C*, der Gitterradius dagegen war ungefähr doppelt so groß wie bei C_1.

Wir sind durch die Röhren *A*, *B*, *C*, *F* somit in die Lage versetzt, Wellenlängen zwischen 30 und 300 cm herstellen zu können. Durch die langen Wellen gelangen wir in das Gebiet der 3 m-Wellen, das Holborn[2]) mit Hilfe der Resonanzschaltung zweier Röhren erreichte, indem er von den längeren Wellen bis herab zur 2,4 m-Welle schritt.

---

[1]) In einer während des Druckes dieser Arbeit erschienenen Abhandlung von Cl. Schäfer (Zschr. f. Physik, XIII, 1923, 166) wurde als die kürzeste von ihm erreichte Welle eine solche von 34 cm angegeben.

[2]) Holborn, Zschr. f. Physik, VI, 1921, 328.

§ 14. Zusammenfassung.

1. Es wurden Senderöhren mit zylindrischer Außenelektrode gebaut, die nach der Methode von **Barkhausen** und **Kurz** innerhalb eines Wellenbereiches von 330—30 cm genügend starke und in ihrer Frequenz sehr konstante, von außen wenig beeinflußbare Schwingungen ergaben. Bei sämtlichen Röhren traten zwei verschiedene Wellen auf, deren Länge nahezu, aber nicht immer genau im Verhältnis 1 : 2 stand.

2. Für die zylindrisch-symmetrische Elektrodenanordnung wurde die Berechnung der Wellenlänge durchgeführt und an den Meßresultaten wurde gezeigt, daß die Formel den wirklichen Verlauf der Abhängigkeit der Wellenlänge von den Spannungen der Außen- und Gitterelektrode und den Dimensionen gut wiedergibt.

3. Es zeigte sich, daß die Wellenlänge praktisch nur von den Röhrendimensionen und verwandten Spannungen abhängt und durch andere Einflüsse, wie etwa den Heizstrom oder äußere Schwingungskreise nur unwesentlich oder gar nicht verändert wurde.

Die Energie dagegen wurde stark durch solche Schwingungskreise beeinflußt, es wurde daher ein einfacher mit der Röhre direkt verbundener Resonanzkreis konstruiert, der gestattete, die von der Röhre abgegebene Energie wesentlich zu erhöhen.

Die vorstehende Arbeit wurde im Physikalischen Institut der Universität Jena ausgeführt. Von großem Wert war mir beim Bau der Röhren die Unterstützung der Firma **Schott** & **Gen.** Die **Helmholtz-Gesellschaft** lieferte die Quecksilberfüllung für die Pumpen und das Manometer; die Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft stellte die Hochspannungsbatterien und eine besonders starke Heizbatterie zur Verfügung. Für diese Förderung bin ich den Beteiligten daher zu großem Dank verpflichtet.

Es ist mir eine ganz besondere Ehre, Herrn Geheimrat Prof. M. **Wien** und Herrn Prof. H. **Busch** für die Anregung zu dieser Arbeit und die äußerst liebenswürdige und wertvolle Unterstützung dabei vielmals zu danken. Desgleichen danke ich Herrn Prof. K. **Foersterling** für viele Ratschläge und Herrn Prof. **Schumann** (Technisch-Physikalisches Institut) für die freundliche Überlassung von Tabellen und einigen Apparaten.

(Eingegangen 17. Juli 1923.)

5. *Über die Lichtfortpflanzung im Himmelsraum;*
von P. Lenard.

In einer unter dem Titel „Über Äther und Uräther“ erschienenen Abhandlung[1]) habe ich einen nach gegenwärtiger Kenntnis möglich erscheinenden Ausweg angegeben aus den Schwierigkeiten, welche durch die scheinbare Unvereinbarkeit von Aberration, Michelsonversuch, Doppelsternbeobachtungen und Welleneigenschaften des Lichtes für die Ätherphysik entstanden waren. Der Ausweg führte weg von der nur mathematisch formelmäßigen, auf physikalisches Denken verzichtenden Behandlungsart des Gegenstandes (Relativitäts„theorie“), mit welcher man mangels anderer Lösung glaubte sich begnügen zu müssen; er wollte zurückführen zu wirklicher Naturforschung, die, von einfachen Gedanken ausgehend, aus der Beobachtung zu ergründen sucht, wie die Dinge der Außenwelt — im vorliegenden Falle der Äther — beschaffen sind. Lange belehrt durch die Geschichte der Wissenschaft und stets eingedenk der unvermuteten Überraschungen, die die Natur dem Beobachter immer wieder geboten hat und die zuletzt stets Vereinfachung des Denkens bedeuteten, sollte die Naturforschung auf bloße Vermutungen oder „Theorien“ um so weniger Wert legen, je verwickelter, erfahrungsleerer — und etwa gar zugleich weitausschweifender — sie erscheinen.

Gerade bei einem des Unbekannten so offenbar vollen Untersuchungsgegenstand, wie dem Äther, darf der Naturforscher ganz besonders dessen sich bewußt sein, daß seine Arbeit nächst der Beobachtung in der Herstellung möglichst einfacher, willkürliche Hinzufügungen vermeidender Bilder vom Verhalten des zu Untersuchenden bestehen muß, die solange abzuändern und durch hierbei angeregte neue Beobachtungen zu verbessern sind, bis es endlich den Anschein gewinnt, daß weitere Beobachtungen kaum mehr Überraschungen bringen dürften. Wir sind heute beim Äther noch weit entfernt von letzterem Stande, wir befinden uns vielmehr vielleicht noch sehr am Anfang eines langen Weges dahin, auf dem es erlaubt sein kann gelegentlich Umschau zu halten.

---

[1]) Zuerst erschienen in **Starks** Jahrbuch v. 1920; ausführlicher gesondert bei S. **Hirzel**, Leipzig 1922, 2. Aufl. Im folgenden kurz als „Ä. u. Urä.“ zitiert; Seitenzahlen nach der 2. Aufl.

Längs- und Quereigenschaften der Lichtquanten. — Es sind zwei Beobachtungsergebnisse aus der letzten Zeit, die ich jetzt in das in der vorgenannten Abhandlung entworfene Bild vom Äther einfügen möchte, wodurch es bestimmtere Form annimmt als nach dem früheren Stande der Erfahrung sein konnte, wo noch andere Möglichkeiten offen zu lassen waren. Es soll dabei hier stets nur das Verhalten der Lichtquanten in von Materie freiem Raum betrachtet werden.1) Die Lichtquanten selbst fassen wir als kohärente elektromagnetische Wellenzüge von bestimmter Wellenlänge und bestimmtem Energiegehalt auf.2) Jedem Himmelskörper schreiben wir seinen eigenen Äther zu, der ihn ähnlich einer verwaschen begrenzten Atmosphäre umgibt3); außerdem nehmen wir einen

---

1) Zu dem in „Ä. u. Urä.“ bereits behandelten Verhalten in materiellen Medien ist bis jetzt neue Erfahrung nicht bekannt geworden; wir weisen daher im vorliegenden nur gelegentlich in Fußnoten auf einige hierzu gehörige Stellen in der genannten Abhandlung hin.

2) Siehe „Ä. u. Urä.“ S. 25ff. Daß die Lichtquanten, welche von den Quellen des Lichts, den Atomen, einzeln und mit bestimmtem Energieinhalt emittiert werden, auf ihren weiteren Wegen weder einzeln, getrennt bleiben müssen, noch auch Zerstückelungen, Spaltungen und Energieänderungen entgehen, kurz, daß sie im allgemeinen ihre Besonderheit nicht dauernd beibehalten, ist nach heutiger Erfahrung nicht zu bezweifeln. Das Wesentliche unserer Betrachtungen tritt aber am besten hervor, wenn wir sie an einzelne Lichtquanten von bestimmt vorgegebenem Energieinhalt knüpfen, wie das im vorliegenden geschehen soll. Über die Verschmelzung von Lichtquanten bzw. den Nachweis von Wellenfronten großer Breite siehe „Ä. u. Urä.“, S. 26 u. 29; über Unterteilung von Lichtquanten siehe C. Ramsauer, Ann. d. Phys. 64. S. 750. 1921.

3) Über die Abstände, bis zu welchen beispielsweise der Äther der Erde über deren Oberfläche zu gegebenen Bruchteilen merklich sich erstreckt, ist nichts bekannt. Hr. St. John findet auf dem 1731 m hohen Wilsonberg in Kalifornien positiven Ausfall des Michelsonversuchs mit dem Betrage von $^1/_{10}$ der Streifenverschiebung, die bei voller Relativbewegung der Erde mit Bahngeschwindigkeit gegen den Äther zu erwarten wäre (The Observatory 45. S. 211. 1922). Man könnte dies als ein Zeichen bereits in jener Höhe merklicher Abnahme des Äthers der Erde auffassen; doch werden in so wichtiger Frage weitere Beobachtungen abzuwarten

allgemein verbreiteten Uräther an, der — im Gegensatz zum Äther — an den Bewegungen der Himmelskörper nicht teilnimmt.[1])

Die beiden Beobachtungsergebnisse sind:

1. Die nun wohl unzweifelhaft festgestellte, schon von J. Soldner berechnete Lichtstrahlablenkung am Sonnenrand, die — ihrer beobachteten Größe nach — einer Schwerewirkung auf die Lichtquanten soweit entspricht, als man etwa erwarten kann.[2])

2. Der negative Ausfall des von Hrn. R. Tomaschek kürzlich durchgeführten Michelsonversuches mit Sonnen-, Mond-, Planetenlicht nicht nur, sondern auch, was besonders wichtig ist, mit Fixsternlicht.[3])

Das nun entstehende Gesamtbild der augenblicklichen Kenntnis fordert wieder die schon früher eingeführte Unterscheidung zwischen Längs- und Querverhalten der Lichtquanten, welche beiden offenbar gesondert zu betrachten sind.[4])

Die Längsbewegung, d. i. die Bewegung in Richtung der Wellenfront, geht mit der bekannten Lichtgeschwindigkeit c vor sich, wobei es sich nur um die Frage handelt, relativ wozu diese Geschwindigkeit zu rechnen sei. Hier hat die neue Erfahrung gezeigt, daß c stets relativ zu demjenigen Äther gelte, in welchem das Lichtquant zurzeit läuft. Es ist somit jedesmal eine Änderung der Lichtgeschwindigkeit beim Übergang von

---

sein, beispielsweise auch die Durchführung elektrischer Versuche — wie des Röntgenschen mit dem zu suchenden Magnetfeld eines geladenen Kondensators — auf möglichst hohen, möglichst alleinstehenden Berggipfeln.

[1]) Eingehenderes s. w. unten und auch bereits in „Ä. u. Urä.“ S. 21ff.

[2]) Die Mitwirkung der Lichtbrechung in der Sonnenatmosphäre erschwert das Urteil; vgl. hierüber Ann. d. Phys. 65. S. 593 u. 594. 1921 und „Ä. u. Urä.“ S. 43.

[3]) Siehe R. Tomaschek, Astronom. Nachr. 5251 und eine gleichzeitige Abhandlung in diesen Ann. Die Untersuchung ist mit Unterstützung durch die Notgemeinschaft der Wissenschaft ausgeführt worden, wofür auch an dieser Stelle besonderer Dank ausgesprochen sei.

[4]) Vgl. „Ä. u. Urä.“, Noten S. 27 u. 31; nur daß dort die negativen Aberrationserfahrungen an bewegten Himmelskörpern, die wir im hier weiter folgenden hinzunehmen, noch nicht berücksichtigt sind.

einem Äther in einen anderen, anders bewegten, anzunehmen. Im besonderen ist dies auch der Fall, wenn Lichtquanten außerirdischer Lichtquellen in den Äther der Erde gelangen; sie nehmen dann Lichtgeschwindigkeit relativ zu letzterem, das ist relativ zur Erde an und sie verhalten sich daher im Michelsonversuch gleich irdischen Lichtquanten, die von vornherein diese Geschwindigkeit hatten. Wir begründen und erläutern diese Auffassung vom Längsverhalten der Lichtquanten eingehender im nächsten Abschnitt.

Das Querverhalten der Lichtquanten, d. i. ihr Verhalten gegen Bewegung in Richtung senkrecht zur Wellenlänge, hängt in ganz anderer Weise mit dem Medium zusammen, als die Längsbewegung. Wir schließen dies aus dem Statthaben der astronomischen Aberration, die in unserer Auffassung zeigt, daß die Lichtquanten der außerirdischen Lichtquellen auch nach ihrem Eindringen in den Äther der Erde keine Querbewegung von letzterem annehmen. Ganz unbeeinflußbar sind aber dennoch die Lichtquanten in bezug auf Querbewegung nicht; dies wird daraus klar, daß keine anderen Aberrationen beobachtet worden sind, als die aus der Bewegung der Erde folgenden. Nehmen wir beispielsweise an, ein ferner Doppelstern führe eine kreisende Bewegung aus und es befinde sich die Erde nahe seiner Bahnebene. Bei der Bewegung des Sterns senkrecht zur Gesichtslinie kann angenommen werden, daß die gegen die Erde hin laufenden Lichtquanten des Sterns die Querbewegung desselben mit sich fortnehmen, da sie im Äther des Sterns entstanden sind. Besäßen sie diese Querbewegung auch noch bei ihrer Ankunft im Beobachtungsfernrohr der Erde, so würde dies eine Aberrationsverschiebung am Stern zur Folge haben, die bei der recht großen Umlaufsgeschwindigkeit mancher Doppelsterne sehr auffallend sein müßte¹), von deren Auftreten aber nichts bekannt ist. Man muß danach annehmen, daß die von der Lichtquelle stammende Querbewegung der Lichtquanten auf deren Wegen im Uräther

---

1) Es würde z. B. merkliche Winkeltrennung der beiden Komponenten eines genügend schnell umlaufenden Doppelsterns gerade dann eintreten müssen, wenn Fehlen von Spektrallinienverdoppelung das Gegenteil erwarten ließe, nämlich wenn Erde und die beiden Sternkomponenten nahe in einer geraden Linie sich befinden.

früher oder später zum Verschwinden kommt.[1]) Da auch bei den Planeten unseres Sonnensystems, wie Merkur oder Venus, nichts von Aberrationen bekannt ist, die in dem soeben betrachteten Sinne von den genügend schnellen Eigenbewegungen dieser Planeten herrührten, muß auch innerhalb des Sonnensystems der die Querbewegung wegnehmende Uräther als vorhanden und wirksam angenommen werden. Es ist dies in Übereinstimmung mit der Annahme, daß der Uräther überall vorhanden ist, auch in den Räumen, die zugleich den Äther von Materie enthalten. Wie schnell eine von der Lichtquelle stammende Querbewegung im Uräther verschwindet, ist unbekannt.[2])

Sind die Lichtquanten dem Einfluß der Schwerkraft ausgesetzt, so erleiden sie in bezug auf Querbewegung diejenige Veränderung, welche nach Maßgabe ihrer Masse und einer dieser proportionalen Gravitation zu erwarten ist.[3])

---

[1]) Hiermit wird die Aberration insofern zu einer *absoluten* Erscheinung, als sie zwar von der Querbewegung des Beobachters, nicht aber von der der Lichtquelle abhängig ist, und dies ist sehr bemerkenswert. Die astronomische Erfahrung läßt in der Tat die Aberration durchaus nur als Folge der Erdbewegung relativ zum Uräther, *nicht relativ zur Lichtquelle*, also als eine Folge und somit auch als Kennzeichen von *Absolutbewegung* erscheinen. Bemerkbar können zwar durch die Beobachtungen nur Unterschiede von Aberrationen werden, diese Unterschiede (z. B. die gewöhnliche jährliche Aberration von 2·20″) entsprechen aber eben doch zeitlichen Unterschieden in der *Absolutbewegung* der Erde, nicht in irgendeiner Relativbewegung derselben.

[2]) Reicht der Abstand des Mondes von der Erde nicht aus, um die bei der Reflexion des Sonnenlichtes vom Monde etwa dem Mondlicht mitgeteilte Querbewegung des Mondes — das ist seine Bahnbewegung — wegzudämpfen, so würde die oben gedachte Aberration infolge Eigenbewegung der Lichtquelle beim Monde ganz oder teilweise wirksam werden. Es wären dann die in der Astronomie üblichen Aberrationskorrektionen — die darauf keine Rücksicht nehmen — für den Mond nicht genau richtig. Es wäre zu untersuchen, ob nicht etwa geringe Unstimmigkeiten in der Vorausberechnung der Mondbewegung, auf die man manchmal hingewiesen findet, dieses Ursprungs sind. — Eine experimentelle Untersuchung der Lichtquanten von querbewegten Lichtquellen soll an Kanalstrahlen erfolgen (vgl. verwandte Fragen in bezug auf Längsbewegung in „Ä. u. Urä.“ S. 28).

[3]) Es ist dies der alte Gedanke von Soldner aus dem Jahr 1801. Siehe Ann. d. Phys. 65. S. 593. 1921 und „Ä. u. Urä.“ S. 43. Er kann durch die Erfahrung als bestätigt angesehen werden, wie bereits oben

Es verhalten sich also Lichtquanten im materiefreien Raum, soweit bisher zu sehen, in bezug auf Längsbewegung stets wie Wellenzüge, die eine relativ zum Medium vorgegebene Geschwindigkeit einhalten, in bezug auf Querbewegung aber nur wie träge Massen, die mit dem die Längsgeschwindigkeit bestimmenden Medium weit weniger zu tun haben, vom Uräther aber doch reibungsähnliche Kräfte erfahren, welche von der Lichtquelle stammende Quergeschwindigkeiten vernichten. Die Eigenschaft, mit Wellengeschwindigkeit zu laufen, ist nichts Besonderes, da Licht schon lange genügend sicher als Wellenerscheinung bekannt ist. Aber auch das Querverhalten, die Masseneigenschaft, ist nichts Besonderes; sie gehört einfach dem Energieinhalt E des Lichtquants zu, der nach Hasenöhrls Beziehung bei allen Energieformen die Masse $m = E/c^2$ besitzt¹), welche Masse natürlich auch in bezug auf Längsbewegung wirksam ist, und ebenso ist auch die dieser Masse proportionale Gravitation nichts Besonderes mehr, seit durch die Beobachtungen von Galilei, Newton, Bessel, Eötvös und neuerdings besonders auch Zeeman die allen Massen, auch den Energiemassen stets proportional zugeordnete Gravitation außer Zweifel gestellt ist.²)

Man kann somit dieses Bild vom Verhalten der Lichtquanten außerhalb der Materie³) wohl als einfach und über-

---

angegeben. Den noch nicht erfahrungsmäßig verfolgten Einfluß von Schwere in Längsrichtung der Lichtquanten behandeln wir im letzten Abschnitt des Vorliegenden.

1) Siehe „Ä. u. Urä.“ S. 41, 42 u. 46. Es ist dort auch ersichtlich gemacht, daß jene Massengleichung der Energie ganz zu Unrecht als ein besonderes Ergebnis der Relativitäts„theorie“ hingestellt wird, von der sie in Wirklichkeit völlig unabhängig ist.

2) Siehe „Ä. u. Urä.“, S. 43, 44.

3) In materiellen Medien ist die Längsbewegung in bekannter Weise durch den Brechungsexponenten bestimmt. In „Ä. u. Urä.“ (S. 44ff.) ist gezeigt, daß die Geschwindigkeitsänderung beim Übergang von einem materiellen Medium in ein anderes mit einer Massenänderung des Lichtquants verbunden erscheint — durch Aufnahme von Zusatzmasse aus dem Medium —, welche sowohl dieser Geschwindigkeitsänderung, als auch dem Lichtdruck an der Grenzfläche entspricht. Was den Einfluß von Bewegung eines materiellen Mediums anlangt, so gilt der Fresnelsche Mitführungskoeffizient (s. „Ä. u. Urä.“ S. 45, 46).

sichtlich und — wenn die Unterscheidung zwischen Längs- und Querverhalten einmal getroffen ist — fast als selbstverständlich bezeichnen. Freilich ist dabei zu bedenken, daß die Erfahrung, auf Grund deren das Bild gebaut ist, immer noch ärmlich ist. Dafür bietet aber das Bild neue Anhaltspunkte zum Einsammeln weiterer Erfahrung durch neue Beobachtung, besonders astronomischer Art, worauf an mehreren Stellen des Vorliegenden hingewiesen ist.

Da die Lichtquanten elektromagnetische Wellenzüge sind, so wird man in relativ zum Beobachter ruhendem Äther Gültigkeit der Maxwellschen Gleichungen für dieselben insoweit erwarten dürfen, als es sich um Eigenschaften handelt, die auch bei einer Quervereinigung sehr vieler Lichtquanten sich finden; denn eine solche Quervereinigung ist erfahrungsmäßig gleich zu setzen dem Wellenzug eines Hertzschen Oszillators, bis auf Unterschiede der Wellenlänge. Eine solche, ebengedachte Eigenschaft elektromagnetischer Wellenzüge ist diese, daß Wellenfront (Fläche der elektrischen und magnetischen Kraftlinien) und Fortpflanzungsrichtung (Energieweg) stets senkrecht aufeinander stehen. Nimmt man diese Eigenschaft für die Lichtquanten an, so folgt beim Auftreten von Querbewegung stets eine Drehung der Wellenfront, so daß diese senkrecht zur Gesamtbewegung des Lichtquants sich stellt, und es ist dann diese Gesamtbewegung, welche mit der Lichtgeschwindigkeit c relativ zum umgebenden Äther vor sich geht. So würden die Lichtquanten ferner Sterne, die — wie wir sahen — ohne Querbewegung relativ zum Uräther aus diesem zur Erde kommen, beim Eintritt in den Äther der Erde eine Drehung der Wellenfront erleiden müssen, da sie relativ zum Äther der Erde Querbewegung haben. Nach dieser Drehung ist die Querbewegung als solche verschwunden und nicht mehr zu betrachten und es ist dafür das Lichtquant um den Aberrationswinkel aus seiner ursprünglichen Richtung abgelenkt. Es würde dann das Fixsternlicht nichts von Aberrationseigenschaften an sich haben im Vergleich zu irdischem Licht, noch auch wäre die Aberration ein Vorgang, der im Fernrohr des Beobachters zu überlegen sei (wie es gewöhnlich geschieht), sondern die Aberration bestünde in einer Krümmung des vom Stern kommenden Strahls bei seinem Eintritt in den Äther der Erde, so daß der Strahl schon in Aberrationsrichtung das Fernrohr erreicht.[1])

Erfahrungen über die Längsbewegung der Lichtquanten. — Die Längsbewegung zeigt die Eigenschaft einer Wellenfortpflanzung dadurch, daß sie mit veränderter Geschwindigkeit vor sich geht, je nach dem Medium, das durchlaufen wird. Dieses Verhalten ist von den materiellen Medien her wohlbekannt; daß wir Ähnliches auch in dem von Materie freien Himmelsraum anzunehmen haben, sei im folgenden noch besonders — an Hand der Erfahrung — begründet.

Der bekannte Michelsonversuch mit irdischer Lichtquelle zeigt in einfachster Auffassung an, daß die Lichtquanten der irdischen Lichtquellen mit Lichtgeschwindigkeit relativ zur Erde laufen (nicht relativ zu einem Äther, durch welchen die Erde sich hindurchbewegte).[2]) Dementsprechend darf man annehmen, daß auch die von anderen Himmelskörpern ausgehenden Lichtquanten in der Nähe dieser Himmelskörper relativ zu diesen mit Lichtgeschwindigkeit weglaufen, und daß dies auch von den Lichtquanten einer Doppelsternkomponente gilt. Die Doppelsternbeobachtungen[3]) zeigen nun aber, daß die Lichtquanten einer Doppelsternkomponente auf dem allergrößten Teil ihres Weges bis zur Erde nicht Lichtgeschwindigkeit relativ zu ihrem wechselnd bewegten Ursprungsstern, sondern absolute, von der Bewegung dieses Sterns unabhängige

---

1) Zwei andere Möglichkeiten, besonders in bezug auf Spiegelung von Aberrationslicht findet man in Hrn. R. Tomascheks gleichzeitiger Veröffentlichung in diesen Annalen betrachtet.

Eine der hier beim Eintritt in den Äther der Erde angenommenen Strahlenkrümmung entsprechende Krümmung kann auch beim Weggang des Sternlichts von dem relativ zum Uräther bewegten Stern angenommen werden als Folge der Wegdämpfung der vom Stern stammenden Querbewegung der Lichtquanten im Uräther. Während aber die Strahlkrümmung beim Eintritt in den Äther der Erde den beobachteten Sternort um den Aberrationswinkel verschiebt, hat die Strahlkrümmung beim Weggang vom Stern solche Wirkung nicht, da sie verhältnismäßig viel zu dicht beim Stern selbst erfolgt; es führt dies auf die schon hervorgehobene Absolutbedeutung der Aberration zurück.

2) Über die hier vorausgesetzte Unwirklichkeit der Lorentzkontraktion siehe „Ä. u. Urä.“, S. 39f.

3) Siehe über die hier gemeinten Doppelsternbeobachtungen „Ä. u. Urä.“ S. 32ff., wo auch der im oben folgenden aus diesen Beobachtungen gezogene Schluß bereits eingehend dargelegt ist.

Lichtgeschwindigkeit eingehalten haben müssen. Es muß also die Lichtgeschwindigkeit unterwegs, in dem von Materie freien Himmelsraum, eine Veränderung erlitten haben, und zwar muß diese Änderung schon in einem Abstand vom emittierenden Stern eingetreten sein, der klein ist gegen den Abstand des Doppelsterns von der Erde, da die Beobachtungen eine Abhängigkeit der Lichtzeiten von der wechselnden Bewegungsrichtung des Sterns überhaupt nicht bemerklich machen.

Da wir Gründe gefunden haben, jedem Atom seinen eigenen Äther zuzuschreiben, den es in seinem Innern und in seiner Umgebung mit sich trägt, wonach auch jeder materielle Körper, auch die Erde und jeder Stern, seinen eigenen Äther hat, der ihn wie eine verwaschen begrenzte Atmosphäre umgibt[1]), war es für uns natürlich, anzunehmen, daß dieser Äther das Medium ist, in welchem die vom Stern emittierten Lichtquanten mit der Lichtgeschwindigkeit *c* laufen. Denn dieser Äther ruht relativ zum Stern, so daß dann seine Lichtquanten auch relativ zu ihm mit Lichtgeschwindigkeit laufen, wie es der Michelsonversuch in bezug auf die Lichtquanten der Erde gezeigt hat.

Von dieser Vorstellung aus erscheint es leicht verständlich, daß die vom Stern weglaufenden Lichtquanten schließlich, wenn sie in Räume kommen, wo der Äther des Sterns fast verschwindet, ihre Geschwindigkeit relativ zu dem dort vorhandenen, nicht mehr zu dem Stern gehörigen und nicht mit ihm bewegten Medium einrichten, wodurch sie unabhängig von den Bewegungen des Sterns wird, wie es den Doppelsternbeobachtungen entspricht. Unsere bisherige Kenntnis des eben gedachten Mediums, das diese fern von allen materiellen Massen abliegenden Himmelsräume erfüllt, ist allerdings nahezu Null; sie besteht aber doch darin, daß die Doppelsternbeobachtungen das Dasein eines solchen, eine bestimmte, einheitliche, von Bewegungen ferner Himmelskörper unabhängige Lichtgeschwindigkeit schaffenden Mediums anzeigen. Ich habe dieses, die weiten Himmelsräume erfüllende Medium Uräther genannt.[2])

---

1) Siehe „Ä. u. Urä.“, S. 19.

2) Wie groß die Lichtgeschwindigkeit im Uräther ist, wissen wir in der Tat nicht; nur daß sie einheitlich, nämlich für die verschiedenen Bahnpunkte und die diesen zugehörigen verschiedenen Bewegungsrichtungen einer Doppelsternkomponente nicht verschieden ist, dies ver-

Die Annahme eines solchen Mediums, das außer dem Äther noch vorhanden und das allverbreitet ist, erscheint auch naheliegend, wenn man die Gravitation als vermittelte Fernkraft betrachten will; denn der Äther, welcher die elektromagnetischen Kraftfelder (und somit auch die Lichtquanten) ausmacht, kann schwerlich zugleich Vermittler der Gravitation sein schon deshalb, weil eben dieser Äther selbst der Gravitation unterworfen erscheint, sobald er Träger von Energie ist, die in allen ihren Formen der Gravitation unterworfen erscheint.[1]) Wie dem auch sei und wenn auch die Rolle, welche wir hier dem Uräther in bezug auf die Lichtgeschwindigkeit zuschreiben, vielleicht ebensogut dem Gesamtäther zugeschrieben werden könnte, welcher als Summe der zu allen Himmelskörpern in größeren Abständen gehörigen spärlichen Äthermengen in den Himmelsräumen angenommen werden kann[2]), so bleiben wir doch schon der Kürze und Deutlichkeit halber bei dem Namen Uräther für das hier auftretende, von den Bewegungen einzelner Himmelskörper nicht merklich beeinflußte Medium.

Wenn demnach die von fernen Sternen kommenden Lichtquanten mit Lichtgeschwindigkeit relativ zum Uräther zu uns heranlaufen, so war es bis vor kurzem noch eine offene Frage, ob sie diese Geschwindigkeit bis zur Erde hin beibehalten oder ob sie bei Eintritt in den Äther der Erde ihre Geschwindigkeit von neuem ändern und etwa Lichtgeschwindigkeit relativ zu diesem Äther, also auch zur Erde annehmen. Diese Frage ist jetzt durch Ausführung des Michelsonversuchs mit Fixsternlicht beantwortet worden und sie ist in letzterem Sinne entschieden, wodurch wir eben zur Voranstellung des oben be-

---

bürgen die Beobachtungen. Doch ist es nach den weiter unten folgenden Überlegungen — Lichtbrechung im materiefreien Raum betreffend — nicht wahrscheinlich, daß die Lichtgeschwindigkeit beim Übergang vom Äther des Sterns in den Uräther mehr als nur um die Relativgeschwindigkeit des Sterns zum Uräther geändert wird.

[1]) Siehe „Ä. u. Urä.", S. 47.

[2]) Geht man hierauf ein, so nähert man sich der von Hrn. Gehrcke bevorzugten Auffassung der Aberration (s. Drudes Optik, 3. Aufl. 1912 und D. Phys. Ges. 1918, S. 165 u. 1919, S. 67). Sieht man aber den Uräther als Vermittler der Gravitation an, so muß er auch in den Räumen als vorhanden angenommen werden, die gleichzeitig den Äther der einzelnen materiellen Körper enthalten. Wir nehmen hier — bis zu weiterer Belehrung durch die Erfahrung — das Letztere an.

trachteten allgemeinen Satzes über die Längsbewegung der Lichtquanten berechtigt wurden.[1]) Es laufen also im Äther der Erde alle Lichtquanten irgendwelchen Ursprungs relativ zu diesem Äther mit der Lichtgeschwindigkeit c[2]), ebenso auch alle Lichtquanten im Bereiche eines anderen Gestirns relativ zum dortigen Äther; von Gestirn zu Gestirn dagegen herrscht Lichtgeschwindigkeit relativ zum Uräther.

Lichtbrechung im Äther. — Die Geschwindigkeitsänderung der Lichtquanten beim Übergang von einem Äther in anderen, relativ zu ersterem in Strahlrichtung bewegten Äther muß mit einer Richtungsänderung des Strahls analog der Brechung in materiellen Medien verbunden sein, wenn die Grenzschicht schief zum Strahle steht. Es folgt dies nach dem Huyghensschen Prinzip. Wegen der Allmählichkeit des Übergangs ist diese Brechung in Gestalt einer Strahlenkrümmung zu erwarten. Da der wirksame Brechungsexponent $c/(c - u)$ ist, wenn u die in der Strahlrichtung genommene Komponente der Relativgeschwindigkeit ist, so würde die Ablenkung bei einem Einfallswinkel von 45° etwa 20″ betragen, wenn u von der Größe der planetarischen Geschwindigkeiten ist (30 km/sec). Dieser unter der Annahme einer scharfen Äthergrenze berechnete kleine Winkel wäre wohl das Höchstmaß der Ablenkungen, die bei Relativgeschwindigkeiten der angenommenen Größe eintreten könnten. Die Verwaschenheit der Äthergrenze muß die Ablenkungen wesentlich kleiner machen, und es sind auch bei beliebig schieferem Einfall keine größeren Winkel zu erwarten, da die bei der Berechnung der 20″ eingesetzte ganze Geschwindigkeitsdifferenz u nicht zur Geltung kommen kann, wenn eine Ätheratmosphäre nur streifend durchlaufen wird.

Es sollte auf das Bestehen oder Nichtbestehen solcher Ablenkungen bei astronomischen Messungen geachtet werden. Die Ablenkung könnte beispielsweise bei einem von der Erde aus beobachteten Fixstern wirksam werden, wenn sein Licht exzentrisch in den Äther des genügend schnell absolut bewegt gedachten Sonnensystems einfällt, wenn also etwa der Lichtstrahl in Richtung der Erdbahntangente verläuft.[1]) Ein anderer Fall möglichen Wirksamwerdens der gedachten Ablenkung wäre die Beobachtung eines Fixsterns exzentrisch durch die Ätherhülle eines in der Gesichtslinie befindlichen anderen Fixsternsystems, das Eigenbewegung in der Gesichtslinie hat. Es könnte dann die Ätherhülle wie eine Schliere wirken, die je nach der Bewegungsrichtung optisch dünner oder dichter als die Umgebung sich verhielte, oder wie eine flache und verwaschen begrenzte konvexe beziehlich konkave Linse, von der aber jeweils nur ein kleines prismatisches Flächenelement zur Benutzung gelangt.

---

[1]) Siehe die ausführliche Diskussion bei **Rudolf Tomaschek**, Astr. Nachr. 5251 und in der gleichzeitigen Abhandlung in diesen Ann.

[2]) Hiernach würde ein positiver Ausfall des Michelsonversuches bei genügend schnell relativ zur Erde bewegtem Apparat zu erwarten sein (siehe „Ä. u. Urä.“, S. 38ff.). Leider scheinen der Durchführung des Versuches, die einen weiteren wichtigen Schritt in der experimentellen Erforschung des Äthers bedeuten würde, große Schwierigkeiten entgegenzustehen.

Auch eine geringe diffuse Zurückwerfung von Licht bei solchen die Lichtgeschwindigkeit verändernden Übergängen könnte stattfinden.

Intensitätsabnahme als Folge von Gravitationswirkung der Lichtquelle. — Eine besondere Frage besteht noch in bezug auf die Schwere der Lichtquanten. Daß solche besteht, und zwar nach Maßgabe der Masse der Lichtquanten $m = E/c^2 = h\nu/c^2$ ist anzunehmen, nachdem die Schwere als Eigenschaft von Energiemassen überhaupt erkannt ist, und die bei Sonnenfinsternissen beobachtete Lichtablenkung am Sonnenrand kann als experimenteller Nachweis solcher Schwerewirkung angesehen werden, wie oben bereits angegeben wurde. Diese Lichtstrahlablenkung ist eine Querwirkung der Schwere auf die Lichtquanten, da die Richtung der Schwerkraft senkrecht zum Lichtstrahl steht. Es ist aber noch die Frage offen, ob, beziehlich in welcher Weise, eine Längswirkung von Schwerkraft auf die Lichtquanten statthat. Eine solche Wirkung müßte sich bei Lichtquanten zeigen, die von einem genügend großen Gravitationszentrum, wie der Sonne, ausgesandt werden, und es seien hier nach bisheriger Kenntnis vorhandene Möglichkeiten näher betrachtet.

---

[1]) Beobachtung von Sternen im Meridian zur Sonnenaufgangs- und Sonnenuntergangszeit könnte danach Unstimmigkeiten ergeben, wenn das Sonnensystem gleichzeitig in der Gesichtslinie bewegt ist. Wahrnehmungen dieser Art sind in der Tat kürzlich veröffentlicht worden (R. H. Tucker, Lick Obs. Bull. Nr. 330, Apr. 1921; C. D. Perrine, Astr. Nachr. 214, 22, Juli 1921). Ob sie die hier gedachte Deutung zulassen, wäre bei planmäßiger Fortsetzung der Beobachtungen von den oben auseinandergesetzten Gesichtspunkten aus zu entscheiden.

Die Aussendung erfolge mit der Lichtgeschwindigkeit c relativ zum leuchtenden Gravitationszentrum; die Masse des Letzteren sei M, der Radius R, die Gravitationskonstante k, die Masse des Lichtquants m, seine Frequenz ν. Läuft das Lichtquant bis in sehr große Entfernung weg, so findet bei Bestehen von Schwere des Lichtquants Aufhäufung von potentieller Energie im System Sonne—Lichtquant statt im Betrage kMm/R. Diese Aufhäufung muß im Sinne des Energieprinzips irgendwo von einem Verbrauch von Energie begleitet sein, und man kann annehmen, daß es Energie des Lichtquants ist, die verbraucht wird. Dieser Verbrauch kann in verschiedener Weise gedacht werden. Wir betrachten drei verschiedene Fälle hiervon (a, b, c).

a) Gilt für die Energie E eines Lichtquants stets und überall Hrn. Plancks Beziehung $E = h\nu$, so könnte die verlangte Energieänderung $\delta E = -kMm/R$ des Lichtquants in der Weise stattfinden, daß $\delta E = h\delta\nu$, also $\delta\nu = -kMm/Rh$ wird, oder, da nach Hasenöhrls Beziehung $E = h\nu = mc^2$,

$$\text{(a)} \qquad \frac{\delta\nu}{\nu} = -\frac{kM}{Rc^2}.$$

Dies ist die von Hrn. Einstein angegebene „Rotverschiebung“, die somit auf Grund des soeben befolgten höchst einfachen Gedankenganges ganz ohne Relativitäts„theorie“ ableitbar ist.[1] Gültig braucht aber die Ableitung und somit die „Rotverschiebung“ keineswegs zu sein; denn es ist sehr zweifelhaft, ob die gemachte Annahme, daß die Energie eines Lichtquants stets unveränderlich gleich $h\nu$ bleibe, der Wirklichkeit entspricht. Vielmehr scheint mit zunehmender Deutlichkeit die Gleichung $E = h\nu$ weder eine Eigenschaft der Energie noch auch eine Eigenschaft der Lichtquanten darzustellen, sondern eine Eigenschaft von in Lichtaussendung begriffenen Atomen. Wohl mag daher die Energie des frisch emittierten Lichtquants gleich $h\nu$ sein; später aber, nachdem das Lichtquant Veränderungen erlitten hat, kann es jeden beliebigen, von seiner

---

[1] Dieser Gedankengang ist auch bereits in „Ä. u. Urä.“, S. 64, angegeben worden.

OBERLIN COLLEGE

Frequenz ν ganz unabhängigen Energieinhalt annehmen[1]), so daß man keineswegs berechtigt ist auf dem ganzen Wege des von der Sonne ablaufenden Lichtquants mit $E = h\nu$ weiterzurechnen, wie es geschehen ist.[2])

b) Man kann auch versuchen, die Lichtquanten als geworfene Massen von unveränderlicher Größe m anzunehmen, wie das schon **Laplace** getan hat (natürlich ohne unsere Vorstellung vom Lichtquant zu besitzen).[3]) Es wird dann die Lichtgeschwindigkeit c veränderlich; der Zuwachs von potentieller Energie kMm/R ist kompensiert durch Verlust von kinetischer Energie, so daß $\delta(mc^2/2) = mc\delta c = - kMm/R$, wonach

$$\text{(b)} \qquad \frac{\delta c}{c} = - \frac{kM}{Rc^2} .$$

Die benutzte Annahme, daß das Lichtquant in seiner Längsrichtung nur als träge Masse sich verhalte und eine andere Geschwindigkeit annehme als die, welche ihm als Wellenzug zukommt, nämlich die Lichtgeschwindigkeit c relativ zum Äther in welchem es läuft, ist aber nach dem Ausfall des Michelsonversuchs mit Fixsternlicht sehr unwahrscheinlich geworden, und man dürfte daher dem folgenden Gedankengang sich zuwenden, der bis jetzt am besten mit aller vorhandenen Erfahrung übereinstimmt.

---

[1]) Vgl. hierzu eine der vorhergehenden Fußnoten, die Veränderungen der Lichtquanten auf ihren Wegen betreffend.

[2]) Es scheint dem Zutreffen obiger Zweifel zu entsprechen, daß eine einwandfrei gesicherte Feststellung von „Rotverschiebung" noch nicht gelungen ist. Vgl. hierzu „Ä. u. Urä.", Note S. 64, 65. Besteht keine Rotverschiebung durch Gravitationswirkung, so muß in jeder Ableitung einer solchen Rotverschiebung etwas falsch sein. Eine der Ableitungen — historisch die erste — ist die der Relativitäts„theorie"; unsere obige Ableitung hat den Vorteil der Durchsichtigkeit, wonach es leicht ist, gegebenenfalls einen falschen Teil gesondert zu sehen und ihn auszuscheiden. Wir bewirken die Ausscheidung des oben als falsch vermuteten Teils unter c) in einer mit aller bisherigen Kenntnis gut vereinbarten Weise. — Was die Relativitäts„theorie" anlangt, so unterliegt sie — „spezielle" wie „allgemeine" — schon so vielseitigen Bedenken, daß dies jetzt kaum mehr hervorgehoben zu werden braucht; man vgl. außer dem in „Ä. u. Urä." S. 61ff. Zusammengestellten neuerdings besonders **G. v. Gleich**, Ann. d. Phys. **72.** S. 221. 1923 und von ganz anderer Seite her **Vogtherr**, „Wohin führt die Relativitätstheorie?" Leipzig 1923, ebenso unsere obige Feststellung der Absolut-Bedeutung der Aberration.

[3]) S. „Ä. u. Urä.", Note S. 64.

c) Wir nehmen sowohl die Lichtgeschwindigkeit c im gleichbewegten Äther, als auch die Frequenz ν als konstant an. Die Zunahme der potentiellen Energie im System Sonne-Lichtquant nehmen wir als ausgeglichen an durch einen Verlust von Eigenenergie des Lichtquants, wie in a), nur daß wir diese Eigenenergie nicht dauernd durch $h\nu$, sondern durch mc^2 bemessen denken, was unzweifelhaft vollkommen berechtigt ist insofern, als kein Anlaß zu Zweifeln an der Gültigkeit der Hasenöhrlschen Beziehung gerade für den Fall der Lichtenergie besteht, von welcher die Beziehung ihrer Herleitung nach genommen ist.[1] Ändert sich die Energie des Lichtquants $E = mc^2$, so kann dies nach unserer Annahme der Konstanz von c nur Folge einer Änderung der Masse m des Lichtquants sein, so daß $\delta E = c^2 \delta m$, und dies ist auch in voller Übereinstimmung mit unserer Vorstellung von der Natur der Masse m, indem dieselbe nur Masse der Energie ist, wonach in der Tat E und m einander proportional sein dürfen. Wir haben somit nach dem Energieprinzip die Gleichung $c^2 \delta m = - kMm/R$, und also $\delta m/m = - kM/Rc^2$, oder auch

$$\text{(c)} \qquad \frac{\delta E}{E} = - \frac{kM}{Rc^2}\,.$$

Es nähme also die Masse sowie die Energie des Lichtquants, das ist seine Intensität, beim Weglaufen von der Sonne ab, ohne daß sonst eine Änderung geschieht. Das von der Sonne aufsteigende Lichtquant verhielte sich demnach etwa wie eine Rakete, insofern, als es im Aufstieg Masse hinter sich läßt, die als Masse der potentiellen Energie um die Sonne sich häuft; das Lichtquant zehrt sich dabei allmählich auf.

Doch ist die bisherige Rechnung nur genähert, da im Ausdruck der potentiellen Energie, kMm/R, m als konstant angenommen war. Genau hat man die Differentialgleichung

$$c^2\,dm = - \frac{kMm}{r^2}\,dr\,,$$

wo r ein beliebiger Abstand vom Sonnenmittelpunkt am Wege des Lichtquants ist. Das Integral ist

---

[1] Siehe besonders auch die vereinfachte Herleitung in „Ä. u. Urä.“, S. 41 f., aus welcher auch hervorgeht, daß die Beziehung unabhängig von der Relativitäts„theorie“ ist.

$$(\mathrm{c}_1)\qquad \left\{\begin{aligned} m &= m_0\, e^{-\frac{kM}{c^2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)} \\ &\text{und also} \\ E &= E_0\, e^{-\frac{kM}{c^2}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{r}\right)}, \end{aligned}\right.$$

wovon obige Gl. c) die Näherung durch Reihenentwickelung für den Fall $r = \infty$ darstellt. Wird $r = \infty$, so bleibt auch nach der exakten Gl. (c_1) immer noch ein endlicher Wert von E, sowie auch von m übrig; das fortlaufende Lichtquant zehrt sich also niemals vollständig auf. Für unsere Sonne ist $kM/Rc^2 = 2 \cdot 10^{-6}$, und von dieser sehr geringen Größe wäre also der äußerste Verlust an Lichtintensität, der infolge der Schwere der Lichtquanten zur verkehrten Entfernungsquadratabnahme noch hinzukäme. Es besteht für jetzt keine Aussicht, die Wirklichkeit in bezug auf dieses Ergebnis zu Rate zu ziehen; doch haben die bisherigen Beobachtungen in der Tat gar keine merkliche Änderung an den Lichtquanten der Sonne gezeigt[1]), so daß die gegenwärtige Kenntnis dem Statthaben des auch sonst einwandfreien Falles c) nicht widerspricht. Wir sind demnach auch hier bei Annahme der oben zusammengefaßten Eigenschaften der Lichtquanten auf keine Widersprüche gestoßen.

Heidelberg, Radiolog. Institut, 6. August 1923.

---

[1]) Vgl. über die vielgesuchte „Rotverschiebung" die betreffende Note beim Falle a).

(Eingegangen 7. August 1923.)

6. *Über das Verhalten des Lichtes außerirdischer Lichtquellen;*

von Rudolf Tomaschek.

(Aus dem Radiologischen Institut der Universität Heidelberg.)[1]

Einleitung.

Die Problemstellung vorliegender Arbeit ist, ausgehend von Gedankengängen, wie sie kürzlich in ausführlicher Weise von Hrn. Lenard[2]) entwickelt worden sind, die, ob es vielleicht möglich ist ein absolutes Bezugssystem, den Uräther, mit Hilfe des Michelsonschen Interferenzversuches (M. I.) und damit die absolute Bewegung der Erde nachzuweisen. Der negative Ausfall des Michelsonschen Versuches in der bisher immer ausgeführten Form, nämlich mit irdischem Licht, hat nach obiger Auffassung gezeigt, daß wir den Äther, in dem die Wellen des irdischen Lichtes laufen, als mit der Erde mitbewegt ansehen müssen. Dies braucht jedoch für außerirdisches Licht, wie Hr. Lenard[3]) gezeigt hat, durchaus nicht notwendig der Fall zu sein, sondern es wäre möglich, daß die im Uräther laufenden Quanten außerirdischer Lichtquellen auch noch auf der Erde mit dem Uräther verknüpft sind, was sich in einem wenigstens teilweise positiven Ausfall des M. I. mit außerirdischem Licht zeigen müßte. Ein negativer Ausfall müßte weitere Aufklärungen über das Verhalten von Lichtquanten beim Eintritt in Äther von anderer Zugehörigkeit geben können. Im folgenden soll über die Ausführung des Versuches mit außerirdischem Licht berichtet werden.

---

1) Ein Teil der Versuchsergebnisse wird auszugsweise in den Astron. Nachr. veröffentlicht (Nr. 5251).

2) A. N. Nr. 5107; „Über Äther und Uräther". Jahrb. Radioakt. 1920; auch Hirzel, Leipzig. Letzteres im folgenden als „Ä. u. U." zitiert, die Seitenzahl nach der zweiten Auflage 1922.

3) Ä. u. U." S. 31.

1. Vorversuche.

Zunächst wurde versucht eine Anschauung über die günstigste Form der Anordnung zu bekommen, wobei von der ursprünglichen **Morley-Millerschen** Aufstellung ausgegangen wurde. Der Strahlenweg, mit Reflexion an je acht Spiegeln, hatte eine Länge von etwa 12 m. Es zeigte sich jedoch, daß bei einer derartigen Anordnung, ganz abgesehen von verschiedenen anderen Schwierigkeiten, die Lichtstärke des verfügbaren Sternlichtes nicht ausreichen würde. Deshalb wurde eine andere einfachere Anordnung gewählt, welche sich bloß auf Differenzmessung gegenüber irdischem Lichte gründet; es wird also der negative Ausfall des M. I. mit irdischem Lichte vorausgesetzt und der Versuch zeigt nur den Unterschied im Verhalten des irdischen und außerirdischen Lichtes an. Da gewisse neuere Versuche Andeutungen eines positiven Effektes zu geben scheinen[1]), würde ein negativer Ausfall unseres Versuches dahin zu deuten sein, daß auch die Lichtquanten der außerirdischen Lichtquellen an der durch die erwähnten Versuche wahrscheinlich gemachten Relativbewegung des in den Uräther übergehenden Erdäthers gegen die Erde teilnehmen. Die Anordnung besteht aus drei festen Pfeilern, dem Mittelpfeiler, welcher die teilenden Glasplatten trägt und den beiden Spiegelpfeilern. Die beiden Arme liegen genau Ost-West bzw. Süd-Nord. Die Drehung des Apparates wird dann durch die Rotation der Erde ersetzt, indem die Beobachtungen zu verschiedenen Tageszeiten anzustellen sind.

Nachdem Versuche mit künstlichen Sternen von der Helligkeit des Sirius bzw. Wegas und auch mit Sirius selbst bei kleinen Armlängen von etwa 50 cm gezeigt hatten, daß es wohl möglich, sein müsse bei günstigen Bedingungen auch auf größere Entfernungen noch deutlich sichtbare Interferenzstreifen zu erhalten, wurde versucht, die Länge der Arme zu vergrößeren. Hierbei zeigten sich zunächst große Schwierigkeiten Sowohl im Gebäude selbst als auch auf kleineren Pfeilern im Freien unternommene Versuche mit etwa 15 m Spiegelabstand ließen selbst bei Anwendung monochromatischen Lichtes keine Interferenzstreifen erkennen; es war im günstigsten Fall ein kaum merkliches Flimmern des Gesichtsfeldes, herrührend von den rasch hin und her zitternden Streifen, zu sehen. Es war klar, daß nur die Aufstellung auf sehr massiven Pfeilern auf Felsboden, in möglichst großer Entfernung von jedem bewohnten Gebäude in Frage kam. Durch das freundliche Entgegenkommen von Hrn. G.-R. M. Wolf war es möglich, auf der sehr isoliert auf einer Bergkuppe gelegenen Sternwarte des Königstuhles die notwendigen Bedingungen zu verwirklichen.

---

[1]) Vgl. z. B. Phys. Rev. 19. S. 407. 1922. Doch ist der volle Effekt wie er z. B. bei der Bewegung der Erde um die Sonne auftreten müßte, jedenfalls *nicht* vorhanden.

2. Versuchsanordnung.

A. Das Interferometer.

In dem Keller des Ostinstitutes der Sternwarte, dessen Wände etwa 1 m dick aus Sandstein gebildet sind und dessen Sohle etwa 1,5 m unter dem äußeren Erdboden liegt, befinden sich, direkt auf dem Felsen aufgemauert und vom Kellerboden isoliert, etwa 1 m unter diesen reichend, die drei Pfeiler P_1 P_2 P_3, zwei aus Sandstein, einer aus harten Klinkersteinen aufgebaut. Die Entfernung der Pfeiler beträgt 8,6 m[1]), ihre Höhe über der Kellersohle beträgt 80 cm, ihre quadratische Breite etwa 60 cm, ihre Verbindungslinie ist genau Ost-West bzw. Süd-Nord orientiert. Die Spiegel von 45 mm Durchmesser aus versilbertem Glas, auf den Pfeilern P_1 und P_2 aufgestellt, sind zunächst auf Messingplatten befestigt, welche durch je drei Mikrometerschrauben mit Federn gegen eine Eisenplatte, welche als Halter dient, gepreßt werden. Ihre Neigung kann mittels dieser drei Mikrometerschrauben in genügender Weise reguliert werden. Die eisernen Halter stehen auf schweren, etwa 40 cm langen eisernen Schlitten, von denen der eine S_1 mittels einer guten Mikrometerschraube in der Ost-Westrichtung parallel zu sich selbst verschoben

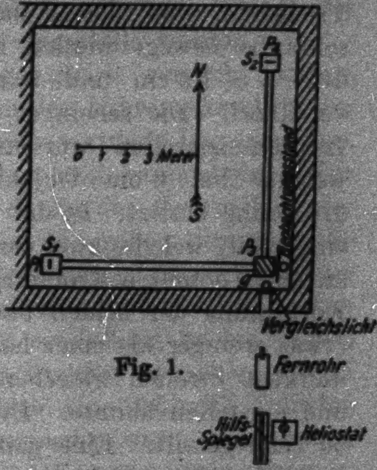


Fig. 1.

---

[1]) Diese Entfernung war durch die räumlichen Verhältnisse gegeben. Nach den vorliegenden Erfahrungen könnte man sie unter günstigen Umständen sicher auf das Mehrfache steigern.

werden kann. Obwohl eine Umdrehung der Schraube 1 mm entspricht, gelang es doch bei dem leichten Gang der Schraube nach entsprechender Übung, die Entfernung des Spiegels mit der erforderlichen Genauigkeit von einigen Lichtwellenlängen sehr zufriedenstellend zu regulieren. Der Spiegel S_2 hat eine Vorrichtung, bestehend aus zwei Elektromagneten, je einer vor und einer hinter dem eisernen Halter, welche es ermöglicht, den eisernen Halter in der Richtung nach Süd oder Nord in ganz geringem Betrage zu verbiegen, so daß es möglich war, vom Beobachtungsplatze aus die Entfernung der Spiegel auf elektrischem Wege mittels eines Widerstandes zu regulieren, ohne durch mechanische Bewegungen Erschütterungen oder Luftbewegungen hervorrufen zu müssen.

Auf dem Pfeiler P_3 stehen die beiden Glasplatten, die Teilungsplatte und die Kompensationsplatte auf drehbaren Tischchen, von denen das eine mittels einer Mikrometerschraube bewegt werden kann. Sie haben eine Größe von 10 × 5 × 1,5 cm und waren bei den Versuchen beide unversilbert. Die scheinbar auf der Spiegeloberfläche liegenden Interferenzstreifen wurden durch ein Fernrohr betrachtet, welches bei 6 cm Objektivdurchmesser eine 40fache Vergrößerung besitzt. In das Okular wurde ein Fadenmikrometer eingebaut, welches zwei parallele, gleichzeitig durch Schrauben an einer geteilten Trommel verschiebliche Fäden besitzt. Die Entfernung der beiden Fäden entsprach bei der Beobachtung etwas weniger als einer halben Streifenbreite, so daß man die dunklen Streifen zwischen den Fäden sehr genau einfassen und einstellen konnte. Die Trommel des Mikrometers war in 60 Teile geteilt. Eine ganze Umdrehung derselben entsprach etwa einer Verschiebung der Fäden um eine Streifenbreite. In das Fernrohr wurde ferner noch eine Abbesche Beleuchtungsvorrichtung eingebaut, um bei den sehr lichtschwachen Sterninterferenzen die Fäden zur leichteren Auffindung etwas beleuchten zu können. Das Sternlicht konnte in den Beobachtungsraum durch ein Fenster F eintreten, welches durch eine sehr gute planparallele Platte gebildet wird und durch einen Schieber, welcher vom Beobachtungsplatz aus betätigt werden konnte, verschließbar ist. Zwischen Fenster und Pfeiler befindet sich die Vergleichslichtquelle. Sie besteht aus einer um 45° gegen die Vertikale geneigten durchsichtigen Glasplatte, durch welche das von außen kommende Versuchslicht ungehindert hindurchgehen kann, während von ihrer Vorderseite das Licht eines Glühlämpchens, welches durch eine Blende und Linse möglichst parallel gemacht wird, in den Apparat reflektiert werden kann, so daß eine abwechselnde Beobachtung mit Versuchs- und Vergleichslicht möglich ist. Das Licht des Vergleichslämpchens wurde stets durch Filter und Einschalten von Widerstand in Farbe und Stärke dem zu untersuchenden Lichte gleich gemacht.

Die Justierung des Apparates erfolgte nach ungefährer Gleichmachung der beiden Strahlenwege mittels eines Bandmaßes, zunächst mit Hilfe der Lichtreflexe einer hellen Glühlampe, dann mittels eines in den Strahlengang der Vergleichslichtquelle eingeschalteten Fadenkreuzes. Das Aufsuchen der Interferenzstreifen geschah unter Anwendung einer Neon-Glimmlampe, während die zentralen farbigen Interferenzstreifen mit Hilfe einer natriumhaltigen, mit etwas leuchtender Flamme brennenden Spirituslampe eingestellt wurden.

Nachdem so die Strahlenwege gleich gemacht waren, wurde den Streifen durch Drehen an den Mikrometerschrauben der Spiegel die richtige Breite und eine vertikale Lage gegeben, so daß sie möglichst gerade von oben nach unten liefen. Die Breite der Streifen war begrenzt durch die Genauigkeit der Spiegel und Glasplatten, indem bei zu großer Streifenbreite ihre Form nicht mehr annähernd geradlinig war. Es erwies sich am Vorteilhaftesten eine Streifenbreite von etwa 4 mm (am Spiegel gemessen) einzustellen, so daß zu beiden Seiten des zentralen Streifens etwa 4—5 Streifen zu sehen waren. Zunächst zeigten die Streifen jedoch eine lebhafte Unruhe, welche durch Luftströmungen verursacht war. Aber auch nach sorgfältigster Dichtung aller Öffnungen, wie Fenster, Türen, Rohre der elektrischen Leitungen, war die Störung, wenn auch schon stark vermindert, so doch noch merklich vorhanden. Es wurde daher der ganze Strahlengang in eiserne Rohre, wozu sich Ofenrohre als geeignet erwiesen, eingeschlossen. Obwohl die Rohre an den Enden unverschlossen waren, wirkten sie doch so gut, daß das Schwanken der Streifen die Messungen nicht mehr wesentlich beeinflussen konnte, wie die weiter unten angegebenen Genauigkeitsgrenzen der Ergebnisse zeigen. Hierbei war es notwendig, nach Betreten des Raumes und Einnehmen des Beobachtungsplatzes, der durch einen Vorhang gegen die Apparatur zu abgeschlossen war, um die vom Beobachter aufsteigende Luftströmung unschädlich zu machen, etwa 10—15 Minuten zu warten.

Neben diesen durch die unregelmäßigen Luftströmungen hervorgerufenen Schwankungen war auch ein konstantes Wandern der Streifen zu bemerken, welches wohl auf einer inneren Bewegung des Erdbodens beruhte, hervorgerufen vielleicht durch Temperaturausgleich in den oberen Erdschichten außerhalb, vielleicht auch durch einen allmählichen Ausgleich der Spannungen infolge der Belastung durch den Beobachter. Es werden wohl beide Faktoren wirksam gewesen sein, da einigemal, namentlich vormittags, wenn außen die Sonnenwärme zu wirken begann, der Gang der Streifen nach der entgegengesetzten Richtung als gewöhnlich zu bemerken war. Die Wanderung war von der Größenordnung von etwa $^1/_{20}$ Streifenbreite in der Minute und ist in Fig. 2, welche als Abszisse die Zeit in Minuten, als Ordinate die Verschiebung des Mittelpunktes des Streifensystems in Streifenbreiten zeigt, zu erkennen. Über die Ausschaltung dieses Einflusses vgl. S. 113.

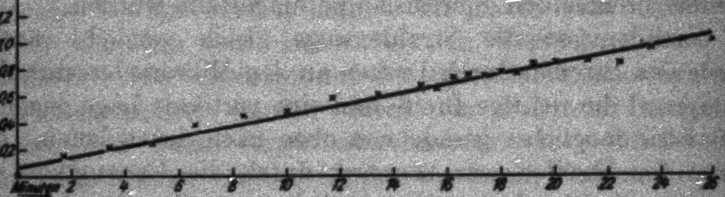


Fig. 2.

Gegen Erschütterungen war die Apparatur sehr empfindlich und obwohl die Pfeiler sämtlich auf Felsgrund, etwa $2^1/_2$ m unter der äußeren Erdoberfläche aufruhten, waren doch Schritte von Personen bis zu etwa 50 m Entfernung vom Gebäude am Zucken der Interferenzstreifen sichtbar, so daß während der Versuche in der Umgebung vollkommene Ruhe herrschen mußte. Außerdem waren stärkere vorausgegangene Sonnenbestrahlung der Umgebung des Gebäudes, stärkerer Wind und dergleichen stets an größerer Unruhe der Streifen bemerkbar.

Im allgemeinen hielt sich die Einstellung der Streifen sehr gut, oft bei gleichmäßiger Witterung über mehrere Tage.

Eine vollkommene Neueinstellung der Streifen mit Hilfe von Na-Licht war nur nach größeren, durch das Wetter bedingten Pausen einigemal notwendig.

B. Die Hilfsmittel zum Auffangen des Versuchslichtes.

Nach verschiedenen Vorversuchen erwies es sich als notwendig, zum Auffangen des Sonnen- bzw. Sternenlichtes Heliostaten zu verwenden.

a) Zum Auffangen des Sonnen- und Mondlichtes diente ein kleiner Silbermannscher Uhrwerkheliostat[1]), der es gestattete, in jeder beliebigen Stellung der Sonne durch nur eine Reflexion am beweglichen Spiegel das Licht in den Beobachtungsraum zu werfen. Als Spiegel diente im Falle der Sonne eine rückwärts berußte, sehr gut ebene Glasplatte, die auf dem Heliostaten montiert wurde. Zum Auffangen des Mondlichtes wurde derselbe Heliostat, jedoch mit einem Silberspiegel verwendet. Zur Untersuchung von Fixsternlicht erwies er sich als nicht geeignet, da er nicht genügend fein regulierbar war, um diese schwierigen Einstellungen ausführen zu können. Jedoch gelang es hiermit Sirius zu beobachten, was von Interesse war, da gegenüber der zweiten, weiter unten beschriebenen Anordnung dieser Heliostat theoretisch vielleicht einfacher zu deutende Versuchsbedingungen lieferte.[2])

b) Zur Beobachtung des Fixsternlichtes mußte eine genauer wirkende Anordnung aufgestellt werden, was durch das Entgegenkommen der Firma C. P. Goerz, welche uns einen großen Heliostaten, einen Hilfsspiegel und ein größeres Beobachtungsfernrohr zur Verfügung stellte, ermöglicht wurde. Nach Ausprobieren verschiedener Aufstellungen am Dache des Gebäudes erwies es sich als notwendig, die Apparate möglichst unmittelbar vor dem Beobachtungskeller aufzustellen, zu welchem Zwecke eine Grube von etwa 6 × 2 m ausgehoben wurde, deren Sohle ungefähr mit dem Kellerboden gleiche Höhe hatte. In dieser wurde die Anordnung aufgestellt. Der durch ein Gewichtsuhrwerk betriebene Heliostat[3]) wurde auf einer großen Steinplatte aufgestellt und mit Hilfe verschiedener Sterne genau justiert. Da dieser Heliostat nur um eine Achse, welche der Erdachse parallel ist, drehbar ist, muß, um das Licht verschiedener Sterne in die konstante Beobachtungsrichtung werfen zu können, ein zweiter Spiegel zu Hilfe genommen werden. Dieser ist um eine genau vertikale Achse drehbar und auf Schienen, die genau Nord-Süd in der Verlängerung des Nord-Südarmes des Interferometers liegen und durch Stellschrauben genau horizontal gestellt werden können, verschiebbar. Zur genauen Einstellung ist noch eine Feinbewegung des Hilfsspiegels um die vertikale Achse mittels Mikrometerschraube notwendig. Die beiden Spiegel haben einen Durchmesser von je 35 cm. Die Länge der Schienen betrug etwa 2 m, so daß das Licht aller Sterne von Sirius bis Wega von dem etwa 60 cm weiter östlich stehenden Heliostaten in den Beobachtungsraum horizontal gespiegelt werden konnte.

---

[1]) Z. B. Ambronn, Handb. d. astron. Instrumentenkunde II, 648.

[2]) Vgl. S. 116.

[3]) Es ist dies derselbe Heliostat der Firma Goerz, welcher auch bei der deutschen Sonnenfinsternisexpedition 1914 in Norwegen verwendet wurde; siehe A. Miethe: „Die totale Sonnenfinsternis vom 21. August 1914“, Vieweg 1916.

Das zunächst auf den Heliostaten und von dort auf den Hilfsspiegel fallende, nach Norden laufende Licht geht weiterhin durch ein Fernrohr von 17 cm Objektiv- und 3,5 cm Okulardurchmesser. Das parallel eintretende Licht verläßt das Fernrohr wieder parallel. Der durch dieses Fernrohr erzielte Lichtgewinn war zwar durch die Absorptions- und Reflexionsverluste im Fernrohr gemindert, doch immerhin von merklichem Vorteil. Mit Hilfe von Fadenkreuzen wurden nun alle Teile so justiert, daß die Mitte der Spiegel, sowie die optische Achse des Fernrohres sämtlich in die Verlängerungslinie der optischen Achse des Nord-Südarmes des Interferometers fielen. Der Lichtweg zwischen Heliostat und Beobachtungsfernrohr betrug etwa 25 m. Vor dem Objektiv des Verstärkungsfernrohres wurde ein kleines, etwa 2 × 2 cm großes Spiegelchen einstellbar angebracht, welches das Sternlicht in ein neben dem Heliostaten aufgestelltes Leitfernrohr reflektierte, so daß ein Hilfsbeobachter mittels der Feinbewegung des Heliostaten stets das Sternlicht in der optischen Achse der Anordnung halten konnte. Eine telephonische Verbindung von dem Beobachtungsstand im Keller zum Heliostaten ermöglichte den Ausgleich kleinerer Schwankungen.

3. Gang der Versuche und Art der Messung.

Nachdem die zentralen Interferenzstreifen der Vergleichslichtquelle durch Verschiebung des beweglichen Interferenzspiegels in die Mitte des Gesichtsfeldes gebracht und Lage und Breite der Streifen richtig eingestellt sind, wird mit Hilfe des Heliostaten das zu beobachtende Licht in den Beobachtungsraum geworfen und der Strahlengang am Heliostaten und Hilfsspiegel so lange reguliert bis das Versuchslicht zentral auffällt. Nachdem die Einstellung bewirkt und auch Helligkeit von Vergleichslicht und Meßlicht einander möglichst gleich gemacht sind, kann mit der Messung begonnen werden, da sich inzwischen auch die durch das Betreten des Raumes gebildeten Luftströmungen gelegt haben.

Zunächst wurde das Außenlicht durch den Schieber abgesperrt und die Lage des ersten linken dunklen zentralen Interferenzstreifens durch Einstellen der Mikrometerschraube und Ablesung an der Trommel gemessen, dann die Lage des ersten rechten zentralen dunklen Interferenzstreifens. Hierauf wurde der Schieber geöffnet, das Vergleichslicht abgeschaltet und nun wieder die Lage des ersten linken und dann des ersten rechten zentralen Interferenzstreifens in dem durch das zu untersuchende Licht erhellten Gesichtsfelde gemessen. Dann wurde das Versuchslicht wieder durch den Schieber abgesperrt, das Vergleichslicht eingeschaltet und wieder der erste linke und erste rechte Interferenzstreifen gemessen.

Mit Hilfe dieser Anordnung der Reihenfolge der Messungen ist eine Unschädlichmachung des konstanten Wanderns der Streifen möglich, so daß ein davon herrüherender systematischer Fehler, der sich in dem Vorhandensein einer scheinbaren Verschiebung äußern würde, vermieden wird.

Voraussetzung dabei ist, daß eine lineare Interpolation gestattet ist, was, wie Kurve 2 (S. 110) zeigt, in weitgehendem Maße der Fall ist, und ferner, daß die Zwischenzeit, welche zum Einlassen des Versuchslichtes und Ausschalten des Vergleichslichtes notwendig ist, gleich ist der Zeit, welche zum Abschneiden des Versuchslichtes und zum Einschalten des Vergleichslichtes gebraucht wird. Diese Bedingung war in genügender Weise erfüllt.

Ein Fehler in dieser Hinsicht könnte folgende Größe haben: Die Dauer der zu einer Messungsreihe notwendigen Zeit beträgt ungünstigenfalls eine Minute. Zu einer Messung selbst sind also etwa 8 Sekunden erforderlich. Dies gibt bei einer durchschnittlichen Wanderung von 0,05 Streifenbreiten in der Minute[1]) eine inzwischen erfolgte Verschiebung von 0,006 Streifenbreiten für jede Messung. Würde man annehmen, daß die beiden Zwischenzeiten einen systematischen Fehler in einer Ungleichheit von 4 Sek. besitzen, was bereits unwahrscheinlich ist, so ergäbe sich daraus eine scheinbare Streifenverschiebung von etwa 0,003 Streifenbreite, welche ganz innerhalb der durch die anderen Störungen bedingten Fehlergrenzen liegt.

Die Luftströmungen können keinen systematischen Fehler hervorrufen, da sie ganz unregelmäßig verteilt sind. Eine weitere systematische Fehlerquelle könnte aber beim Vertauschen von Vergleichs- und Versuchslicht eintreten, wenn beide in Farbe oder Helligkeit nicht ganz gleich sind, namentlich da es merklich war, daß die Streifen in ihrer Ausbildung rechts und links von der Mitte nicht streng gleich waren. Um dies zu untersuchen, wurden den Hauptmessungen ganz analoge Messungen mit verschieden gefiltertem und geschwächtem Licht einer Hilfsglühlampe gemacht. Wie zu erwarten, zeigte sich jedoch kein Einfluß, da ja stets nur die beiden zentralen dunklen, also von der angewendeten Farbe ziemlich unabhängigen Interferenzstreifen gemessen wurden. So zeigten z. B. zwei Messungsreihen mit stark rotem Versuchs- und stark grünlichen Vergleichslicht die Verschiebungen

$$V = -0{,}009 \pm 0{,}019 \text{ Streifenbreiten}$$
$$V = -0{,}000 \pm 0{,}010 \quad \text{,,} \quad .$$

Da es sich nicht als leicht durchführbar erwies, ein eindeutiges Maß für die Störungsfreiheit einer Messungsreihe aufzustellen, wurden alle Ablesungen bei der Verwertung mit gleichem Gewichte versehen.

Tab. 1 gibt ein Beispiel für eine Messungsreihe, wie sie in dieser Art durchgeführt worden sind. Es ist stets eine Verschiebung, welche durch eine Verlängerung des Lichtweges im Ost-Westarm entstehen würde, als positiv gerechnet.

Die Genauigkeit der Einstellung der Fäden des Mikrometers auf die Streifen betrug etwa $^1/_2$–1 Trommelskalenteile = etwa 0,02 Streifenbreite. Eine Verschiebung von etwa der doppelten Größe war sofort erkennbar. Dies wurde namentlich

---

[1] Vgl. S. 110.

Tabelle 1.

Alles in Skalenteilen. Streifenbreite = 40,2 Skalenteile.

Zeit	Nr.	L_1	R_1	L_v	R_v	L_2	R_2	M_1	M_2	M_{12}	M_v	Δ	
												+	−
8h 40	428	1	41	1	43	3	44	21,0	23,5	22,2	22,0	0,2	—
	429	21	61	17	59	20	62	41,0	41,0	41,0	38,0	3,0	—
	430	34	75	35	74	32	73	54,5	52,5	53,5	54,5	—	1,0
8h 45	431	37	78	36	81	40	81	57,5	60,5	59,0	58,5	0,5	—
	432	42	85	45	86	46	88	63,5	67,0	65,2	65,5	—	0,3
	433	—4	38	—2	41	+2	42	17,0	22,0	19,5	19,5	0,0	—
	434	—2	40	0	41	+2	41	19,0	21,5	20,2	20,5	—	0,3
	435	4	43	2	41	—2	40	23,5	19,0	22,2	21,5	—	0,3
	436	5	45	7	47	6	46	25,0	26,0	25,5	27,0	—	1,5
8h 53	437	7	50	10	51	10	48	28,5	29,0	28,7	30,5	—	1,8
	438	10	52	13	51	13	51	31,0	32,0	31,5	32,0	—	0,5
	439	14	53	14	54	13	53	33,5	33,0	33,2	34,0	—	0,8
	440	15	53	16	53	18	59	34,0	36,5	35,2	34,5	0,7	—
	441	19	62	21	63	24	67	40,5	45,5	42,5	42,0	0,5	—
9h 05	442	32	78	35	71	31	69	55,0	50,0	52,5	53,0	—	0,5
	443	0	38	1	40	5	43	19,0	24,0	21,5	20,5	1,0	—
	444	6	44	4	46	8	50	25,0	29,0	27,0	25,0	2,0	—
	445	12	60	20	63	25	63	39,5	44,0	41,5	41,5	0,0	—
	446	25	63	25	65	25	64	44,0	44,5	44,2	45,0	—	0,8
	447	32	72	30	70	29	69	52,0	49,0	50,5	50,0	0,5	—
	448	33	74	33	71	33	73	53,5	53,0	53,2	52,0	1,2	—
9h 15	449	41	81	41	81	41	82	61,0	61,5	61,3	61,0	0,3	—
	450	46	84	46	83	48	89	65,0	68,5	66,7	64,5	2,2	—
9h 20	451	41	79	42	83	47	87	60,0	67,0	63,5	62,5	1,0	—
	452	52	90	51	90	52	91	71,0	71,5	71,2	70,5	0,7	—

bei Fixsternbeobachtungen oft benutzt, indem die Interferenzstreifen des Fixsternlichtes durch die Fäden fixiert und dann rasch das Vergleichslicht eingeschaltet und das Fixsternlicht abgeschnitten wurde. Diese Methode war zur unmittelbaren Beobachtung eines Effektes sehr vorteilhaft, da der Vergleich nur etwa 1—2 Sekunden benötigte, man also sehr weitgehend von Luftströmungen usw. unabhängig war und die Einstellungen sehr genau erfolgen konnten, da die mit jeder Trommelablesung notwendigerweise verbundene Blendung wegfiel. Eine Verschiebung von etwa 0,04 Streifenbreiten wäre auf diese Weise mit Sicherheit zu entdecken gewesen.

4. Ergebnisse.

Als außerirdische Lichtquellen kamen in Frage: zunächst Sonnenlicht bzw. Mondlicht, dann Planetenlicht, wobei Jupiter zur Zeit der Untersuchung günstig stand und schließlich Fixsternlicht. Von letzteren kam zunächst hauptsächlich Sirius in Frage, jedoch verzögerten sich die Messungen infolge des außergewöhnlich ungünstigen Wetters, so daß nur wenige unmittelbare Vergleiche mit Sirius möglich waren. Es wurden daher bei den endgültigen Versuchen Arktur und Wega benutzt, nachdem sich gezeigt hatte, daß ihre Helligkeit zur Messung der Interferenzstreifen ausreichte.

a) Sonnenlicht.

Sonne. — Um die Verhältnisse möglichst übersichtlich zu gestalten, wurde das Sonnenlicht stets mit dem kleinen auf S. 111 beschriebenen Heliostaten mit nur einer Reflexion in den Beobachtungsraum reflektiert. Das von der Vorderseite der rückwärts geschwärzten Glasplatte reflektierte Licht tritt durch das etwa 5 mm dicke Fenster in den Beobachtungsraum; hinter dem Fenster war zur Schwächung des Sonnenlichtes ein Filter angebracht. Dieses bestand, um einerseits die Farbe des Lichtes nicht zu ändern und auch um möglichst eindeutige Verhältnisse zu haben, aus einer auf einer etwa 2 mm dicken Glasplatte aufgetragenen und eingetrockneten Aufschwemmung von feinen Rußteilchen, welche zwischen sich kleine Lücken ließen, so daß das Filter im Sinne eines Schleiers wirkte. Es ist dabei in diesem Falle die von Vogtherr[1]) vorgeschlagene Anordnung eines möglichst in der Meridianebene laufenden Lichtstrahles erfüllt.

Die Messungsreihen wurden hier und im folgenden stets so verwertet, daß aus etwa je 20 Reihen zu je 6 Beobachtungen das Mittel gebildet und der Mitte der zu dieser Beobachtungsreihe gehörigen Zeit zugeordnet wurde. Eine solche Beobachtungsreihe erstreckte sich meist auf etwa 35—45 Minuten.

Die Ergebnisse sind folgende:

Tag	Zeit	Verschiebung Streifenbreiten
1923. April 25.	9^h 25 a	— 0,000 ± 0,007
„ 24.	10^h 35 a	+ 0,023 ± 0,006
„ 24.	11^h 15 a	— 0,010 ± 0,007
Mai 5.	11^h 35 a	— 0,009 ± 0,010
April 24.	12^h 00	— 0,007 ± 0,007
„ 4.	12^h 10 p	+ 0,012 ± 0,006
Juli 4.	1^h 05 p	+ 0,006 ± 0,009
„ 4.	2^h 05 p	+ 0,006 ± 0,006
April 4.	3^h 05 p	+ 0,014 ± 0,010
„ 4.	4^h 00 p	— 0,000 ± 0,010
„ 12.	4^h 10 p	— 0,000 ± 0,003
„ 3.	4^h 35 p	— 0,003 ± 0,010

---

1) A. N. 5203.

Mond. — Es wurde derselbe kleine Heliostat, aber mit Silberspiegel und ohne Filter verwendet.

Tag	Zeit	Verschiebung Streifenbreiten
1923. März 26.	8^h 00 p	+ 0,001 ± 0,019*
April 26.	8^h 35 p	+ 0,007 ± 0,006
März 26.	9^h 00 p	+ 0,054 ± 0,014*
April 26.	9^h 40 p	+ 0,018 ± 0,011
„ 24.	10^h 05 p	+ 0,011 ± 0,011
März 26.	11^h 00 p	+ 0,021 ± 0,013*
April 24.	11^h 40 p	− 0,007 ± 0,013
März 26.	12^h 00	− 0,002 ± 0,014*
April 4.	3^h 00 a	+ 0,006 ± 0,009
„ 4.	3^h 45 a	− 0,002 ± 0,009
„ 4.	5^h 00 a	+ 0,015 ± 0,008

Bei den mit * versehenen Versuchen war die Luftunruhe noch nicht ganz befriedigend ausgeschaltet.

Jupiter. — Es wurde der große Heliostat in der S. 112 beschriebenen Anordnung mit Hilfsspiegel und Fernrohr verwendet. Zahlreiche unmittelbare Vergleiche in mehreren Nächten des April zu verschiedenen Nachtzeiten ergaben sämtlich ein negatives Resultat. Außerdem wurden ausführliche Messungen vorgenommen.

Tag	Zeit	Verschiebung Streifenbreiten
1923. Juli 6.	9^h 25 p	− 0,008 ± 0,009
„ 6.	9^h 50 p	− 0,011 ± 0,011
„ 6.	10^h 25 p	− 0,005 ± 0,009
Mai 2.	12^h 25 a	+ 0,012 ± 0,015

b) Fixsternlicht.

Sirius. — Mit Sirius wurden, da er zur Zeit des günstigen Wetters nicht mehr im Gesichtsfeld des großen Heliostaten lag, nur Übereinstimmungsversuche vorgenommen und zwar mit einmaliger Reflexion am Spiegel des kleinen Heliostaten. Beobachtungen am 21. März um 9^h 30 zeigten keine wahrnehmbare Verschiebung, ebensowenig etwa 50 Vergleichsbeobachtungen am 4. April von etwa 8^h 30 bis 9^h. Es war also keine Verschiebung, die größer als 0,04 Streifenbreiten ist, vorhanden.

Arktur. — Verwendet wurde der große Heliostat mit Hilfsspiegel und Fernrohr. Es wurden in den Monaten April und Mai zu den verschiedenen Nachtstunden unmittelbare Vergleichungen vorgenommen, ohne daß jemals eine merkliche Verschiebung feststellbar gewesen wäre. Die ausführlichen Messungen ergaben:

Tag			Zeit	Verschiebung Streifenbreiten
1923.	Juli	5.	$12^h\,15$ a	$+ 0{,}004 \pm 0{,}005$
	Mai	15.	$12^h\,25$ a	$- 0{,}025 \pm 0{,}012$
	„	15.	$2^h\,20$ a	$- 0{,}007 \pm 0{,}009$

Wega. — Die Messungen ergaben:

Tag			Zeit	Verschiebung Streifenbreiten
1923.	Juli	5.	$1^h\,30$ a	$+ 0{,}001 \pm 0{,}005$
	„	5.	$1^h\,55$ a	$- 0{,}003 \pm 0{,}005$
	„	5.	$2^h\,30$ a	$- 0{,}004 \pm 0{,}005$

5. Deutung der Ergebnisse.

Kommt das außerirdische Licht aus dem Uräther und behält es seine Lichtgeschwindigkeit relativ zu ihm, so ist die Größe des zu erwartenden Effektes in unserer Anschauung gegeben durch die Relativgeschwindigkeit des Apparates zum Uräther, so daß die ursprünglichen Michelsonschen Überlegungen anwendbar sind. Fällt die Richtung der Geschwindigkeit mit der Richtung des einen Armes gerade zusammen, so ist die gegenüber irdischem Licht zu erwartende Verschiebung $N = L/\lambda \cdot v^2/c^2$; wobei L die Armlänge, λ die mittlere Wellenlänge, v die Relativgeschwindigkeit zum Uräther und c Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Infolge der Erddrehung wird sich der Wert im Laufe eines Tages ändern (vgl. unten).

Es sind vier Bewegungen bekannt, welche einen Effekt hervorrufen könnten. Zunächst die Drehung der Erde um ihre Achse. Dies müßte eine dauernde konstante positive Verschiebung gegenüber irdischem Licht hervorrufen, die aber viel zu klein ist, um mit unserer Anordnung nachgewiesen werden zu können.

Einen wesentlichen Einfluß müßte aber die Bewegung der Erde um die Sonne haben. Der maximal zu erwartende Effekt, jeweils um Mittag bzw. Mitternacht auftretend, müßte $+ 0{,}15$ Streifenbreiten betragen. Die Änderung mit der Tageszeit ist, wie die Rechnung ergibt, gegeben durch

$$N_1 = L/\lambda \cdot v^2/c^2 \cdot [1 - \sin^2 t\,(1 + \sin^2 \varphi)]\,,$$

wobei t den Stundenwinkel (für 12 Uhr $= 0$) und φ die geographische Breite ($= 49^0\,24'$) bedeuten. Der Effekt würde demnach für unsere Anordnung gleich Null sein um $3^h\,40$ bzw. $8^h\,20$ nach Mittag bzw. Mitternacht. Das Maximum der negativen Abweichung um 6 Uhr abends und früh beträgt nur 0,58 der positiven Verschiebung um 12 Uhr.

Als dritte Bewegung kommt die Bewegung des ganzen Sonnensystems relativ zu dem uns umgebenden Fixsternsystem in Betracht. Setzen wir die Werte $RA = 270^\circ$, $D = +30^\circ$ für den Apex der Sonnenbewegung ein und setzen $v_0 = 20$ km/sec, so ist die maximale Verschiebung, welche sich aus dieser Bewegung allein ergeben würde, in positiver Richtung um 5 bzw. 19 Stunden nach Kulmination des Apex zu erwarten im Betrage von $+0{,}044$ Streifenbreiten, die maximale negative Verschiebung um 12 Stunden nach der Kulmination des Apex mit $-0{,}062$ Streifenbreiten. Zur Zeit der Kulmination des Apex ist nur eine Verschiebung von $-0{,}007$ Streifenbreiten zu erwarten. Die Durchrechnung ergibt für die zu erwartende Änderung der Verschiebung innerhalb eines Sterntages

$$N_2 = L/\lambda \cdot v_0^2/c^2 \cdot [1 - \sin^2 t' \, (1 + \sin^2 \varphi) \cos^2 \delta \\ + \sin t' \cdot {}^1/_2 \sin 2\varphi \cdot \sin 2\delta - (\cos^2 \varphi + 1) \sin^2 \delta],$$

wobei δ die Deklination des Apex bezeichnet und t' für die Kulmination des Apex $= \pi/2$ zu setzen ist.

Verbindet man den Einfluß der Bewegung der Erde um die Sonne und deren Bewegung im Fixsternsystem, so ergibt sich die resultierende Streifenverschiebung durch Superposition der beiden Ausdrücke, wobei zu beachten ist, daß in N_2 für t' der Wert $t + \lambda$ einzusetzen ist, wobei λ den Winkel der Jahresbewegung der Erde angibt ($= 0$ für 21. März). Die resultierende Kurve zeigt, daß die Abweichungen um 12 Uhr für unsere Anordnung zwischen $+0{,}19$ und $+0{,}08$ Streifenbreiten schwanken und die günstigste Beobachtungszeit etwa März ist.

Als vierte Bewegung käme die Bewegung des Milchstraßensystems gegenüber anderen derartigen Systemen in Betracht, doch ist hierüber nichts Sicheres bekannt. Legt man die bis jetzt gemachten Schätzungen zugrunde[1]), so wären sogar Streifenverschiebungen in der Größenordnung von 10 Streifenbreiten zu erwarten.

Zusammenfassend ist also, wenn man von der letzteren Bewegung, deren Betrag zu unsicher ist, absieht, deren Berücksichtigung unsere Schlüsse aber noch verstärken würde, eine

---

[1]) Vgl. z. B. **Wirtz**, A. N. 4861; **Courvoisier**, A. N. 213, S. 281. 1921; 214. S. 33. 1921.

Verschiebung von 0,1—0,2 Streifenbreiten zu erwarten. Die Versuche zeigen, daß eine Verschiebung dieser Größenordnung nicht eingetreten ist, sondern die Abweichungen bestenfalls etwa $^1/_8$ der zu erwartenden betragen, welcher Betrag bereits innerhalb der Fehlergrenze der Beobachtung liegt. Legen wir die erwähnten großen, von Hrn. Courvoisier[1]) angenommenen Geschwindigkeiten des Milchstraßensystems zugrunde, so betragen die beobachteten Verschiebungen nur etwa $^1/_{1000}$ der möglichen.

Die Versuche führen also, wenn wir die Vorstellungen, von denen wir ausgegangen sind, zugrunde legen, zur Auffassung, daß bei unserer Anordnung die Lichtquanten des Lichtes außerirdischer Lichtquellen nicht mehr im Uräther des Weltraumes laufen[2]), sondern Lichtgeschwindigkeit relativ zum Äther der Erde, welchen wir als relativ zur Erdoberfläche ruhend betrachten müssen, angenommen haben. Wir gelangen so zu der Erkenntnis der Eigenschaft der Lichtquanten, *eine in der Richtung des Fortschreitens gelegene Geschwindigkeitskomponente beim Eintritt in Äther von anderem Bewegungszustand zu ändern* und Lichtgeschwindigkeit relativ zu diesem anzunehmen, während die Aberration zeigt, daß die seitliche Komponente unter denselben Umständen erhalten bleibt.[3])

6. Über die Reflexion von Aberrationslicht.

Obwohl wir nun dem Vorstehenden gemäß das Fixsternlicht als im Äther der Erde gleich irdischem Lichte laufend annehmen müssen, ist es beachtenswert, daß die Versuche mit außerirdischem Licht zumindest unter gewissen Umständen nicht vollkommen analog den mit irdischem Lichte ausgeführten Versuchen verlaufen.

Wir betrachten das Licht irdischer Lichtquellen als im Äther der Erde laufend, welche Vorstellung, wie Hr. Lenard gezeigt hat[4]), in vollem Einklang mit allen bisher angestellten

---

[1]) L. Courvoisier, a. a. O.

[2]) Über diese Annahme vgl. P. Lenard, Über Äther und Uräther, 2. Aufl. S. 23ff. Die vorliegenden Versuche zeigen streng, wenn man die Lorentzkontraktion als unbefriedigend verwirft, wie es im vorliegenden geschehen ist, daß der Äther, in dem das Fixsternlicht auf der Erde läuft, keine Relativbewegung zur Erde hat.

[3]) Über eine etwas veränderte Auffassung der letzteren siehe die gleichzeitige Arbeit Hrn. Lenards in diesen Annalen.

[4]) Ä. u. Urä. S. 31.

Versuchen steht. Der negative Ausfall des **Michelson**schen Versuches mit irdischem Licht wird dadurch eine Selbstverständlichkeit. Es ist jedoch sehr bemerkenswert, daß, wie die neu wiederholten Versuche mit irdischem Licht zeigen[1]), auf hohen Bergen schon Übergang in reinen Uräther merklich zu werden scheint. Dies berührt jedoch unseren Schluß, daß Fixsternlicht stets Lichtgeschwindigkeit relativ zu dem Äther, in dem es eben läuft, annimmt, nicht weiter.[2]) Der Unterschied des Fixsternlichtes gegenüber irdischem Licht beruht bei Verfolgung dieser Vorstellung in der Aberration. Diese stellen wir uns als durch eine durch die Bahnbewegung der Erde verursachte seitliche Bewegungskomponente der Lichtquanten hervorgerufen vor[3]), welche in ihrem Betrage, wie die Erfahrung zeigt, bei den im Erdäther zurückgelegten Wegen nicht merklich vermindert ist. Die Aberration bewirkt nun, daß die Strahlrichtung (also die Fortschreitungsrichtung der Energie) nicht mehr übereinstimmt mit der Fortpflanzungsrichtung der Lichtquanten. Es ist dies ein Unterschied, der bei den herkömmlichen Betrachtungen, welche einen absolut ruhenden Äther zugrunde legen, zur Unterscheidung von relativem und absolutem Strahle führt. Es ist jedoch zu beachten, daß bei unserer Konstruktion des „relativen" Strahles, also der Fortpflanzungsrichtung der Energie, die Richtung zwar mit der auf dem bisherigen Wege konstruierten bis auf Größen zweiter Ordnung zusammenfällt, nicht aber die Größe der Geschwindigkeit in Richtung des relativen Strahles. Bedeutet in Fig. 3a (S. 124) AB die Richtung und Größe der Geschwindigkeit im absoluten Strahl (in unserer Auffassung die Längsrichtung der Lichtquanten), CB die Richtung und Größe der Erdgeschwindigkeit, so ergibt nach den üblichen Konstruktionen AC die Richtung und Geschwindigkeit des relativen Strahles. Man betrachtet nämlich den Äther in der umgekehrten Richtung, also BC, relativ zum Apparat bewegt, wodurch sich ohne weiteres diese Konstruktion ergibt. Da wir jedoch annehmen, daß der Äther relativ zum Apparat ruht und die Lichtquanten stets in ihrer Längsrichtung Lichtgeschwindigkeit relativ zu diesem Äther haben1), können wir nur annehmen, daß sich bloß die zur Bewegungsrichtung senkrechte Komponente überlagert, so daß, bis auf Größen zweiter Ordnung, die Aberrationsrichtung mit der nach der oben angegebenen Konstruktion ermittelten übereinstimmt, die Geschwindigkeit jedoch nur AC'' beträgt. Man erkennt dies sofort, wenn man zum Sonderfall übergeht, daß die Erdbewegung etwa in der Richtung BA verlaufen würde. Dann hat nach der üblichen Konstruktion der relative Strahl (also der relativ zum Apparat betrachtete) eine Geschwindigkeit $c + v$ (infolge des „Ätherwindes"), während er nach unserer Vorstellung, da keine seitliche Bewegungskomponente vorhanden ist, in dem relativ zum Apparat ruhenden Äther die einfache Lichtgeschwindigkeit c haben muß.2) Daraus folgt auch die Unbrauchbarkeit der gewöhnlichen Konstruktionen3) der Reflexion von Aberrationslicht, da dieselben, im Widerspruch zu unserem Befund, ein positives Ergebnis, also eine Verschiebung der Streifen fordern.

---

[1]) Phys. Rev. 19. S. 407. 1922. Es hat sich eine Streifenverschiebung von etwa $^1/_{10}$ des durch die Erdbewegung um die Sonne zu erwartenden Effektes ergeben.

[2]) Hierbei ist zu beachten, daß wir, dem Mechanismus des Lichtquants entsprechend (vgl. z. B. Ä. u. U. S. 26), Lichtgeschwindigkeit in der Fortschreitungsrichtung der Lichtquanten annehmen und nicht etwa in der Fortschreitungsrichtung der Energie („relativer" Strahl), welche beide Richtungen nicht immer übereinstimmen müssen.

[3]) Vgl. Ä. u. U. S. 27. Anm. 2.

Am stärksten müßte sich der Einfluß der Aberration zeigen bei Versuchen mit Sternen zu Mittag oder Mitternacht im Meridian, wobei besonders übersichtliche Verhältnisse zu

---

1) Es ist dies schon aus dem Mechanismus des Lichtquants (Ä. u. U. S. 26) anschaulich. Den Übergang von „absoluter" Lichtgeschwindigkeit in Lichtgeschwindigkeit relativ zum Apparat bzw. zur Erde müssen wir uns, wie die Versuche zeigen, als im wesentlichen bereits weit außerhalb der Erde stattfindend vorstellen.

2) In analoger Weise läßt sich der Versuch von Majorana (Phil. Mag. 35. S. 163. 1918 und 37. S. 145. 1919) betrachten, dessen Ergebnis mit obiger Überlegung übereinstimmt.

3) E. Ketteler, Pogg. Ann. 144. S. 364. 1872; W. Veltmann, Pogg. Ann. 150. S. 511. 1873; M. Mascart, Ann. école norm. II. Ser. 1. S. 173. 1872. Es ist jedoch zu bemerken, daß diese Konstruktionen für einen relativ zur Erde bewegten Spiegel Geltung besitzen. Es müßte demnach der Michelsonsche Versuch, in einem relativ zur Erdoberfläche bewegten System ausgeführt, positiv ausfallen, worauf schon Hr. Lenard (Ä. u. U. S. 40) hingewiesen hat. Es ist vielleicht nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, daß die oft angestellten thermodynamischen Überlegungen über bewegte Spiegel durch obiges nicht berührt werden.

erwarten sind bei einfacher Spiegelung, so daß der ganze Strahlengang der einen Strahlhälfte im Meridian verläuft. Derartige Versuche mit Sonnenlicht haben nun, wie S. 116 gezeigt, ein negatives Resultat ergeben.[1])

Physikalisch bedeutet die Gleichheit der Lage der Interferenzstreifen mit irdischem und außerirdischem Licht, daß ebenso wie die beiden Strahlwege von irdischem Licht in gleicher Zeit zurückgelegt werden, dies auch von außerirdischem Lichte geschieht. Inwiefern dies nun trotz des unzweifelhaften Vorhandenseins der Aberration der Fall sein kann, soll im Folgenden betrachtet werden.

Die nächstliegende Annahme ist, daß das Fixsternlicht sich vollkommen analog dem irdischen Licht verhalten hat. Dann muß es aber seine Aberrationskomponente vor der Teilung an der zentralen Glasplatte verloren haben. Dies kann ganz wohl bei der Reflexion am Heliostatenspiegel eingetreten sein[2]), wo das einfallende Licht zuerst mit materiellen Atomen in innige Wechselwirkung getreten ist, so daß der Verlust der seitlichen Komponente, welche wir ja nicht als rein geometrische Erscheinung der vorhandenen Bewegungen, sondern als eine Eigentümlichkeit dieser Lichtquanten betrachten, verständlich wäre. Der reflektierte Strahl hat dann keine seitliche Bewegungskomponente, er verhält sich vollkommen wie irdisches Licht. Der negative Ausfall des Versuches ist dann ohne weiters verständlich. Wir müssen nun untersuchen, ob diese Voraussetzung, daß bei der Einwirkung der materiellen Atome bei der Reflexion die seitliche Komponente verloren geht, auch den sonstigen Erfahrungen bei der Reflexion entspricht. Führt man nun die Konstruktion für einen beliebigen Fall durch [Fig. 3b[3]) zeigt den Fall, daß der Strahl um Mitternacht oder Mittag an der zentralen Glasplatte reflektiert würde], so zeigt sich, daß ein außerirdischer Strahl, der in derselben scheinbaren Richtung einfällt wie ein Strahl irdischen Lichtes, nach der Reflexion von letzterem um den jeweiligen Aberrationswinkel — bis auf Größen zweiter Ordnung — divergiert. Dies steht im Widerspruch zu den Annahmen, die man gewöhnlich zu machen pflegt, daß nämlich für die „relativen" Strahlen (aber nicht für die „absoluten") des Aberrationslichtes die gewöhnlcihen Reflexionsgesetze gültig seien. Eine exakte Prüfung dieses Verhaltens scheint jedoch für die Reflexion nicht vorzuliegen[1]), so daß die Möglichkeit eines derartigen Reflexionsgesetzes und damit der hier gegebenen Erklärung bis zur experimentellen Entscheidung nicht ohne weiteres zurückgewiesen werden kann.[2])

---

[1]) Den Einfluß der Aberration beim Michelsonversuch mit Fixsternlicht hat bereits Hr. K. Vogtherr eingehender behandelt. Astron. Nachr. 5203 [Bd. 217]).

[2]) Über die Möglichkeit, daß dies bereits an der Grenze von Uräther und Erdäther geschehen könnte, vgl. in der gleichzeitigen Abhandlung Hrn. Lenards in diesen Annalen.

[3]) Es ist: AP Richtung und Geschwindigkeit der Lichtquanten, PC die seitliche Bewegungskomponente von P nach C wirkend, AC die Fortpflanzungsrichtung der Energie, AB die Wellenfläche der einfallenden Lichtquanten. $BD = AP$ ($= AC$ bis auf Größen dritter Ordnung) den Radius der Elementarwelle. $CR \parallel BD$ die Richtung des re-

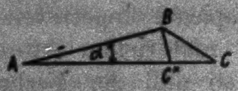


Fig. 3a.

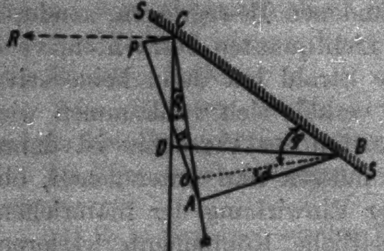


Fig. 3b.

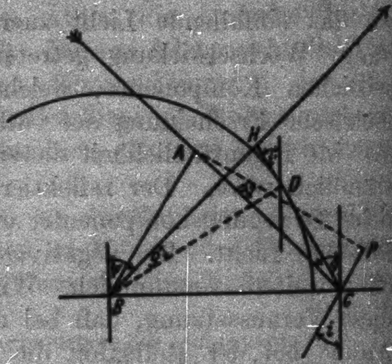


Fig. 4.

---

flektierten Strahles und DC dessen Wellenfläche. CB und AC wären in diesem Sonderfalle die Wellenflächen eines entsprechenden irdischen Strahles.

[1]) Die Versuche zur experimentellen Prüfung dieser Frage befinden sich in Vorbereitung. Der $\sphericalangle \alpha$ in Fig. 3b stellt also nicht den gewöhnlichen Aberrationswinkel dar, der ja nur ein Differenzwert ist, sondern den vollen Aberrationswinkel, in dem das ganze Verhältnis der Geschwindigkeit von Erdäther und Uräther eingehen würde, so daß Feststellung der Absolutbewegung (gegenüber dem Uräther) möglich wäre.

[2]) Sollte sich die Berechtigung dieser Annahme erweisen, so könnte der vorliegende Versuch, *ohne* vorherige Reflexion an einem Heliostatenspiegel angestellt, die Berechtigung unserer Annahme nur *senkrechter* Überlagerung der seitlichen Bewegungskomponente zu prüfen gestatten.

Die zweite Annahme, die man machen kann, ergibt keine Verschiedenheit in der Reflexionsrichtung der sichtbaren irdischen und außerirdischen Strahlen und ist also insofern mit den bisherigen Vorstellungen im Einklang. Sie beruht darauf, daß *die seitlichen Komponenten der Lichtquanten ihre Richtung ebenfalls nach dem Reflexionsgesetz einrichten.*

Die Konstruktion in diesem Falle ergibt Fig. 4. AP ist die Richtung der einfallenden Lichtquanten, PC ihre seitliche Bewegungskomponente in der Zeiteinheit, der „relative" Strahl also AC, während AB die Wellenfront der einfallenden Lichtquanten darstellt. B ist das Zentrum einer neuen Welle, deren Radius in der Zeiteinheit $BD = AP$ beträgt, CD ist ihre Tangente und also gleichzeitig die Wellenfläche der reflektierten Lichtquanten; BD ist deren Fortpflanzungsrichtung, zu der senkrecht noch die seitliche Bewegungskomponente so zu addieren ist, daß $DH = PC$ wird. BH ist dann die Richtung der Energie des reflektierten Strahles, also der „relative" Strahl. Aus den Dreiecken ergibt sich leicht, daß $\sphericalangle \varphi = \sphericalangle \psi$ bis auf Größen zweiter Ordnung in α und daß $i = i'$, also das Reflexionsgesetz auch für die seitlichen Komponenten gilt.[1] Es fällt demnach die Richtung des reflektierten Sternlichtstrahles mit der des irdischen Lichtstrahles zusammen, die Geschwindigkeit in relativer Strahlrichtung ist aber infolge des Vorhandenseins der seitlichen Bewegungskomponente nicht dieselbe wie die des irdischen Lichtes.[2]

Wenden wir dies auf die Verhältnisse unseres Versuches an, so ergibt sich folgendes: Beide Strahlteile, sowohl der

---

[1] Es ist:

$$\begin{aligned} BC : AC &= \sin(90 - \alpha) : \sin(\alpha + \varphi) \\ BC : BH &= \sin(90 - \varrho) : \sin(\varrho + \psi) \end{aligned}$$

Da $AC = BH$ (bis auf Größen dritter Ordnung) und ϱ und α sehr klein, so ist $\alpha + \varphi = \varrho + \psi$. Da $\alpha = \varrho$, wenn $HD = PC$, so ist $\varphi = \psi$. Daraus ergibt sich $i = i'$.

[2] Die Zeitdauer, die das Fixsternlicht zum Hin- und Zurücklaufen in einem Arme braucht, ist, wie aus unserer Konstruktion ohne weiteres folgt, gleich

$$\frac{2l}{c}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\,\mathrm{siu}^2\,\vartheta\right)$$

im günstigsten Falle, wobei ϑ den Winkel zwischen einfallender Strahlrichtung und Bewegungsrichtung der Erde bezeichnet.

nach Norden[1]) als auch der nach Westen laufende, legen denselben Weg zurück wie das irdische Licht und da in beiden Strahlteilen die Bewegungskomponente relativ zum *Lichtquant* gleiche Größe und Richtung hat[2]), werden beide Strahlteile in gleichen Zeiträumen zurückgelegt. Für irdisches Licht gleichlange Wege sind es also auch für Fixsternlicht, unabhängig von ihrer Richtung zur Erdbewegung, womit auch der negative Ausfall beim Vergleich mit irdischem Licht erklärt ist. Doch ist zu beachten, daß die Dauer der Zurücklegung dieser Wege im allgemeinen von der von irdischem Lichte benötigten verschieden ist.[3]) Diese Annahme einer Richtungsänderung der seitlichen Bewegungskomponenten der Lichtquanten nach dem Reflexionsgesetz genügt also sowohl der Bedingung der Richtungsgleichheit von irdischem und Aberrationslicht bei Brechung und Reflexion, als auch dem Ergebnisse der im vorstehenden beschriebenen Versuche über die Geschwindigkeit in verschiedener Richtung zur Aberration verursachenden Bewegung.

Es sei mir hier gestattet allen, die mich bei diesen Versuchen unterstützt haben, meinen herzlichsten Dank auszudrücken, insbesondere Hrn. G.-R. P. **Lenard** für sein stetes Interesse, Hrn. G.-R. M. **Wolf** für die mannigfache Unterstützung auf der Sternwarte, ferner Hrn. R. **Stadler** für seine unermüdliche Mithilfe, der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft für die Gewährung von Mitteln und der Firma C. P. **Goerz** für die Überlassung ihrer wertvollen Instrumente.

Heidelberg, Radiologisches Institut, 30. Juli 1923.

---

[1] Infolge des Vorhandenseins der Mitführung ändert, wie die bekannten Versuche mit wassergefülltem Fernrohr zeigen, das Vorhandensein der Glasplatten nichts an den Verhältnissen.

[2] Das gilt, wie ersichtlich, für den nach Norden verlaufenden Strahl auch vor der Reflexion am Nordspiegel.

[3] Vgl. Anm. 2 vorhergehende Seite.

(Eingegangen 7. August 1923.)

7. *Über Leitfähigkeitsänderung der Phosphore durch Kathodenstrahlen;*

von E. Rupp.

(Aus dem Radiologischen Institut der Universität Heidelberg.)

Die enge Verknüpfung der Lichtemission mit einer Leitfähigkeitsänderung bei den Phosphoren wurde bisher bei Erregung mit Licht¹), bei Ausleuchten²) und Hitzeaustreiben³) des erregten Phosphors nachgewiesen. Im folgenden wird die Kenntnis dieser Verknüpfung für den Fall der Erregung mit Kathodenstrahlen erweitert. Leitfähigkeitsänderung von Dielektrika bei Bestrahlung mit Kathodenstrahlen war schon bei den frühsten Kathodenstrahluntersuchungen⁴) bekannt geworden und ihre weitere Untersuchung bildete von da ab wiederholt Gegenstand eingehender Beschäftigung, sei es diese Leitfähigkeitsänderung als Meßmittel von Elektronenintensitäten⁵) zu verwerten zu suchen oder sei es Probleme der Elektrizitätsleitung⁶) in Dielektrika durch Untersuchung der Leitfähigkeitsänderung durch Kathodenstrahlen zu klären. Im Gegensatz zu diesen bisherigen Untersuchungen, bei denen am Meßkondensator stets das Eigenfeld der Elektrometeraufladung gegen Erde lag, wurde hier die Leitfähigkeitsänderung immer *mit bestimmtem elektrischen Kondensatorfeld* gemessen und die Abhängigkeit der Leitfähigkeit vom angelegten Feld am Kondensator weitgehend untersucht.⁷) — Die

---

1) **P. Lenard** u. **Sem Saeland**, Ann. d. Phys. **28**. S. 476. 1909; **F. Schmidt**, Ann. d. Phys. **44**. S. 329. 1914; **B. Gudden** u. **R. Pohl**, Zeitschr. f. Phys. **2**. S. 181. 1920; **3**. S. 98. 1920; **4**. S. 206. 1921.

2) **B. Gudden** u. **R. Pohl**, Zeitschr. f. Phys. **2**. S. 192. 1920.

3) **E. Rupp**, Ann. d. Phys. **70**. S. 391. 1923.

4) **P. Lenard**, Ann. d. Phys. u. Chem. **64**. S. 288. 1898.

5) **A. Becker**, Ann. d. Phys. **13**. S. 394. 1904; **Eisenhut-Ebeling**, Heidelb. Akad 1921; **O. Eisenhut**, Heidelb. Dissert. 1921.

6) **O. Eisenhut**, a. a. O.

7) Diese Leitfähigkeit im elektrischen Feld vermag außerordentlich große Werte anzunehmen, wie in einer späteren Veröffentlichung ausgeführt werden wird.

Messungen an Phosphoren waren stets *Differenzmessungen* zwischen Phosphor und bloßem Grundmaterial, letzteres nach Art des Phosphors mit Zusatz, aber ohne Metall, geglüht. Die Untersuchung wurde vorzugsweise in der Richtung geführt, über die *Art der Elektrizitätsleitung und über die Zahlenverhältnisse* der bei der Erregung mit Kathodenstrahlen *pro Metallatom weggehenden Elektronen* Aufschluß zu bekommen.

Leitfähigkeitsänderung im elektrischen Kondensatorfeld.

Zur Erzeugung der Kathodenstrahlen diente eine Glühkathodenröhre mit Aluminiumfenster.[1] Spannung und Strom lieferte eine 20plattige Influenzmaschine. Es mußte besonders darauf gesehen werden, daß Geschwindigkeit (meist 30000 Volt) und Intensität der Kathodenstrahlen während einer Meßreihe gut konstant blieben. Eine Spitzenfunkenstrecke gestattete das Konstanthalten der Geschwindigkeit, während die Intensität aus der stets ermittelten Umdrehungszahl der Influenzmaschine überwacht wurde. Bei Änderung der Drehzahl wurde der Ausschlag der Leitfähigkeitsänderung auf eine bestimmte Drehzahl reduziert, da es sich zeigte, daß die Leitfähigkeitsänderung in dem hier in Betracht kommenden Bereich der Kathodenstrahlintensität proportional ist. Als Kondensatoren, in die der trockene Phosphor fein zerrieben eingefüllt wurde, kamen in Anwendung: a) ein einfacher Plattenkondensator; auf der auf Glas aufliegenden Grundplatte aus Messing lag ein Glimmerring, in den der Phosphor eingefüllt wurde; darüber lag als zweite Belegung eine dünne Aluminiumfolie, die von einem Messingring auf den Glimmer angepreßt wurde. Die Kathodenstrahlen treffen also hier parallel zu den Kraftlinien des Kondensatorfeldes auf. Mit dieser Anordnung sind die notwendigen Differenzmessungen zwischen Phosphor und Sulfid wegen fortwährender Änderung von Dicke, Lufteinschlüsse usw. bei jeder Neueinfüllung schwer durchzuführen. Gut bewährte sich hierfür

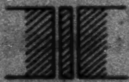


Fig. 1.

b) ein Kondensator nach Fig. 1. Auf einer Glasplatte waren drei Messingstreifen aufgekittet, die zwei 1 mm breite und 1 mm tiefe Rinnen freiließen. Die eine Rinne war mit Phosphor gefüllt, die andere mit Sulfid und der Kondensator so gelegt, daß beide Rinnen symmetrisch im Kathodenstrahlkegel des Al-Fensters lagen. Dadurch war die Ausführung schneller Differenzmessungen unter gleichen Meßbedingungen gewährleistet.

---

[1] O. Eisenhut, a. a. O.

Das Kondensatorfeld lieferte ein variabler Spannungskasten, der mit Kondensator, Drehspulgalvanometer (**Hartmann & Braun**, größte Empf. $4 \cdot 10^{-11}$ Wb) in Reihe geschaltet war. Spannungsbatterie, Galvanometer und Zuleitungsdrähte, ferner eine Wippe zur Umschaltung des Feldes an Phosphor oder Sulfid bzw. des Stromes im Galvanometer, waren durch Metallkasten bzw. Messingröhren sorgfältig geschützt. Dieser Schutz ist eine Grundvoraussetzung für Messungen dieser Art, da sonst stets elt. Wellenstörungen jede Untersuchung unmöglich machen.

Bei Kondensator *b* verlaufen die Kraftlinien des elektrischen Feldes senkrecht zum auftreffenden Kathodenstrahl. Die Dicke der Phosphorschicht ist über Grenzdicke der benutzten Geschwindigkeit (30000 Volt), so daß Leitfähigkeitsänderung der Glasunterlage nicht vorkommen kann. Die Leitfähigkeitsänderung der Lufteinschlüsse im Phosphor ist unmeßbar klein unter vorliegenden Bedingungen, wie durch einen besonderen ergebnislosen Versuch (zwei Metallplatten auf getrennten Glasunterlagen bis auf einen schmalen Luftspalt zusammengeschoben) nachgeprüft wurde. Die Korngröße der benutzten Phosphore war durch Aussieben möglichst einheitlich. Der ganze Kondensator wurde außer der Meßzeit stets im Exsikkator aufbewahrt.

Die Abhängigkeit der Leitfähigkeitsänderung für CaBi1n und CaCu1n vom angelegten Kondensatorfeld zeigt Fig. 2.

Man sieht für CaS nach anfänglich schwächerem Anstieg ein scharf geradliniges Weitersteigen. Anders hingegen die Phosphore. Sie steigen schon bei schwachen Feldern viel stärker an bis zu einem deutlichen Knickpunkt, um dann geradlinig weiterzusteigen, und zwar verläuft dieses Weitsteigen parallel zur CaS-Kurve. (In der Figur sind der Deutlichkeit halber die Ordinaten der Phosphorkurven über der CaS-Kurve auf das Doppelte des Maßstabs darunter überhöht.) — Das *phosphoreszenzfähige Metallatom verursacht also eine ihm eigene Leitfähigkeitsänderung bei Erregung des Phosphors im elektrischen Feld.* Die experimentellen Kurven gestatten diese dem Metallatom zukommende Leitfähigkeitsänderung zu ermitteln. Bildet man nämlich die Differenzkurve Phosphor-Sulfid, so stellt diese die durch das phosphoreszenzfähige Metallatom verursachte Leitfähigkeitsänderung in Abhängigkeit vom angelegten Feld dar. Man findet so für jedes Metallatom eine ihm eigentümliche Kurve (in der Fig. 2 Bi u. Cu), die nach zuerst geradlinigem Ansteigen bei einem bestimmten Feld in eine Art Sättigung übergeht. Der Beitrag der Metallatome zur Gesamtleitfähigkeitsänderung des Phosphors steigt also mit wachsendem Feld zunächst diesem Feld proportional an bis zu einem Grenzwert, der für verschiedenen Metallzusatz und Metallmenge verschieden groß ist und bei verschiedenem Feld erreicht wird. Zu bemerken ist noch, daß die Einbuchtung der CaBi- und CaCu-Kurven, wie die stärkere der CaS-Kurve für schwache Felder bei den Metallatomkurven Bi und Cu zu fehlen scheint. Die absoluten Grenzwerte für verschiedenen Metallzusatz und Metallmenge sind als Funktionen der Zentrenverteilung der Phosphore aufzufassen, daher auch für CaBi größer als für CaCu.

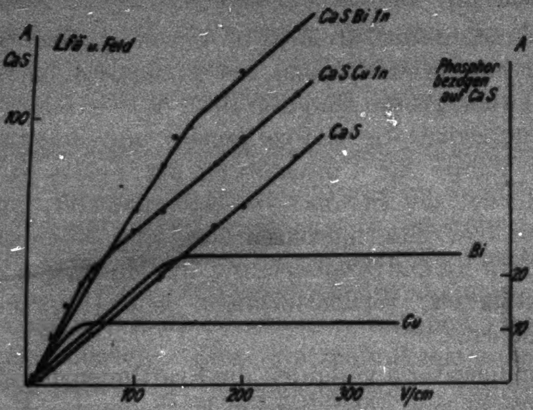


Fig. 2.

Bei den weiteren Messungen wurde das Feld meist so gewählt, daß der Grenzwert der dem Metallatom eigenen Leitfähigkeitsänderung erreicht war, gewöhnlich 150—250 Volt/cm. Höhere Felder verwischen den Unterschied der Ausschläge für Phosphor und Sulfid mehr und mehr, bis zum Verschwinden der Meßbarkeit.

Der *Einfluß der Vorbestrahlung* wurde besonders untersucht, wie in Tab. 1 zusammengestellt.

Tabelle 1.

Phosphor	Lfä. bei erster Bestrahlung	Lfä. nach 5 Min. Pause	Lfä. nach 1 Std. Pause
CaBi	24	25	25
ZnS	32	38	34

Ähnliche Messungen an CaCu und ZnMn lassen den allgemeinen Schluß zu: Die Erdalkalisulfidphosphore lassen keine Änderung ihrer Leitfähigkeit durch Vorbestrahlung erkennen; die *Zinksulfidphosphore* aber zeigen eine *Vergrößerung der Leitfähigkeitsänderung am vorbestrahlten Phosphor,* die nach längerer Ruhezeit wieder zurückgeht. Bei der Messung der Tab. 1 wurde das Feld stets abgeschaltet, so daß der Fall der Erregungsaufspeicherung im elektrischen Feld¹) nicht vorlag. Hingegen gibt die Erklärung des Verhaltens der ZnS-Phosphore im elektrischen Feld²) auch die Erklärung des vorliegenden Versuches. ZnS-Phosphore erleiden im elektrischen Feld eine Polarisation, die nach Schluß der ersten Bestrahlung noch einige Zeit erhalten bleibt, schließlich aber wieder zurückgeht — nicht so jedoch die Erdalkalisulfidphosphore —, und in einem so polarisierten Medium werden die Träger der Leitfähigkeitsänderung sich mit größerer Wanderungsgeschwindigkeit bewegen können, als im zuerst noch unpolarisierten bzw. im Laufe der Zeit wieder entpolarisierten. Dieser leichteren Polarisierbarkeit verdanken die ZnS-Phosphore ihr abweichendes Verhalten bei Ausleuchtung und Aufspeicherung im elektrischen Feld³), bei ihrer Leitfähigkeitsänderung durch Licht⁴), ihrer Dielektrizitätskonstantenänderung⁵) durch Licht, bei ihrer Tilgung⁶) und ihrer Ausleuchtung⁷), und bei ihrer Leitfähigkeits-

---

1) **F. Schmidt**, Ann. d. Phys. 70. S. 161. 1923.

2) **F. Schmidt**, a. a. O. S. 189.

3) **F. Schmidt**, a. a. O.

4) **B. Gudden u. R. Pohl**, Zeitschr. f. Phys. 2. S. 181. 1920.

5) **B. Gudden u. R. Pohl**, Zeitschr. f. Phys. 1. S. 365. 1920.

6) **P. Lenard**, Ausleuchtung und Tilgung 3. S. 157. 1917; **E. Rupp**, Ann. d. Phys. 72. S. 81. 1923.

7) **P. Lenard**, Ausleuchtung und Tilgung 3. S. 63. 1917; **B. Gudden u. R. Pohl**, Zeitschr. f. Phys. 2. S. 192. 1920.

änderung durch Hitzeaustreiben.[1]) Weiter hierauf einzugehen lag nicht in der Absicht der Untersuchung. Wichtig für das folgende ist, daß die Erdalkalisulfidphosphore nach Vorbestrahlung noch dieselbe Leitfähigkeitsänderung zeigen, wie bei der Erstbestrahlung.

Über die Träger der Leitfähigkeitsänderung.

Die aus der Kenntnis der Leitfähigkeitsänderung bei Hitzeaustreiben entwickelte Annahme[2]), *daß die zum Metallatom zurückkehrenden Elektronen Sekundärelektronen auslösen* und diese Sekundärelektronen, vom angelegten Feld erfaßt, die Leitfähigkeitsänderung verursachen, hat sich im vorliegenden nicht allein als treffliche Arbeitshypothese erwiesen, sondern konnte auch wesentlich gestützt werden. Sie ist, wie die Versuche zeigen, noch dahin zu erweitern, daß man *auch dem bei der Erregung weggehenden Elektron* die Fähigkeit zuschreiben muß, auf seinem Weg zur aufspeichernden Stelle Sekundärelektronen zu befreien.

Ohne weiteres folgt aus dieser Annahme die bereits dargestellte Abhängigkeit der Leitfähigkeitsänderung vom Kondensatorfeld. Die sekundär befreite Elektronenzahl der Metallatome erreicht einen Grenzwert, der außer von der Intensität und Geschwindigkeit der Primärelektronen abhängt von der Wanderungsgeschwindigkeit, der Zahl der Metallatome und der Zahl der pro Metallatom abgegebenen Elektronen und der Verteilung der Zentrendauern. Für Elektronenwanderung spricht auch das schon für kleine Felder geradlinige Ansteigen der Bi- und Cu-Kurve im Gegensatz zur deutlichen Einbuchtung der CaS-Kurve, die als Anteil einer Ionenwanderung erklärt werden kann. — Zur Gewinnung weiteren Aufschlusses wurden Rückstandsbildungen und Potentialverteilung im Kondensator untersucht.

Rückstandsladungen. Verwendet wurde ZnSCuα und ZnS, da nur bei Zinksulfidphosphoren Rückstandladungen meßbar waren. Phosphor und Sulfid wurden im elektrischen Feld von 300 Volt/cm bestrahlt. Einige Sekunden nach Schluß der Bestrahlung wurde der Kondensator an das Galvanometer angeschlossen und dessen Erstausschlag gemessen. Die „Dunkel" leitfähigkeit betrug 12 sec. Sie ist in Tab. 2 berücksichtigt

---

[1]) E. Rupp, Ann. d. Phys. 70. S. 391. 1923.

[2]) Diese Anschauung hat Hrn. Lenards lichtelektrische Theorie der Phosphoreszenz als Grundlage.

Tabelle 2.

Zeit nach Schluß der Erregung	2 Sek.	4 Sek.
ZnS	31	10,5
ZnSCu	29	11

Die Tabelle zeigt, daß im Gegensatz zur Leitfähigkeitsänderung bei Bestrahlung mit Kathodenstrahlen[1]) für die dabei zustande kommende Rückstandsladung zwischen Phosphor und Sulfid kein Unterschied sich nachweisen läßt. *Dem phosphoreszenzfähigen Metallatom kommt also keine Rückstandsbildung zu.* Wäre nun die dem Metallatom eigene Leitfähigkeitsänderung hauptsächlich durch Ionen verursacht, so müßte sich dies in Rückstandsladungen kundgeben. Da diese aber für das Metallatom fehlen, liegt der Schluß nahe: *Die dem phosphoreszenzfähigen Metallatom zukommende Leitfähigkeitsänderung wird durch Elektronen hervorgerufen.*

Potentialverteilung. Zur Messung der Feldverteilung wurde ein dem Kondensator *b* ähnlicher benutzt (angelegte Spannung 200 Volt). Er hatte nur eine Rinne, die jetzt 1 cm breit gewählt wurde. Eine lange feine Nadel von 0,07 mm Durchmesser konnte als Sonde in den Phosphor — CaBiα — geschoben werden. Mit einem Wulfschen Elektrometer, das einerseits mit der geerdeten Elektrode (abwechselnd Kathode und Anode), andererseits mit der Sonde verbunden war, wurde die Potentialverteilung im Innern des Phosphors ermittelt, und zwar ohne Bestrahlung, bei Bestrahlung mit Licht der vollen Hg-Lampe und bei Bestrahlung mit Kathodenstrahlen.[2]) Fig. 3 zeigt die Ergebnisse.

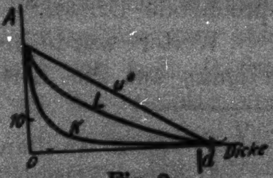


Fig. 2.

Der unerregte Phosphor weist völlig lineare Potentialverteilung auf (*u*). Bei Bestrahlung mit Licht[3]) bildet sich ein deutlicher Kathodenfall aus (*L*). Bei Kathodenstrahlerregung wird dieser *Kathodenfall* noch weit ausgeprägter (*K*). Dieser durch Kathodenstrahlen verursachte Kathodenfall verläuft ganz analog dem bei der Gasentladung in evakuierten Röhren oder der Potentialverteilung in einer Glühkathodenröhre. Diese Analogie spricht dafür, *Raumladungserscheinungen* im Phosphor bei Bestrahlung[1] mit Kathodenstrahlen anzunehmen, für die allein negative Ladungsträger in Betracht kommen.

---

[1]) Diese Leitfähigkeit betrug im vorliegenden Falle etwa 45 Skt.

[2]) Sie entspricht dem „Primärstrom" J_p der Hrn. Gudden u. Pohl. Siehe Zeitschr. f. Phys. 7. S. 65. 1921.

[3]) B. Gudden u. R. Pohl, Zeitschr f. Phys. 7. S. 68. 1921.

Wurde die Phosphorschicht in obigem Kondensator *nur teilweise bestrahlt* (1 Drittel frei, 2 Drittel mit Glimmerblättchen bedeckt), so zeigten sich folgende Erscheinungen. Wurde das Drittel an der Kathode bestrahlt, so trat eine Leitfähigkeitsänderung auf, die nicht dem Drittel der Gesamtleitfähigkeitsänderung (78 Sk.) entsprach, sondern ungefähr der Hälfte (36 Sk.); wurde dagegen das Drittel an der Anode bestrahlt, so betrug die Leitfähigkeitsänderung auch ein Drittel der Gesamtleitfähigkeitsänderung (25 Sk.). — Diese Versuche lassen sich aus dem bereits festgestellten Kathodenfall gut erklären. Die an der Kathode ausgelösten Sekundärelektronen werden durch den starken Spannungsabfall beschleunigt und können, da diese so erlangte Geschwindigkeit leicht die Trägerbildungsspannung der Zentrenmoleküle[2] übersteigen kann, in den unbestrahlten 2 Dritteln weitere Sekundärelektronen auslösen und damit kommt eine Leitfähigkeitsänderung zur Messung, die größer wird, als der bestrahlten Schicht entspricht. An der Anode hingegen ist das Feld so schwach, daß keine neuen Sekundärelektronen befreit werden, daher beträgt die Leitfähigkeitsänderung auch nur das der Gesamtschicht entsprechende Drittel.[3]

Weiter wurde noch der *Einfluß von Ausleuchtung und Tilgung* auf die Leitfähigkeitsänderung von ZnS-Phosphoren untersucht. Ein ZnMnα-Phosphor wurde mit Kathodenstrahlen im Kondensator *b* bestrahlt. Seine Leitfähigkeit betrug 58 Sek. Jetzt wurde er während der Erregung mit dem durch Rotfilter gefilterten Licht eines Nernstfadens ausgeleuchtet. Dabei stieg der Ausschlag auf 72 Sek. Also eine Zunahme durch Ausleuchtung um 14 Sek.

---

[1] Vgl. B. **Gudden** u. R. **Pohl**, a. a. O. S. 69.

[2] Kleine Trägerbildungsspannungen von Metallatomen sind auch sonst angezeigt. Vgl. P. **Lenard**, Quantitatives über Kathodenstrahlen, Heidelb. Akad. 1918. S. 163. Die Trägerbildungsspannung des hier in Betracht kommenden Ca-Atoms beträgt nach **Mohler**, **Foote** und **Stimson** (Bur. of Standards 15. 1919) 6,01 Volt, für das komplexe Zentrenmolekül ist ein noch weit kleinerer Wert anzunehmen.

[3] Auf den Mechanismus dieser Elektrizitätsleitung der ausgelösten Sekundärelektronen sei hier nicht weiter eingegangen. Die von den Hrn. **Gudden** und **Pohl** entwickelten Methoden könnten auch hier Anwendung finden.

Zur Untersuchung auf Tilgung wurde ein ZnCuα-Phosphor verwendet. Seine Leitfähigkeitsänderung betrug 62 Sek. Wurde er in derselben Anordnung wie oben bestrahlt mit dem hier stark tilgenden Licht des Rotfilters, so ging der Ausschlag auf 54 Sek. zurück. Also ein Rückgang durch Tilgung um 8 Sek. — Dieser zunächst merkwürdige Gegensatz zwischen Ausleuchtung und Tilgung steht in vollem Einklang mit dem Bild der Leitfähigkeitsänderung als verursacht durch Sekundärelektronen und dem von Hrn. Lenard entwickelten Mechanismus der Ausleuchtung und Tilgung.[1] Die *Ausleuchtung als molekular lokale Temperaturerhöhung* wirkt ganz im Sinne des Hitzeaustreibens, also *Vermehrung der Leitfähigkeitsänderung* proportional der ausgeleuchteten Zentren. Die *Tilgung* hingegen als lichtelektrische Wirkung am Schwefelatom, wobei das Elektron mit einer Geschwindigkeit, geringer als dem Lichtquant der Phosphorbande entspricht, zurückkehrt, *kann zur Leitfähigkeitsänderung nichts beitragen*, ja sie wird proportional der getilgten Zentrenzahl diese Leitfähigkeitsänderung sogar vermindern, wie es der Versuch auch zeigt.

Die enge Verknüpfung der Lichtemission mit der Leitfähigkeit in allen diesen Versuchen könnte zur Vermutung führen, daß die Leitfähigkeitsänderung lichtelektrische Wirkung des Bandenlichtes als Ursache hätte. Dann müßte man aber auch annehmen, daß das langwellige Licht von z. B. BaCuα im Verhältnis dieselbe Wirkung hätte wie das violette von SrAgβ, was offenbar zu Widersprüchen mit vorliegenden Versuchen und denen über Leitfähigkeitsänderung bei Hitzeaustreiben führte.

Zeitliche Änderung der Leitfähigkeit.

Daß bei den Versuchen über Leitfähigkeitsänderung mit Kathodenstrahlen nicht bloß zurückkehrende Elektronen eine Rolle spielen, sondern auch *die das Metallatom verlassenden Er-*

---

[1] P. **Lenard**, Ausleuchtung und Tilgung. Teil I. Heidelberg 1918.

regungselektronen, beweist die Untersuchung des Verhaltens der Leitfähigkeitsänderung bei wachsender erregender Zeit.

Verwendet wurde Kondensator *b* mit nur einer Meßrinne und als Meßinstrument ein Wulfsches Elektrometer zur Summation der von der Zeit 0 bis *t* frei werdenden Elektrizitätsmengen. Die unmittelbaren Differenzmessungen mit Sulfid konnten unterbleiben, da dieses stets eine der Zeit proportionale Aufladung ergab. Der eine Kondensatorbacken lag auf Spannung der Spannungsbatterie, deren anderer Pol geerdet war, der andere Backen war mit dem Elektrometerfaden verbunden. Der unerregte Phosphor wurde *t* Sek. lang bestrahlt und der Ausschlag des Elektrometers abgelesen. Die so gewonnene Kurve zeigt Fig. 4 für CaBiα 0,1 n. und CaS bei 300 Volt/cm.

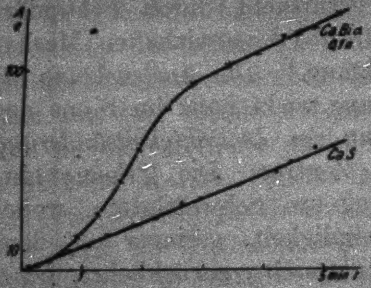


Fig. 4.

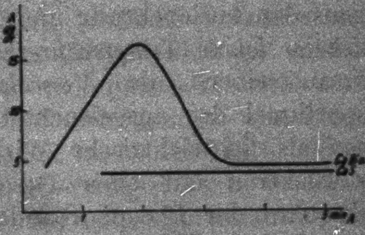


Fig. 5.

Besondere Sorgfalt wurde auf Ermittelung des ersten Anstiegs verwendet. Man sieht an der Phosphorkurve ein erst langsameres Ansteigen, das dann über einen Wendepunkt in steileren Anstieg übergeht bis zu einem scharfen Umbiegen, von wo ab die Kurve weiterhin geradlinig weitersteigt. Dieser letztere Kurventeil verläuft nun nicht parallel der CaS-Kurve, sondern die Phosphorkurve steigt unter konstantem Winkel gegen die Sulfidkurve weiter an. Die Differenz der Ordinaten ergibt auch hier die dem Metallatom zukommende Wirkung, und zwar jetzt den zeitlichen Anstieg der Leitfähigkeitsänderung in dem Maße, in dem der Phosphor aus dem unerregten Zustand in den vollerregten kommt. Volle Erregung ist erreicht, wenn Phosphor- und Sulfidkurve unter konstantem Winkel weiterlaufen. Für diesen Fall der vollen Erregung liefert die Ordinate über der Sulfidkurve ein Maß der von allen phosphoreszenzfähigen Metallatomen des Phosphors bei der Erregung verursachten Leitfähigkeitsänderung.

Daß dieser zeitliche Anstieg der Leitfähigkeitsänderung hauptsächlich durch die bei der Erregung das Metallatom verlassenden Elektronen hervorgerufen wird, erkennt man deutlich, wenn man Kurve Fig. 4 graphisch differenziert, also die Abhängigkeit des Leitfähigkeitsstromes von der Zeit ermittelt, wie in Fig. 5 geschehen.

Nach fast geradlinigem Anstieg erreicht die Kurve ein Maximum und fällt danach wieder bis auf einen konstanten Wert. — Dieser Verlauf hängt unmittelbar mit der Zentrenverteilung im Phosphor zusammen. Bekanntlich werden die Zentren kurzer Dauer am schnellsten erregt, diejenigen längster Dauer klingen nur sehr langsam an. Die in den ersten Sekunden schon erregten Zentren kurzer Dauer tragen offenbar zu Leitfähigkeitsänderungen recht wenig bei. Hingegen steigt die Kurve zu ihrem Maximum an, wenn gerade die sehr zahlreichen Zentren mittlerer und längerer Dauer erregt werden. Schließlich bleiben noch die wenigen Zentren längster Dauer übrig, die nach etwa 3 Minuten auch voll erregt sind. Diese Anklingungszeiten bei Erregung mit Kathodenstrahlen stimmen mit denen aus Lichtsummenmessungen[1]) gut überein. — Die Elektronen der *Zentren kurzer Dauer* (meist kleine Zentren) werden auf ihrem Weg vom Metallatom zur aufspeichernden Stelle bei der Erregung *kaum Sekundärelektronen* auslösen können, die Elektronen der *Zentren mittler und langer Dauer* jedoch werden viel weitere Wege zu durchqueren haben, auf denen sie eine mehr oder weniger *große Zahl Sekundärelektronen* befreien können, ebenso die Elektronen der Zentren längster Dauer. Doch sind diese größten Zentren in der Minderzahl, daher das Abfallen der Kurve Fig. 5. Der horizontale Teil dieser Kurve wäre dann, da ja alle Zentren langer Dauer schon erregt sind und während der Versuchsdauer nicht abklingen[2]), aufzufassen als stationärer Zustand zwischen Erregung und Abklingen der Zentren kürzerer Dauer, so daß hier sowohl entweichende Elektronen wie zurückkehrende Elektronen die Sekundärelektronen der Leitfähigkeitsänderung auslösen.

---

[1]) Vgl. P. **Lenard**, Lichtsummen, Heidelb. Akad. 1909.

[2]) Ausleuchtung durch Kathodenstrahlen wird für die hier benutzten geringen Strahlintensitäten nicht angenommen; sie würde zu den Elektronen der Zentren kurzer Dauer noch die entweichenden und abklingenden der Zentren längerer Dauer hinzufügen. Vgl. übrigens E. **Rupp**, Ann. d. Phys. 72. S. 100. 1923.

Ermittelung der pro Metallatom entweichenden Elektronen aus der zeitlichen Leitfähigkeitsänderung.

Wie schon angedeutet[1]), liefert mit Erreichen der vollen Erregung die Ordinate über der Sulfidkurve der Kurve Fig. 4 ein Maß der von sämtlichen entweichenden Elektronen ausgelösten Sekundärelektronen. Kennt man die Zahl der phosphoreszenzfähigen Metallatome, so kann man für Phosphore verschiedener Metalle aus den auf gleiche Metallatomzahl reduzierten obigen Ordinatenwerte unmittelbar die Zahlverhältnisse der pro Metallatom entweichenden Erregungselektronen bestimmen. Ist für ein Metall diese Zahl der pro Metallatom entweichenden Elektronen absolut bekannt, so läßt sie sich auch für andere Metalle augeben. Das Schwierige einer derartigen Messung ist stets die Ermittelung der Zahl der phosphoreszenzfähigen Metallatome, was genaue Kenntnis und Beherrschung des Chemismus der Phosphore voraussetzt.

Solche wohldefinierten Phosphore standen mir durch eine „absolute Messung" von Hrn. **Scheifele**[2]) zur Verfügung. Verwendet wurden hier: CaBiα 0,1 n., CaCuα $^1/_2$ n. und SrAgβ $^1/_{400}$ n. Außerdem wurden im letzten Abschnitt benutzt: CaBiα 1 n., CaBi 0,02 n., CaBi 0,01 n.; CaCuα 2 n., CaCu 1 n., CaCu $^1/_3$ n., CaCu $^1/_{10}$ n.; SrAgβ $^1/_2$ n., SrAg 0,25 n., SrAg 0,008 n., SrAg 0,001 n., SrAg 0,0008 und SrAg 0,00018 n. Die Ermittelung des in den Zentren verarbeiteten Metallgehalts erfolgte für Bi nach dem Verfahren der Herren **Lenard** und **Hausser**[3]), Druckzerstörung wurde eigens untersucht und als Faktor 1,12 gefunden. Für Cu und Ag standen die Messungen Hrn. **Scheifeles**[4]) zur Benutzung. Die Eindringtiefe der Kathodenstrahlen wird für SrS und CaS als gleich angenommen, auch wird tilgungsfreie Erregung[5]) der Zentren kurzer Dauer vorausgesetzt.[1]) Das Kondensatorfeld betrug 300 Volt/cm. Die Bestrahlungsdauer währte 4 Minuten. Nach der Messung wurde das verwendete Phosphorpulver gewogen. Tab. 3 zeigt die Ergebnisse. Unter Leitfähigkeitsänderung ist dabei der Ordinatenwert über der Sulfidkurve zu verstehen. Die reduzierten Metallgehalte für 1 g Phosphor sind aus den bei der Präparation zugegebenen Metallmengen um den Präparationsverlust und um Druckzerstörung korrigiert.

---

[1]) Hervorzuheben wäre noch annähernd gleiche Verteilung der Austrittsgeschwindigkeiten der Sekundärelektronen bei verschiedenen Metallen unter Verwendung konstanter Primärgeschwindigkeiten (30000 Volt), eine Voraussetzung, die für lichtelektrisch ausgelöste Elektronen tatsächlich erfüllt ist. Vgl. C. **Ramsauer**, Ann. d. Phys. 45. S. 1121. 1914.

[2]) Hrn. **Scheifele** sei dafür auch an dieser Stelle mein Dank ausgesprochen.

[3]) P. **Lenard** u. W. **Hausser**, Heidelb. Akad. 1913.

[4]) Worüber Hr. **Scheifele** berichten wird.

[5]) E. **Rupp**, Ann. d. Phys. 72. S. 81. 1923.

Tabelle 3.

Phosphor	Red. Metallmenge pro g Phosphor	Gewicht g	In der Schicht vorhandene Metallmenge	Lfä.	Lfä. / vorhandene Metallmenge	Verhältnis
CaBi α	$1070 \cdot 10^{-6}$ g	0,042	$4{,}5 \cdot 10^{-7}$ g	341	7,58	1 : 2
SrAg β	$54 \cdot 10^{-6}$ „	0,048	$2{,}6 \cdot 10^{-7}$ „	40,4	15,5	1 : 1
CaCu α	$74 \cdot 10^{-6}$ „	0,039	$2{,}9 \cdot 10^{-7}$ „	44,8	15,4	

Die Tab. 3 zeigt, daß die auf den vorhandenen Metallgehalt reduzierten Leitfähigkeitswerte im Verhältnis ganzer Zahlen stehen soweit die Genauigkeit geht. Daraus ist zu schließen: *Die bei Erregung mit Kathodenstrahlen pro Metallatom entweichenden Elektronen* sind bei den verwendeten Phosphoren *für Silber und Kupfer dieselben* und sie sind für Silber und Kupfer *doppelt so groß wie für Wismut.*[2])

Auch noch auf andere Weise lassen sich obige Verhältniszahlen ermitteln, nämlich aus dem Gang der Leitfähigkeitsänderung mit dem Metallgehalt ein und desselben Phosphors.

Abhängigkeit der Leitfähigkeitsänderung vom Metallgehalt.

Mittelst Kondensator *b* in der zu Anfang (S. 128) beschriebenen Meßanordnung wurden Differenzmessungen mit CaS bzw. SrS und den auf S. 138 aufgezählten Bi-, Cu- und Ag-Phosphoren durchgeführt. Feld 300 Volt/cm. Die dem Metallatom zukommende Leitfähigkeitsänderung ist in Abhängigkeit vom

---

1) Die geringen Verunreinigungen der benutzten Phosphore kommen kaum in Betracht. Da es sich bei den hauptsächlichsten Messungen um Verhältnisbildungen handelt, fallen sie auch teilweise wieder heraus.

2) Nimmt man für Wismut 4 Elektronen an, so würden für Ag und Cu 8 Elektronen folgen. P. Lenard u. W. Hausser, a. a. O.

Metallgehalt in Fig. 6 u. 7[1]) dargestellt. Die eingetragenen Metallmengen sind bereits reduziert. Zur besseren Deutlichkeit und für spätere Zwecke sind die Messungen mit geringem Metallgehalt jeweils für sich eingetragen.

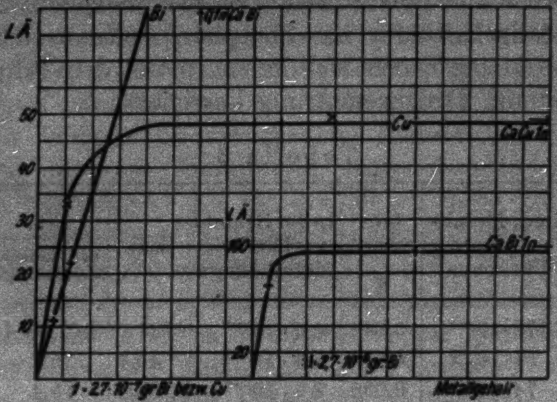
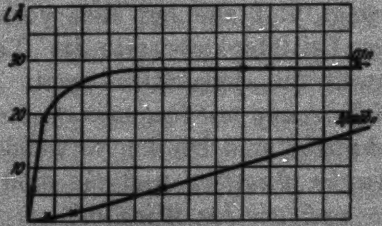


Fig. 6. CaBi und CaCu.



Obere Kurve: Abszisseneinheit $= 2{,}7 \cdot 10^{-7}$ g Ag } Metall-
Untere „ : „ $= 1{,}85 \cdot 10^{-8}$ g Ag } gehalt

Fig. 7. SrAg β.

Man sieht in all diesen Kurven für geringen Metallgehalt ein der Metallmenge proportionales Ansteigen der Leitfähigkeitsänderung, die ziemlich rasch zu einem Grenzwert aufsteigt. — Die *Zahl der ausgelösten Sekundärelektronen* ist also *für geringe Metallmengen diesem Metallgehalt proportional* und geht in einen Grenzwert über, der bei Silber eher als bei Kupfer und hier wieder eher als bei Wismut erreicht wird. Auch nimmt dieser Grenzwert von Ag über Cu nach Bi zu. Dieses Verhalten steht wohl mit der Zentrenverteilung dieser Phosphore in ursächlichem Zusammenhang. Da sich hier die Leitfähigkeitsänderungen auf den konstanten Teil der Fig. 5 beziehen, also auf Gleichgewicht zwischen entweichenden und rückkehrenden Elektronen, ist für die kurzdauernden Zentren des SrAgβ-Phosphors eine geringere Zahl Sekundärelektronen zu erwarten, wie bei den länger dauernden Zentren des CaCuα oder gar des CaBiα, was aus den experimentellen Kurven auch zu ersehen ist. — Da im ersten Ansteigen der Kurven Figg. 6 u. 7 die Sekundärelektronenzahl proportional dem Metallgehalt verläuft, müssen für Phosphore verschiedener wirksamer Metalle diese *ersten Anstiege im Verhältnis der pro Metallatom ausgelösten Sekundärelektronen* stehen; also ist damit ein weiterer Weg zur Ermittelung dieser Elektronenzahl gegeben. (S. nächsten Abschnitt.)

---

[1] Die Pfeile rechts an der Figur entsprechen außerhalb der Abbildung liegenden Punkten und geben die Größe der Ausschläge bei dem dazu angegebenen Metallgehalt an.

Wichtig ist schließlich noch zu wissen, wie sich die *Leitfähigkeit bei weiterer Steigerung des Metallgehalts* verhält. Verglichen wurde zunächst ein SrCuα-1n. und ein stark momentanleuchtender SrCuα unsicheren Metallgehalts. Das SrCu-1n.-Präparat zeigte dabei ungefähr die doppelte Leitfähigkeit wie der SrCu mit Momentanleuchten. Momentanzentren scheinen also zur Leitfähigkeit nichts beizutragen.

Setzt man einem CaBi-Phosphor *Wismutnitrat zu* ohne nochmaliges Glühen, mischt Phosphor und Nitrat gut durcheinander und mißt die Leitfähigkeit dieses Präparats, so könnte man annehmen, daß zur Leitfähigkeit des Phosphors noch eine dem Wismutnitrat entsprechende Leitfähigkeit auftreten wird, da ja auch die unverwertet im Phosphor liegenden Bi-Atome von Kathodenstrahlen getroffen und zur Abgabe von Sekundärelektronen veranlaßt werden. Dies zu untersuchen, wurde einem CaBiα 1n. die 1n-Metallmenge als Nitrat — also ohne zu glühen — zugefügt. Eine neu hinzutretende Leitfähigkeit war aber nicht nachzuweisen. — Nach Art des Phosphors gebundene Metallatome sind also einer viel größeren Sekundärstrahlung zugänglich, ein Resultat, das aus anderen Untersuchungen schon länger bekannt war und auf Übertragung der vom ganzen Zentrum aufgenommenen Energie auf das Metallatom schließen läßt.[1])

Um weiter Aufklärung zu schaffen, wurde dem Phosphor die hundertfache Metallmenge seiner Normalität als Wismutnitrat — ohne zu glühen — zugesetzt und seine Leitfähigkeit in Abhängigkeit vom Kondensatorfeld gemessen. Fig. 8 zeigt, daß die so gewonnene Kurve viel steiler als die des CaBi α 1n. ansteigt. Für genügend große Felder geht sie wieder in eine Gerade über, jedoch ist diese Gerade nicht der entsprechenden von CaBi α 1n. parallel, sondern steiler ansteigend. Die CaBiα-1n.-Kurve scheint hier von einer vom Ursprung an geradlinig ansteigenden Kurve nach Art der des reinen CaS überlagert. Die hinzugefügte große Wismutmenge zeigt also jetzt eine Vergrößerung der Gesamtleitfähigkeit, jedoch ohne scharfes Umbiegung der Kurve hervorzurufen, also ohne Ausbildung eines dem Bi-Atom zukommenden Grenzwertes. Die Differenzkurven der Fig. 1 sind also nur durch die phosphorszenzfähigen Metallatome verursacht, nicht durch irgendwelche frei im Grundmaterial liegende Atome desselben Metalls.

---

[1]) Vgl. P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen, S. 156. Heidelb. Akad. 1918.

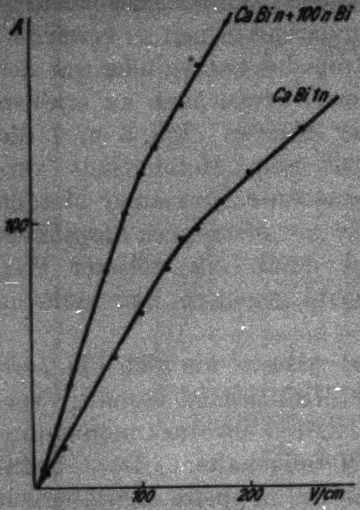


Fig. 8.

Dieses Ergebnis versichert, daß bei Zustandekommen der Kurven Figg. 6 u. 7, wie auch bei allen vorhergehenden Messsungen, nur die phosphoreszenzfähigen Metallatome in Betracht kommen.

Ermittelung der Elektronenzahl pro Metallatom aus der Leitfähigkeitsänderung mit dem Metallgehalt.

Schlägt man oben angegebenen Weg ein, aus der Steigung der Leitfähigkeit mit kleinem Metallgehalt die dem Metallatom zukommende Sekundärelektronenzahl zu ermitteln, so muß man berücksichtigen, daß man es hierbei nicht mit den entweichenden Elektronen zu tun hat, wie in der bereits durchgeführten Methode der zeitlichen Leitfähigkeitsänderung und auch nicht mit den zurückkehrenden Elektronen, wie in der „absoluten Messung" der Herren **Lenard** und **Hausser**[1]) oder wie sie auch aus der Leitfähigkeit durch Hitzeaustreiben¹) möglich wäre, sondern, wie schon hervorgehoben, hat man es hier mit Sekundärelektronen zu tun, die teils von den bei Erregung entweichenden, teils von den bei Abklingung zurückkehrenden Elektronen der Zentren kürzerer Dauer ausgelöst werden. Es tragen also hierfür nicht alle phosphoreszenzfähigen Metallatome des benutzten Präparates zur Leitfähigkeit bei, sondern nur ein bestimmter, nicht näher zu ermittelnder Bruchteil. Da aber die Versuchskurven zeigen, daß die Leitfähigkeit der Gesamtzahl der phosphoreszenzfähigen Metallatome proportional ist, so ist die einfachste Annahme die, daß die Kurvensteigungen der Elektronenzahl pro Metallatom proportional sind. Diese Steigungen sind nun

---

[1]) P. Lenard u. W. Hausser, a. a. O.

$$\begin{array}{ll}\text{für Bi} & 3{,}23\\ \text{für Cu} & 5{,}75\\ \text{für Ag} & 6{,}31\end{array}\begin{array}{l}\left.\vphantom{\begin{array}{l}a\\a\end{array}}\right\}\text{ also } 1:1{,}78\\ \left.\vphantom{a}\right\}\quad 1:1{,}08\end{array}$$

woraus folgt: *Die Elektronenzahlen pro Metallatom sind für Silber und Kupfer dieselben,* und: *Das Verhältnis der Elektronenzahl pro Metallatom von Silber bzw. Kupfer zu Wismut beträgt etwa 1,8.*

Nimmt man für Wismut 4 bzw. 1 an, so würde für Silber und Kupfer 7 bzw. 2 folgen, also eine ähnliche Zahl wie aus erd zeitlichen Leitfähigkeitsänderung.

Das auf zwei verschiedenen Wegen gewonnene Ergebnis, gefunden unter der weitgehend geprüften Voraussetzung, daß die Leitfähigkeit durch Sekundärelektronen, die von zurückkehrenden wie entweichenden Elektronen des phosphoreszenzfähigen Metallatoms ausgelöst werden, verursacht wird, läßt sich also zusammenfassen: *Bei Erregung mit Kathodenstrahlen geben das Kupfer- und das Silberatom der CaCu α und SrAg β-Phosphore gleichviele Elektronen ab und diese Elektronenzahl beträgt das Doppelte der des Wismutatoms in CaBi α.*

Da die Methode der zeitlichen Leitfähigkeit mit besser definierten Erregungsverhältnissen arbeitet als obige, ist ihr wohl mehr Gewicht beizumessen. Beide Methoden stehen und fallen mit dem zugrunde gelegten Bilde der Leitfähigkeit als Sekundärelektronenwirkung. Doch scheint dieses Bild durch die Gesamtheit der Ergebnisse dieser Untersuchung

---

1) **E. Rupp**, Ann. d. Phys. **70**. S. 400. 1923.

hinreichend gestützt. Beide Methoden sind in ihrer experimentellen Durchführung nicht mit den Schwierigkeiten der absoluten Messung äußerst geringer Lichtenergien behaftet, wie die von den Herren Lenard und Hausser ausgeführte Ermittlung der Elektronenzahl 4 bei CaBi α; sie liefern allerdings auch nur Relativzahlen der Elektronen. Gemeinsam ist aber allen Methoden die Schwierigkeit der absoluten Ermittlung der außerordentlich geringen, im Phosphorpräparat, und zwar wirksam in den Zentren, vorhandenen Metallmengen, was bisher nicht erlaubt, irgendeine der Methoden zur Präzisionsmessung auszubilden.

Das Ergebnis, daß Cu und Ag *dieselbe Elektronenzahl* abgeben, mag man mit der Stellung dieser Elemente in derselben Vertikalreihe des periodischen Systems in Zusammenhang bringen. Wichtiger scheint aber ein etwaiger *Zusammenhang mit den Phosphorserientypen* Hrn. F. Schmidts[1]), derart, daß den Metallatomen eines bestimmten Serientyps dieselbe Zahl abgebbaren Elektronen zukommt. CaCu α und SrAg β gehören beide demselben Typ an, und zwar Art 2 der Schmidtschen Einteilung; CaBi hingegen gehört zu Art 1. Verallgemeinert man diese Beziehungen, so liegt der Schluß nahe: *Alle Phosphore der Schmidtschen Serienart 2 geben bei maximaler Erregung doppelt so viele Elektronen pro Metallatom ab als die Phosphore der Art 1.* Über die absoluten Zahlen dieser Elektronen soll keine Aussage versucht werden.

Zum Schluß sei es mir gestattet, Hrn. Geheimrat Lenard für seine wertvolle Beratung auch an dieser Stelle meinen Dank auszusprechen.

Heidelberg, Juni 1923.

---

1) F. Schmidt, Ann. d. Phys. **64**. S. 731. 1921.

(Eingegangen 7. August 1923.)

8. *Anisotropie der flüssigen Kristalle bezüglich ihrer Dielektrizitätskonstanten und ihrer elektrischen Leitfähigkeit;*

von W. Kast.

(Dissertation Halle a. S.)

I. Beschreibung und Einteilung des Versuchsmaterials.

O. Lehmann[1]) bezeichnet als flüssig- (bzw. fließend-) kristallinisch diejenigen hochwertigen organischen Substanzen, die zwischen dem kristallinisch-festen und dem normalen amorph-flüssigen Zustande in einem für jede einzelne Substanz charakteristischen Temperaturintervall eine eigenartige Phase zeigen. Diese erscheint dem bloßen Auge als eine trübe Schmelze, ist doppelbrechend und weist eine überraschende Analogie zu den gewöhnlichen einachsigen Kristallen auf. Oft ist diese Phase auch dem bloßen Auge gar nicht als absonderlich erkennbar. Doch beweisen dann Beobachtungen in konvergentem polarisiertem Licht die Pseudoisotropie, da dann genau wie bei einem senkrecht zur optischen Achse geschnittenen einachsigen Kristall das Achsenkreuz mit den Ringen auftritt.

Nach Bose[2]) hat man sich diese kristallinischen Flüssigkeiten so vorzustellen, daß die ihnen nach Vorländer eigentümlichen langgestreckten Moleküle sich nicht in vollkommener Unordnung durcheinander bewegen, sondern eine Tendenz haben, sich parallel zu legen. Meist aber ist die Kraft der Wärmebewegung stark genug, eine völlige Ordnung zu verhindern, und es bilden sich nur Schwärme von etwa 0,01 mm Größenordnung aus, durch deren unregelmäßige Lage die Trübung des Lichtes verursacht wird.

---

[1]) O. Lehmann, Flüssige Kristalle. Leipzig 1904 und Ann. d. Phys. 2. S. 676. 1900.

[2]) P. Bose, Phys. Zeitschr. 8. S. 513. 1907; 9. S. 708. 1908; 10. S. 230. 1909; 12. S. 60. 1911.

1. Die Substanzen, bei denen die Wärmebewegung nur die Bildung solcher einzelnen Schwärme zuläßt, möchte ich in der ersten Gruppe zusammenfassen. Deren Charakteristikum wäre also die Unordnung der Schwarmachsen, d. h. der mittleren Molekülängsachse der einzelnen Schwärme, oder das Fehlen einer spontanen Pseudoisotropie.

Von den untersuchten Substanzen fallen in diese Gruppe das Azoxyanisol, Azoxyphenetol und Anisaldazin.

2. Als zweite Gruppe möchte ich dann die Substanzen bezeichnen, die einer spontanen Pseudoisotropie fähig sind. Bei diesen richten sich in dünnen Schichten unter der Wirkung der Flächen, zwischen denen die Schmelze sich befindet, alle Schwarmachsen parallel und zwar senkrecht zu diesen Flächen. Beim Durchblicken in dieser Richtung verhält sich die Phase wie ein senkrecht zur optischen Achse geschnittener einachsiger Kristall.

Hierhin gehören der Äthoxybenzalamino-α-methylzimtsäureäthylester und der Phenylbenzalamino-α-äthylzimtsäurepropylester.

Man kann jedoch auch bei den Substanzen der ersten Gruppe selbst in dickeren Schichten die Bildung eines makroskopischen Schwarmes erreichen. Bringt man nämlich eine solche Schmelze in ein magnetisches Feld von einigen tausend Gauss Feldstärke, so bemerkt man beim Durchblicken in der Kraftlinienrichtung ein Verschwinden der Trübung.[1] Diese Aufhellung kommt dadurch zustande, daß die Moleküle sich mit ihren Längsachsen in die Richtung der magnetischen Kraftlinien stellen. Eine so magnetisch gerichtete Schicht verhält sich optisch ebenfalls wie ein senkrecht zur optischen Achse geschnittener einachsiger Kristall.[2]

Nach Beobachtungen von **Mauguin**[2]), der am Azoxyanisol und Azoxyphenetol unter ganz besonderen Vorsichtsmaßregeln in ganz dünnen Schichten ebenfalls eine spontane Pseudoisotropie fand, und nach Beobachtungen von **Vieth**[3]), die am Äthoxybenzalamino-α-methylzimtsäureäthylester bei noch körnig wachsender Phase unter der Wirkung eines magnetischen Feldes eine völlige Klärung ergaben, könnte man dazu neigen, den Unterschied zwischen beiden Gruppen nur für einen quantitativen zu halten. Ich muß jedoch die Unterscheidung durchführen, da sich bezüglich der Dielektrizitätskonstanten ein eindeutiger qualitativer Unterschied zwischen beiden Gruppen ergab. Die Gründe für die größere Stabilität der pseudoisotropen Phasen bei den Substanzen der zweiten Gruppe dürften also tiefer liegen; Bose nimmt eine bestimmte Massenverteilung innerhalb der langgestreckten Moleküle an.

---

[1] **P. Bose**, a. a. O.

[2] **H. v. Wartenberg**, Phys. Zeitschr. **12**. S. 837. 1911 u. **Mauguin**, Compt. rend. **152**. S. 1680. 1911.

[3] **G. Vieth**, Diss. Halle, 1910.

3. Auf Grund des magnetischen Verhaltens muß man noch eine dritte Gruppe der flüssig-kristallinischen Substanzen unterscheiden. Es gibt nämlich auch Schmelzen, die auf ein magnetisches Feld überhaupt nicht reagieren, so das Cholesterylbenzoat, der Anisalaminozimtsäureäthylester und der Azoxybenzoesäureäthylester. Diese Verbindungen bezeichnet Lehmann als fließend-kristallinisch. Ihre trüben Schmelzen zeichnen sich durch besondere Zähigkeit aus und enthalten noch Kristallindividuen mit Resten einer polyedrischen Struktur.

II. Die dielektrischen Messungen.

Aus der Doppelbrechung der trüben Schmelzen schließt schon Lehmann[1]) auf eine Anisotropie bezüglich ihrer Dielektrizitätskonstanten. Dem Nachweis dieser weiteren Analogie zu den gewöhnlichen einachsigen Kristallen galt der erste und zugleich der Hauptteil dieser Arbeit.

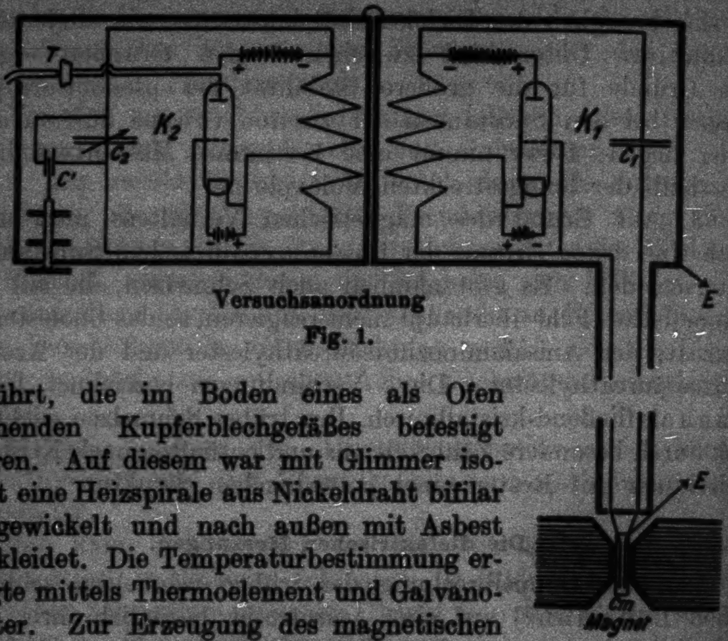
Die *Versuchsanordnung* mußte gestatten, unter Benutzung der magnetischen Anisotropie der Substanzen eine Änderung der Dielektrizitätskonstanten gegenüber dem ungeordneten Zustande nachzuweisen. Zum mindesten bei den Substanzen der ersten Gruppe war auf Grund der oben entwickelten Anschauungen eine meßbare Änderung zu erwarten. Daher wurde in die von Herweg[2]) angegebene Anordnung zur Messung sehr kleiner Kapazitätsänderungen mittels ungedämpfter Schwingungen ein Meßkondensator mit der flüssig-kristallinischen Substanz als Dielektrikum eingeschaltet (Fig. 1), der geheizt und in ein magnetisches Feld gebracht werden konnte. Er bestand aus zwei Messingplatten, wie sie Fig. 2 zeigt. Eine U-förmige Glimmerplatte bildete die seitliche

---

1) O. Lehmann, a. a. O.

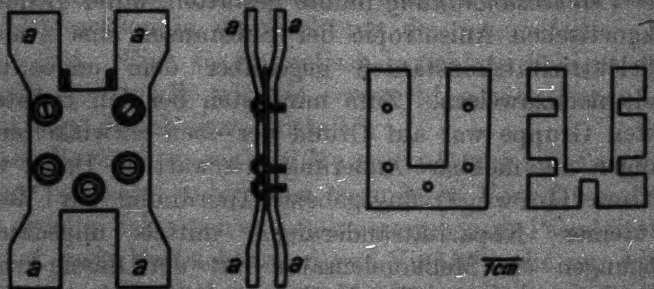
2) J. Herweg, Verhandlungen d. D. Phys. Ges. 17/18. S. 572. 1919.

Gefäßwandung und war gegen die Platten mit zwei entsprechend zugeschnittenen Zinnfolien abgedichtet. Mittels der Lappen (*a*—*a*) wurde der Kondensator zur Isolation in Glasschienen geführt, die im Boden eines als Ofen dienenden Kupferblechgefäßes befestigt waren. Auf diesem war mit Glimmer isoliert eine Heizspirale aus Nickeldraht bifilar aufgewickelt und nach außen mit Asbest umkleidet. Die Temperaturbestimmung erfolgte mittels Thermoelement und Galvanometer. Zur Erzeugung des magnetischen Feldes wurde ein Halbringmagnet nach Dubois benutzt. Seine Feldstärke wurde in Abhängigkeit von der Magnetisierungsstromstärke einmal mittels der Induktionsmethode nach Verdet, zum anderen mittels der Steighöhenmethode nach Quincke bestimmt. Der Magnet war in hinreichender Entfernung von den Schwingungskästen



Versuchsanordnung

Fig. 1.



Meßkondensator Glimmerscheibe Zinnfolie

Fig. 2.

aufgestellt, sodaß eine Störung der Schwingungen infolge etwaiger Beeinflussungen der Glühkathodenröhren nicht auftrat. Die Leitungen zum Meßkondensator wurden durch ein geerdetes Bleirohr elektrisch geschützt. Weiter waren das Kupferblechgefäß, das den Kondensator aufnahm, und die Kondensatorplatte, an die das Thermoelement angepreßt wurde, geerdet. Die magnetischen Kraftlinien verliefen senkrecht zu den Kondensatorplatten.

Außer diesem Meßkondensator *Cm* enthielt der Schwingungskreis K_1 noch einen zweiten Kondensator C_1, der mit *Cm* in Serie geschaltet und von derselben Größenordnung war. Er diente nur zur Herabsetzung der Dämpfung. Diese wäre nämlich sonst wegen der Leitfähigkeit des flüssig-kristallinischen Dielektrikums so groß geworden, daß keine Schwingungen mehr zustande gekommen wären.

Der Kreis K_2 enthielt einen Drehkondensator C_2, um auf K_1 abstimmen zu können, und außerdem einen feinverstellbaren Kondensator C', der C_2 parallel lag und dazu diente, die in *Cm* auftretende Kapazitätsänderung auszugleichen. C' bestand aus zwei Messingplatten von etwa 2 qcm Größe, zwischen die mittels einer Schlittenverschiebung ein Glimmerblättchen eingeschoben werden konnte. Die Trommelteilung gestattete eine Ablesung auf 10^{-2} mm. Die Eichung von C' in Schwebungen bei anfänglich schwebungsfreier Resonanz der beiden Kreise ergab eine so tadellos lineare Abhängigkeit der Kapazität von der Verschiebung des Glimmerblättchens, daß diese Verschiebung als Maß für die auftretende Kapazitätsänderung benutzt werden konnte.

Die Selbstinduktionen beider Kreise waren konstant. Daher folgt aus der Thomsonschen Formel die Beziehung

$$\frac{\Delta n}{n} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta C}{C},$$

wenn man mit n die Frequenz der Schwingungen, mit C die Kapazität des Schwingungskreises bezeichnet. Da aber außer dem vorgeschalteten Kondensator C_1 auch noch der Teil von *Cm*, der das Glimmer-U als Dielektrikum hat, konstante Kapazität behält, und da es unmöglich ist, genau anzugeben, wie groß die Kapazität dieses unveränderlichen Teiles von *Cm* im Vergleich zur gesamten Kapazität *Cm* ist, so kann die Änderung der Dielektrizitätskonstanten in *Cm*, die einer bestimmten Verstellung von C' entspricht, nur der Größenordnung nach angegeben werden. Die Kapazitätsänderung $\Delta C/C$ und die zugehörige Dielektrizitätskonstantenänderung $\Delta\varepsilon/\varepsilon$ verhalten sich ungefähr wie 10:1. Die untersuchten Substanzen haben im flüssig-kristallinischen Zustande sehr wenig verschiedene Dielektrizitätskonstanten. Daher entspricht bei allen Messungen der Verschiebung des Glimmerblättchens in C' um 1 mm fast die gleiche Änderung der Dielektrizitätskonstanten, nämlich etwa $5 \cdot 10^{-3}$ ($\Delta n = 500$, $\lambda = 200\,m$, $\varepsilon \sim 2$).

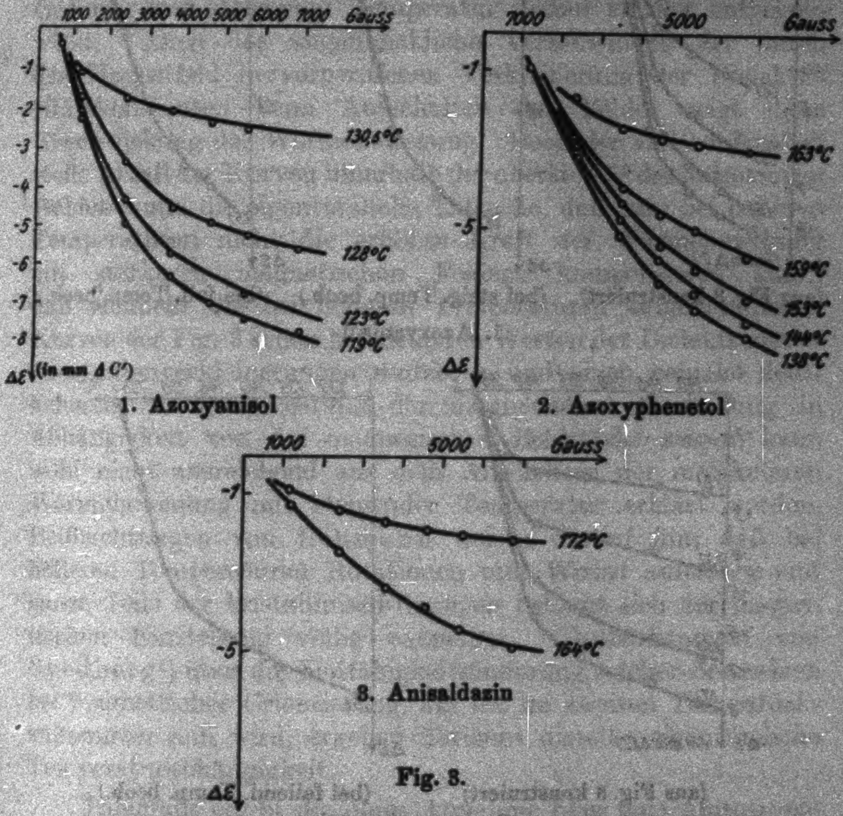
Die Ausführung der Messungen geschah in der Weise, daß die zu untersuchende Substanz in pulverförmigem Zustande in den oben ausgefrästen Rand des Meßkondensators eingefüllt wurde, nachdem dessen Temperatur deren Klärpunkt überschritten hatte. Sie schmolz dann momentan und erfüllte den ganzen Raum zwischen den Platten gleichmäßig. Darauf wurde die Temperatur allmählich erniedrigt und dabei der Differenzton beider Schwingungskreise mit und ohne Feld verglichen. Da die Umwandlungspunkte bekannt sind, kann man aus den abgelesenen Temperaturen erkennen, wann man sich im flüssig-kristallinischen Gebiet befindet. Man merkt es aber auch an einer plötzlichen Änderung der Dielektrizitätskonstanten. In Übereinstimmung mit früheren Beobachtungen[1]) konnte ich nämlich aus der Änderung des Differenztones ersehen, daß die Dielektrizitätskonstante ganz allgemein in den einzelnen Phasen gut konstant ist, daß der Wert im isotropflüssigen Gebiet aber um 5—8 Proz. kleiner ist als der im kristallinisch-flüssigen Gebiet, und daß diese Änderung am Klärpunkt sich mit großer aber beobachtbarer Schnelligkeit vollzieht. Beim Festwerden der Substanz fällt dann die Dielektrizitätskonstante wieder sehr stark, in der Regel bis auf etwa die Hälfte ihres vorherigen Betrages. Die in die Kurven mit eingezeichneten Umwandlungspunkte sind so gehört worden und ergeben von den in der Literatur angegebenen Werten nur Abweichungen nach unten, die als Unterkühlungserscheinungen oder in einigen Fällen auch als Folgen geringer Verunreinigungen zwanglos erklärt werden können.

Die Versuche ergaben eine deutliche Anisotropie der flüssigkristallinischen Schichten bezüglich ihrer Dielektrizitätskonstanten.

---

[1]) B. **Specht**, Diss. Halle 1908; F. **Weise**, Diss. Halle 1914; C. **Sultze**, Diss. Halle 1908.

Im amorph-flüssigen und im kristallinisch-festen Gebiet zeigte sich nirgends auch nur die geringste Wirkung des Magnetfeldes. Die im anisotrop-flüssigen Gebiete beobachteten Änderungen beim Erregen des magnetischen Feldes können also nur eine Folge der magnetischen Orientierung der Schwärme sein. Die Wirkung war bei den beiden ersten Gruppen eine vollständig verschiedene. Daher sollen beide getrennt betrachtet werden.



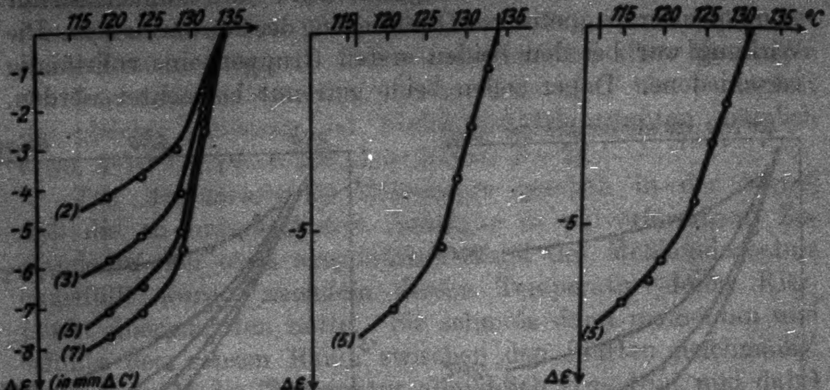
1. Azoxyanisol

2. Azoxyphenetol

3. Anisaldazin

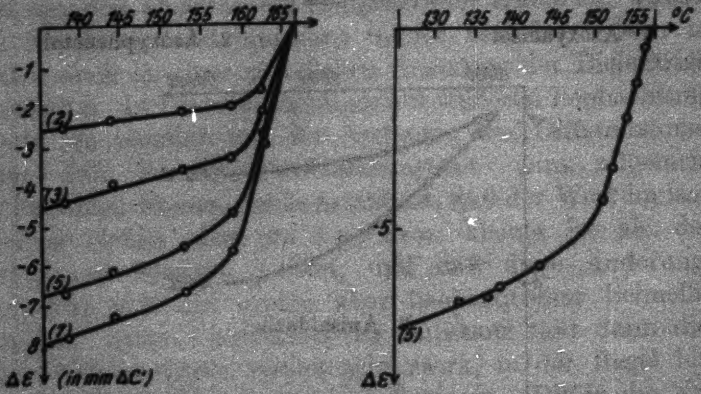
Fig. 3.

a) *Bei der ersten Gruppe* der trüben Schmelzen (vgl. Einleitung) ruft das Anlegen des magnetischen Feldes eine deutliche Tonänderung im Sinne einer *Verkleinerung der Kapazität* hervor, die sofort nach dem Ausschalten des Feldes völlig wieder verschwindet. Das bedeutet also, daß mit der magnetischen Orientierung der anisotropen Schmelzen in der Richtung der Feldlinien eine Verkleinerung ihrer Dielektrizitätskonstanten verbunden ist. — Die Kurven der Fig. 3 zeigen diese Verkleinerung bei verschiedenen Temperaturen in Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke. Die Kurven links in Fig. 4 sind aus diesen graphisch gewonnen und geben



(aus Fig. 8 konstruiert) (bei steig. Temp. beob.) (bei fall. Temp. beob.)

1. Azoxyanisol



(aus Fig. 8 konstruiert) (bei fallend. Temp. beob.)

2. Azoxyphenetol

(Die eingeklammerten Zahlen geben die magnetische Feldgröße in 1000 Gauß an.)

Fig. 4.

nun bei verschiedenen Feldstärken die Abhängigkeit der Verkleinerung von der Temperatur wieder. Zur Kontrolle sind die Kurven rechts in Fig. 4 bei konstanter Feldstärke durch das ganze anisotropische Gebiet hindurch gemessen. Nimmt man an, daß die Moleküle in der Richtung ihrer Längsachse (mit der sie sich in die Richtung der magnetischen Feldlinien stellen) ihre kleinste Dielektrizitätskonstante haben, so zeigt Fig. 3, wie die Moleküle sich mit wachsender Feldstärke mehr und mehr ordnen. Bei 7000 Gauss ist die Ordnung schon nahezu vollständig. Fig. 4 zeigt dann, wie die Kraft der Wärmebewegung, die ja hier schon von vornherein ein völliges Parallelstellen der Moleküle verhindert, auch dieser magnetischen Ordnung mit steigender Temperatur immer stärker entgegenwirkt. Auch das augenblickliche Verschwinden der durch das Magnetfeld hervorgerufenen Verkleinerung der Dielektrizitätskonstanten beim Ausschalten des Feldes zeigt diese Gegenwirkung der Wärmebewegung. Doch der außerordentlich steile Abfall der Kurven innerhalb der obersten 5° des anisotropen Gebietes und die eigentümliche Tatsache, daß man bei höheren Temperaturen nicht die erhöhte Kraft der Wärmebewegung mit stärkeren magnetischen Feldern kompensieren kann, daß vielmehr die bei höheren Temperaturen aufgenommenen Kurven der Fig. 3 schon bei kleineren Werten der Dielektrizitätskonstantenverkleinerungen umbiegen und einen beinahe deutlicheren Sättigungszustand der magnetischen Einstellung in Abhängigkeit von der magnetischen Feldstärke zeigen, kann wohl nicht ausreichend aus dem Anwachsen der molekularen Wärmebewegung mit steigender Temperatur erklärt werden. Beobachtungen von Lehmann weisen darauf hin, daß bei höheren Temperaturen Rotationen und Wirbel auftreten und ganze Teile der kristallinisch-flüssigen Schicht sich der magnetischen Einstellung völlig entziehen. Beobachtungen von Svedberg[1]) über die Leitfähigkeitsänderung solcher Schmelzen bei magnetischer Orientierung, auf die im zweiten Teil zurückzukommen sein wird, ergeben übrigens dieselbe eigentümliche Temperaturabhängigkeit.

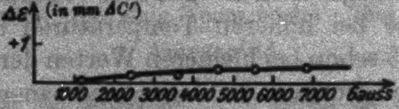
Jedenfalls ergibt die obige Annahme über eine Anisotropie der Moleküle bezüglich ihrer Dielektrizitätskonstanten eine vollausreichende Erklärung der beobachteten Erscheinungen. Nach den einleitend entwickelten Anschauungen bedeutet diese Annahme aber, daß *die Längsachse der Moleküle, d. h. ihre optische Achse, die Richtung ihrer kleinsten Dielektrizitätskonstanten* ist.

---

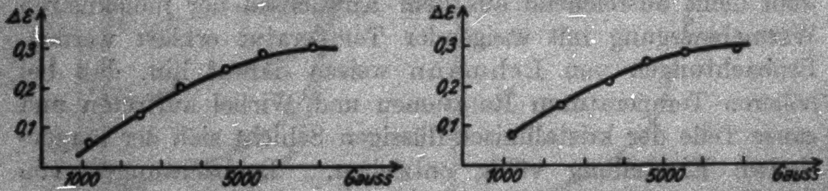
1) The Svedberg, Ann. d. Phys. **44**. S. 1121. 1914.

Die dicht oberhalb des Schmelzpunktes der Substanzen bei einer magnetischen Feldstärke von 7500 Gauss beobachteten Dielektrizitätskonstantenänderungen dürften wohl nach dem Kurvenlauf den größtmöglichen Änderungen nahezu gleichkommen. Sie betragen hier bei einer kristallinisch-flüssigen Schicht von etwa 2 qcm Fläche etwa $4 \cdot 10^{-2}$.

b) Ganz im Gegensatz zu diesen Beobachtungen tritt bei den spontan-pseudoisotropen Substanzen der *zweiten Gruppe* in der Richtung der magnetischen Kraftlinien eine *Vergrößerung* der Dielektrizitätskonstanten auf. Außerdem sind die hier durch das Magnetfeld hervorgerufenen Änderungen absolut gerechnet 10—20mal kleiner als die bei der ersten Gruppe beobachteten. Ihre größten Werte betragen hier unter denselben Verhältnissen wie oben nur etwa $2 \cdot 10^{-3}$. Die Abhängigkeit der Dielektrizitätskonstantenänderung von der magnetischen Feldstärke (Fig. 5) gleicht der der Fig. 3 auch größenordnungsmäßig, wenn man dort die Ordinatenachse etwa durch den Punkt 5000 Gauß der Abszissenachse legen würde. Das bedeutet aber, daß die spontan-pseudoisotropen Schmelzen selbständig eine solche Einstellung ihrer Moleküle aufweisen, wie sie bei den Schmelzen der ersten Gruppe erst durch Anlegen eines magnetischen Feldes von etwa 5000 Gauß Feldstärke herbeigeführt werden, oder daß das Magnetfeld hier die Stellung der Moleküle nur noch etwas korrigieren kann.



1. *p*-Äthoxybenzalamino-α-methylzimtsäureäthylester (im gleichen Maßstabe wie Fig. 3)

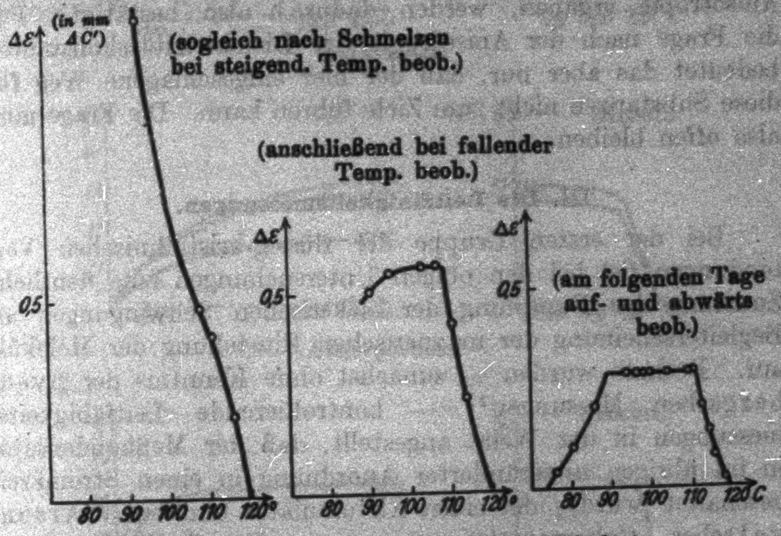


2. (1) in zehnfachem Maßstabe **3.** *p*-Phenylbenzalamino-α-äthylzimtsäurepropylester

Fig. 5.

Zur Erklärung der Beobachtungen braucht man dann nur anzunehmen, daß die Moleküle in der Richtung, die sie den magnetischen Kraftlinien parallel stellen, die größte Dielektrizitätskonstante haben. Das bedeutet hier aber *ein Maximum der Dielektrizitätskonstanten der Moleküle in der Richtung ihrer Längsachse.*

Übereinstimmend damit, daß der pseudoisotrope Zustand hier stabil ist und nicht durch die Kraft der Wärmebewegung zerstört werden kann, zeigt auch die vom magnetischen Feld hervorgerufene und an der Vergrößerung der Dielektrizitätskonstanten erkennbare Nachrichtung der Moleküle keine Abhängigkeit von der Temperatur. Sogleich nach dem ersten Schmelzen (Fig. 6) zeigte sich allerdings ein starkes Abnehmen des Effektes mit steigender Temperatur. Es handelte sich aber offenbar um sekundäre Erscheinungen, da bei wieder erniedrigter Temperatur die ursprünglichen Werte nicht annähernd wieder erreicht wurden, sondern vielmehr ein weiteres Fallen des Effektes beobachtet wurde. Erst wenn der flüssigkristallinische Zustand einige Stunden aufrechterhalten war, ergaben sich reproduzierbare Werte, die die völlige Unabhängigkeit der Dielektrizitätskonstantenvergrößerung von der Temperatur innerhalb des ganzen anisotropen Gebietes beweisen.



p-Äthoxybenzalamino-α-methylzimtsäureäthylester

Fig. 6.

Die Messungen am Äthoxybenzalamino-α-methylzimtsäureäthylester beziehen sich alle nur auf dessen erste anisotrope Phase. In Übereinstimmung mit früheren Beobachtungen[1]) stellte sich bei der allmählichen Abkühlung, die meine Anordnung und Meßweise allein zuließ, die optisch beobachtete zweite Phase nicht ein.

c) Bei den trüben Schmelzen der *dritten Gruppe*, den sog. fließenden Kristallen, war in derselben Anordnung eine Dielektrizitätskonstantenänderung beim Anlegen eines beliebig starken magnetischen Feldes nirgends zu beobachten. Die optischen Beobachtungen, die das Fehlen einer magnetischen Anisotropie ergaben, werden dadurch also bestätigt. Für die Frage nach der Anisotropie der Dielektrizitätskonstanten bedeutet das aber nur, daß der hier eingeschlagene Weg für diese Substanzen nicht zum Ziele führen kann. Die Frage muß also offen bleiben.

III. Die Leitfähigkeitsmessungen.

Bei der ersten Gruppe der flüssig-kristallinischen Verbindungen fiel bei den obigen Untersuchungen eine deutliche Zunahme der Dämpfung der elektrischen Schwingungen als Begleiterscheinung der magnetischen Einstellung der Moleküle auf. Deshalb wurden — zunächst ohne Kenntnis der Svedbergschen Messungen[2]) — kontrollierende Leitfähigkeitsmessungen in der Weise angestellt, daß der Meßkondensator in im übrigen unveränderter Anordnung in einen Stromkreis geschaltet wurde, der einen Akkumulator und ein d'Arsonvalsches Galvanometer von einer Empfindlichkeit von $2{,}20 \cdot 10^{-8}$ Amp. pro Millimeter (bei Ablesung mit Spiegel und Skala in einer Entfernung von etwa 2 m) enthielt. Wegen der trotz der einfachen Anordnung recht guten Bestätigung der Svedbergschen Ergebnisse seien diese Messungen kurz erwähnt.

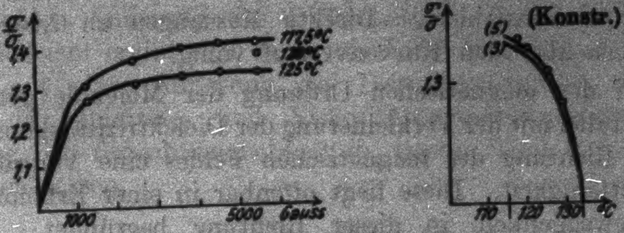
Die Verwendung von Gleichstrom wurde dadurch möglich, daß es gelang, während der Kondensator unter Spannung stand, die Temperatursteigerung so zu regeln, daß die Steigerung der Leitfähigkeit durch die wachsende Temperatur und ihre Verminderung durch die wachsende Polarisation sich kompensierten. In diesen Gleichgewichtszuständen wurde dann

---

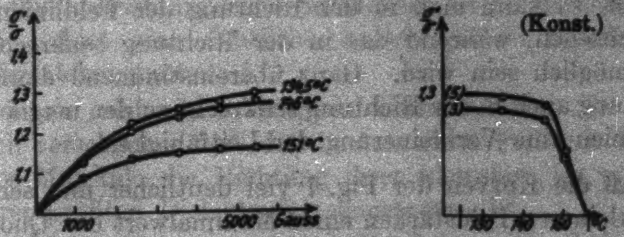
1) C. Sultze, a. a. O.

2) The Svedberg, a. a. O.

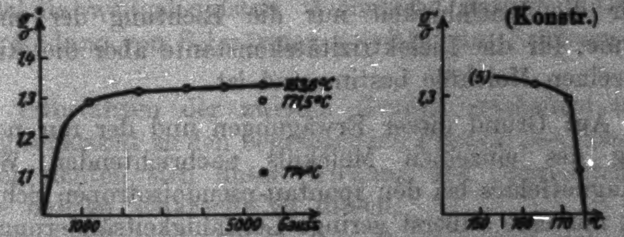
bei verschiedenen magnetischen Feldstärken gemessen und der Quotient der Leitfähigkeiten im ungeordneten Zustande (σ) und im magnetisch-geordneten Zustande in der Richtung des Feldes (σ') berechnet.



Azoxyanisol



Azoxyphenetol



Anisaldazin

Fig. 7.

a) Beim Azoxyanisol, Azoxyphenetol und Anisaldazin ist der Quotient σ'/σ im ganzen anisotropen Gebiet deutlich größer als 1 (Fig. 7) und hängt von der magnetischen Feldstärke und der Temperatur in ganz ähnlicher Weise ab wie die beobachtete Dielektrizitätskonstantenverkleinerung. Wo die Kurven aus meinen Messungen nicht mit Sicherheit festlagen, wurden sie nach Svedbergs Beobachtungen ergänzt, und es wurde jedenfalls gezeigt, daß die gemessenen Punkte sich den Svedbergschen Kurven tadellos einreihen lassen. Auf quantitative Übereinstimmung können meine Messungen natürlich keinen Anspruch erheben. Die Temperaturabhängigkeit des Quotienten σ'/σ ist meist nur aus den Kurven konstanter Temperatur umkonstruiert. Direkte Messungen an Azoxyanisol bestätigen aber den Kurvenverlauf völlig.

Bei der magnetischen Ordnung der Moleküle geht also ganz parallel mit der Verkleinerung der Dielektrizitätskonstanten in der Richtung des magnetischen Feldes eine Vergrößerung der Leitfähigkeit. Diese liegt offenbar in einer Erhöhung der Ionenbeweglichkeit in dieser Richtung begründet. Denkt man sich z. B. ein Bündel Nadeln in ein magnetisches Feld gebracht, so kann man in der Richtung der Feldlinien leicht hindurchsehen, während das in der Richtung senkrecht dazu kaum möglich sein wird. Ganz übereinstimmend damit fand Svedberg auch in der Richtung senkrecht zu den magnetischen Kraftlinien eine Verkleinerung der Leitfähigkeit.

Daß die Kurven der Fig. 7 viel deutlicher und schon bei etwas kleineren Feldstärken einen Maximalwert des Quotienten σ'/σ zeigen als die Kurven der Fig. 3 bezüglich der Verkleinerung der Dielektrizitätskonstanten, kann man vielleicht so erklären, daß für die Leitfähigkeit nur die Richtung der einzelnen Schwärme, für die Dielektrizitätskonstante aber die Richtung der einzelnen Moleküle bestimmend ist.

b) Auf Grund dieser Erwägungen und der nur noch die Stellung des einzelnen Moleküls nachrichtenden Wirkung eines Magnetfeldes bei den spontan-pseudoisotropen Schmelzen ist dort nur eine äußerst geringe Leitfähigkeitsänderung durch ein magnetisches Feld zu erwarten. Dem entspricht das Versuchsergebnis insoweit, als eine Leitfähigkeitsänderung nicht mit Sicherheit zu konstatieren war. Sie scheint innerhalb der Fehler der angewendeten Methode und Empfindlichkeit zu liegen.

c) Die sog. fließenden Kristalle zeigen natürlich auch bezüglich ihrer Leitfähigkeit nicht die geringste Einwirkung des magnetischen Feldes.

Bezüglich der auch von mir mit aller Sicherheit beobachteten Tatsache, daß die Leitfähigkeit beim Übergang vom amorph-flüssigen zum kristallinisch-flüssigen Zustande sprunghaft abnimmt[1]), möchte ich noch einmal erwähnen, daß der Sprung der Dielektrizitätskonstanten in entgegengesetzter Richtung an derselben Stelle bei meinen Beobachtungen mit aller Regelmäßigkeit, Deutlichkeit und Schärfe an einer ganz rapiden Änderung des Differenztones direkt erkennbar war. Vielleicht ergibt sich daraus doch die Möglichkeit, diesen Sprung aus einer Änderung des Dissoziationsgrades zu erklären, da Fluiditäts- und Viskositätsbeobachtungen[2]) eine Änderung der Ionenbeweglichkeit in diesem Sinne unmöglich erscheinen lassen.

IV. Zusammenfassung.

Die flüssig-kristallinischen Substanzen zeigen im anisotropflüssigen Gebiet eine deutliche Anisotropie bezüglich ihrer Dielektrizitätskonstanten.

Es lassen sich zwei Gruppen unterscheiden, die darin prinzipiell verschieden sind, daß in dem einen Falle die Längsachse der Moleküle die Richtung ihrer kleinsten, im anderen Falle ihrer größten Dielektrizitätskonstanten ist.

In die erste Gruppe gehören die Substanzen, bei denen die Kraft der Wärmebewegung einer einheitlichen Richtung der Moleküle weitgehendsten Widerstand entgegensetzt und nur eine Bildung von Schwärmen von 0,01 mm Größenordnung zuläßt.

Die Substanzen der zweiten Gruppe erscheinen in der Richtung senkrecht zu den begrenzenden Flächen pseudoisotrop, d. h. hier richten sich unter Wirkung der Oberflächen alle Moleküle nahezu senkrecht zu diesen.

Bei den Substanzen der ersten Gruppe zeigt sich in der Richtung des Feldes eine deutliche Vergrößerung der Leitfähigkeit als Folge der durch die Parallelrichtung der Moleküle in dieser Richtung vergrößerten Ionenbeweglichkeit.

In der zweiten Gruppe lag eine solche — wie zu erwarten war — innerhalb der Fehlergrenzen.

Bei den fließenden Kristallen blieben diese Untersuchungen wegen des Fehlens der magnetischen Anisotropie ergebnislos.

---

1) The Svedberg, Ann. d. Phys. **49.** S. 437. 1916.

2) The Svedberg, a. a. O. u. Eichwaldt, Diss. Marburg 1904.

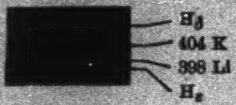
Die vorliegenden Untersuchungen wurden im Winter 1921/22 und im Sommer 1922 im physikalischen Institut der Universität Halle angestellt. Hrn. Prof. Dr. Herweg bin ich für die Anregung zu dieser Arbeit und sein stetes förderndes Interesse zu größtem Danke verpflichtet, desgleichen Hrn. Geheimrat Mie für die freundliche Überlassung der Apparate des physikalischen Instituts und Hrn. Geheimrat Vorländer für sein liebenswürdiges Entgegenkommen bei der Beschaffung des Versuchsmaterials.

(Eingegangen 19. Juni 1923.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

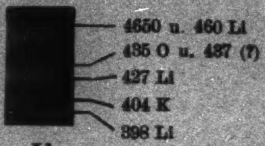
Umladeleuchten.

Ablenk. Spannung 1000 Volt


H_δ
404 K
398 Li
H_ε

Ia

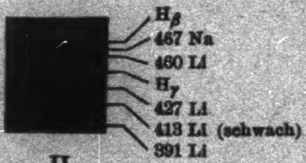
Ablenk. Spannung 1000—3000 Volt


4650 u. 460 Li
435 O u. 437 (?)
427 Li
404 K
398 Li

Ib

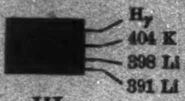
Abklingleuchten.

Ablenk. Spannung 500 Volt


H_β
467 Na
460 Li
H_γ
427 Li
413 Li (schwach)
391 Li

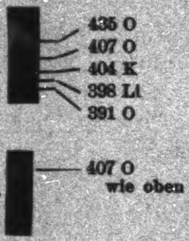
II

Ablenk. Spannung 1000 Volt


H_γ
404 K
398 Li
391 Li

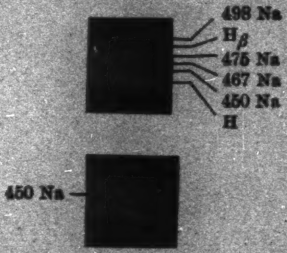
III

Ablenk. Spannung 3000 Volt


435 O
407 O
404 K
398 Li
391 O
407 O
wie oben

IV

Ablenk. Spannung 1000 Volt


498 Na
H_β
475 Na
467 Na
450 Na
H
450 Na

V

E. Rupp.

W. Wien

HERRN GEHEIMRAT

PROFESSOR DR. WILLY WIEN

ZUM SECHZIGSTEN GEBURTSTAGE

IN VEREHRUNG

GEWIDMET

VON

FREUNDEN

UND SCHÜLERN

1924. № 3/4.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 73

1. *Über die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes für Elektrolyte bei sehr hohen Feldstärken;*

von Max Wien.

I. Einleitung.

Vor einem Jahr habe ich auf der Naturforscherversammlung in Leipzig kurz über Untersuchungen darüber berichtet[1], inwieweit das Ohmsche Gesetz für elektrolytische Widerstände bei sehr hoher Feldstärke gültig bleibt. Von verschiedenen Seiten bin ich gebeten worden, eine ausführlichere Darstellung der Versuche zu bringen. Dies soll im folgenden geschehen.

Für gewöhnlich ist die Bewegung elektrolytischer Ionen sehr langsam, die Geschwindigkeit für ein Feld von 1 Volt/cm beträgt nur wenige Zentimeter in der Stunde (Tab. 1); für diese langsame Bewegung hat sich bisher keine Spur einer Abweichung von dem Ohmschen Gesetze feststellen lassen, d. h. die Geschwindigkeit der Ionen ist genau proportional der Feldstärke. Es fragt sich, ob die Proportionalität für ganz starke Felder erhalten bleibt, z. B. für Felder von 16^6 Volt/cm, in denen die Geschwindigkeit der Ionen — vgl. die letzte Reihe der Tab. 1 — die eines D-Zuges erreichen würde.

Tabelle 1.

Ionen	Beweglichkeit bei 18° C	Geschwindigkeit für $\frac{1 \text{ Volt}}{1 \text{ cm}}$	Geschwindigkeit für $\frac{10^6 \text{ Volt}}{1 \text{ cm}}$
Na	43,5	1,6 cm/Stunde	4,5 m/sec
Cl	65,5	2,5 „	6,8 „
HO	174	6,5 „	18,0 „
H	315	11,7 „	32,6 „

Theoretisch kann man an die Frage einmal von der Hydrodynamik aus herantreten. Rayleigh[2] gibt als Grenze der

---

[1] M. Wien, Physik. Zeitschr. 23. S. 399—403. 1922.

[2] Lord Rayleigh, Phil. Mag. 26. S. 365. 1893.

Gültigkeit des Stokes-Kirchhoffschen Gesetzes für eine Kugel vom Radius ϱ, die mit der Geschwindigkeit V sich in einer Flüssigkeit vom spezifischen Gewicht σ und der inneren Reibung η bewegt, an:

$$\frac{\varrho\,\sigma\,V}{\eta} < 1\,.$$

Nach den Versuchen von Arnold[1]) ist das genannte Gesetz bis auf 1 Proz. erfüllt, wenn

$$\frac{\varrho\,\sigma\,V}{\eta} < 0{,}2\,.$$

Nehmen wir das Ion als kugelförmig mit einem Radius $= 10^{-8}$ cm an, so ergibt sich für die höchste in Tab. 1 angeführte Geschwindigkeit $V = 3260$ cm/sec, $\eta = 0{,}0105$ und $\sigma = 1$

$$\frac{\varrho\,\sigma\,V}{\eta} = 0{,}003\,,$$

also wesentlich kleiner als 0,2; danach wäre das Stokessche Gesetz und folglich auch das Ohmsche Gesetz für Felder von 10^6 Volt/cm noch gültig. Andererseits sind jedoch die sonstigen Voraussetzungen des Stokesschen Gesetzes sicher nicht erfüllt. Erstens sind die Ionen keinesfalls kugelförmig, und ferner gilt das Gesetz nach Lenard[2]) nur, solange der Radius der Kugel ϱ groß ist gegen den Abstand zweier Moleküle der Flüssigkeit. Der Radius des H-Ions aber ist sicher viel kleiner als der Abstand zweier Wassermoleküle.

In seinen großen Arbeiten „Über die Elektrizitätsleitung durch freie Elektronen und Träger" wendet Lenard seine gaskinetischen Betrachtungen auf die Ionenbewegung in Flüssigkeiten an und berechnet direkt die Abweichung vom Ohmschen Gesetz, die eintritt, wenn die durch das Feld $\mathfrak{E}$ bewirkte Wanderungsgeschwindigkeit w nicht mehr klein ist gegen die molekulare Geschwindigkeit W. Er erhält für die prozentuale Abweichung vom Ohmschen Gesetz bei elektrolytischen Ionen den Ausdruck[2])

$$\Delta\left(\frac{w}{\mathfrak{E}}\right) = -\,50\cdot\frac{9}{4}\left(\frac{w}{W}\right)^2.$$

Für das H-Ion in einem Feld von 10^6 Volt/cm ist $w = 3260$ cm/sec und für Wassermoleküle ($H_2O = 18$) ist der arithmetische Mittelwert der molekularen Geschwindigkeit $W = 588$ m/sec. Daraus ergibt sich: $\Delta\left(\frac{w}{\mathfrak{E}}\right) = 3{,}46$ Promille.

---

[1]) H. D. Arnold, Phil. Mag. 22. S. 755. 1911.

[2]) P. Lenard, Ann. d. Phys. 41. S. 53. 1913.

Nach Ansicht von Lenard[1]) ist das Wasser stark polymerisiert, so daß als mittleres Molekül H_4O_2 angenommen werden kann; dann erhalten wir $W = 416$ m/sec und damit die doppelte Abweichung vom Ohmschen Gesetz: 6,9 Promille.

Andererseits sind naturgemäß bei unseren geringen Kenntnissen über die Konstitution der Flüssigkeiten die Voraussetzungen der Lenardschen Rechnung unsicher. Eine experimentelle Prüfung erschien daher wünschenswert. Außerdem ist es möglich, daß derartige Versuche uns über die Frage nach der Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes hinaus vielleicht gewisse Einblicke in das Wesen der Flüssigkeiten eröffnen könnten.

Bei den Versuchen, die im folgenden dargestellt werden sollen, haben mir die Herren Dr. Meisser und cand. phil. Malsch treu geholfen, wofür ich ihnen auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank ausspreche.

II. Methode und Versuchsanordnung.

Grundlagen der Methode. Die Erzeugung eines Feldes von 100000 Volt/cm und darüber ist an sich nicht schwierig: man muß nur eine hohe Potentialdifferenz an einer möglichst kurzen Strecke des Elektrolyten wirken lassen. Schwierig ist es jedoch, eine genaue Widerstandsmessung des Elektrolytes, der sich in dem Felde befindet, anzustellen, ohne daß der Widerstand sich während der Messung durch elektrolytische oder Wärmewirkungen so stark ändert, daß die Messung unmöglich wird. Die elektrolytischen Wirkungen kann man durch dasselbe Mittel, das Kohlrausch gegen die Einflüsse der Polarisation verwendet, bekämpfen: Anwendung platinierter Platinelektroden, deren Fläche groß ist gegen den Querschnitt des Elektrolyts. Schlimmer ist die Wärmewirkung. Um diese zu vermindern, muß man die Felder nur ganz kurze Zeit bestehen lassen. Eine hohe Potentialdifferenz bei gleichzeitiger ganz kurzer Dauer ist nur bei Kondensatorentladungen erreichbar,

---

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 61. S. 726. 1920.

wobei die Dauer auf kleine Bruchteile eines Millionstels einer Sekunde beschränkt werden kann.

Trotz der kurzen Dauer würde die Temperaturerhöhung durch die erzeugte Joulesche Wärme allzu groß werden, wenn das Volumen des stromdurchflossenen Leiters klein ist. Die Bedingung, daß dies Volumen nicht allzu klein sein darf, kollidiert offenbar mit der obigen Forderung, daß die hohe Spannung an einer sehr kurzen Strecke des Elektrolyts angelegt werden soll, um hohe Feldstärken zu erzielen, und damit, daß der Querschnitt des Elektrolytes klein sein soll gegen die Flächen der Platinelektroden. Hier mußte ein Kompromiß geschlossen werden; da außer der Wärmewirkung auch noch andere störende Erscheinungen, die weiter unten besprochen werden sollen' hinzutraten, so konnte mit der Feldstärke schließlich nicht viel über 500000 Volt/cm hinausgegangen werden.

Die Messung des Widerstandes erfolgte durch die Beobachtung des Stromeffekts einer Einzelentladung des Kondensators; der Stromeffekt ist dem Widerstand des Kondensatorkreises umgekehrt proportional und kann mittels Thermoelement und Galvanometer bis auf etwa 1 Proz. genau festgestellt werden. Damit waren die Grundlagen gegeben, um die Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes in weiten Grenzen prüfen zu können.

Die Feldstärke. Bevor die Versuchsanordnung näher beschrieben wird, soll vorweg die Bestimmung der Feldstärke besprochen werden. An sich braucht sie für die Widerstandsmessung selbst nicht bekannt zu sein, man muß jedoch ihren Wert annähernd kennen, um angeben zu können, bis zu welcher Größenordnung der Feldstärke das Ohmsche Gesetz noch gilt.

Die Potentialdifferenz an einem Widerstand in einem Kondensatorkreis erreicht kurz nach Beginn der Entladung einen Höchstwert V_M, um dann entweder in Schwingungen oder asymptotisch auf Null zu sinken. Der Höchstwert V_M ist abhängig von dem Funkenpotential V_0 und dem Dekrement ϑ des Kreises. Für den aperiodischen Grenzfall $\vartheta = 2\pi$ ist $V_M = V_0 \frac{2}{e} = 0{,}73\, V_0$. V_M/V_0 als Funktion von ϑ ist in Tab. 2 unter der Annahme berechnet, daß die anderen Widerstände des Schwingungskreises neben R zu vernachlässigen sind.

Die ausgezogene Linie der Fig. 1 ist die theoretische Kurve, die punktierte Kurve entspricht den Beobachtungen für verschiedene Kapazitäten, wovon eine Reihe in Tab. 2 gegeben ist. Sie liegen tiefer, weil außer R in dem Schwingungskreis noch andere Widerstände, insbesondere der Funkenwiderstand, vorhanden sind. In der Regel wurde mit Dekrementen um π herum gearbeitet, wofür die Höchstspannung an dem Widerstand etwa 40 Proz. der Funkenspannung betrug.

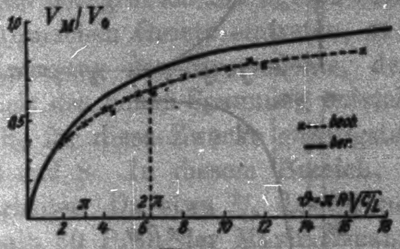


Fig. 1.

Tabelle 2. Fig. 1.

ϑ	V_M/V_0 beob.	V_M/V_0 ber.
2,14	0,39	0,44
4,28	0,52	0,64
5,7	0,60	0,70
6,4	0,58	0,74
11,4	0,76	0,85
17,1	0,80	0,92

Dies ist der Höchstwert der Spannung am Widerstand; es kommt für die Versuche nicht nur auf den Höchstwert an, sondern auch darauf, daß die Spannung auch während der Entladung möglichst lange in der Nähe dieses Höchstwertes bleibt. Am günstigsten wäre es natürlich, wenn man eine sehr kurze Zeit eine konstante hohe Spannung an den Widerstand legen könnte, was selbstverständlich nicht möglich ist. Wohl aber ist es erreichbar, daß man bei der Kondensatorentladung durch Wahl eines passenden Dekrementes annähernd die gleiche Wirkung erzielt, indem der größte Teil des Stromeffektes während hoher Werte der Spannung entsteht. Die Figg. 2a bis 2d sollen dies erläutern. Die oberen Kurven der einzelnen Figuren geben den Verlauf der Spannung für die Dekremente $\vartheta = 1{,}0$ (Fig. 2a), 2,14 (Fig. 2b), 6,28 (Fig. 2c), 12,56 (Fig. 2d) wieder. Man sieht, wie der Verlauf der Spannung zunächst periodisch, dann aperiodisch wird, wobei gleichzeitig der Höchstwert V_M mit dem Dekrement steigt. Die unteren Kurven stellen den Verlauf des Stromeffekts dar. In dem ersten (Fig. 2a) und dem letzten Fall (Fig. 2d) entsteht der Stromeffekt großenteils bei Spannungen, die schon wesentlich niedriger sind als der Höchstwert V_M, hingegen ist in den mittleren

Figuren, 2b u. 2c, der steilste Anstieg des Stromeffekts gerade in der unmittelbaren Umgebung des Höchstwertes der Spannung. Die punktierten senkrechten Linien sind durch Punkte der Span-

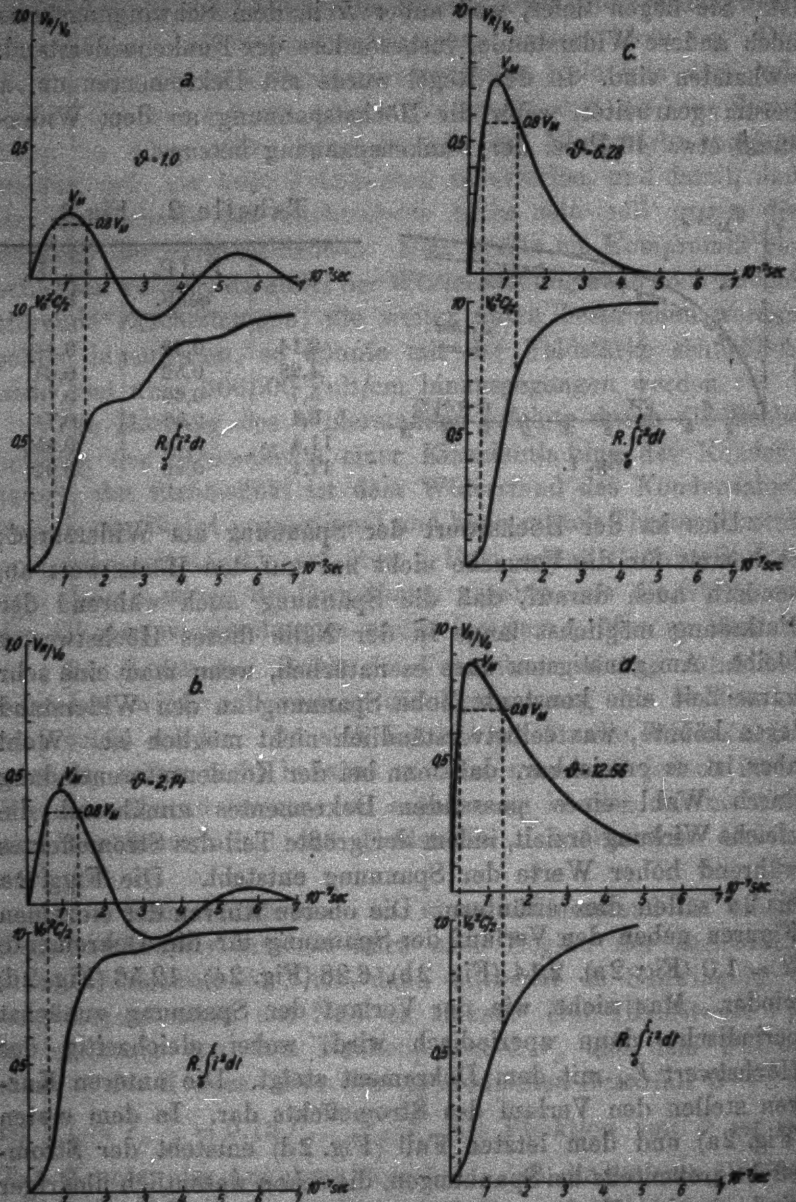


Fig. 2.

nungskurven gelegt, die ein Stück dieser Kurven begrenzen, bei dem die Spannung über 80 Proz. des Maximalwertes V_M liegt. Die Schnittpunkte der punktierten Linien mit den Stromeffektkurven in den unteren Figuren begrenzen den Teil des Stromeffekts, der während der Zeit entsteht, in der die Spannung innerhalb von 80 Proz. von V_M ist. Bei den beiden mittleren Kurven ergibt sich daraus, daß über $^2/_3$ des Stromeffekts auf dieses Stück entfällt.

Wenn demnach während der Dauer der hohen Spannung, also der größten Ionengeschwindigkeit, Abweichungen von dem Ohmschen Gesetz eintreten, so würden sich diese durch eine Änderung des Stromeffekts, der hauptsächlich während der Zeit der hohen Spannung entsteht, bemerklich machen müssen. Die für diese Zwecke günstigsten Dekremente liegen zwischen 2 und 8. In diesem Bereich, also um π herum, wurde gearbeitet. Da etwa $^2/_3$ des Stromeffekts von Spannungen innerhalb 80 Proz. der Maximalspannung herrühren, so würde die Änderung des Stromeffekts schätzungsweise etwa halb so groß sein, als wenn der ganze Stromeffekt durch eine kurze konstante Spannung von der Höhe V_M erzeugt worden wäre.

Um aus der Potentialdifferenz die Feldstärke berechnen zu können, müssen die Dimensionen des elektrolytischen Widerstandes bekannt sein.

Das Widerstandsgefäß. Es konnte der Elektrolyt nicht etwa einfach zwischen zwei nahe beieinander befindliche Elektroden (Fig. 3a) gebracht werden, da dann, wie schon oben erwähnt, infolge der elektrolytischen Wirkungen an den Elektroden die Widerstandsmessung unmöglich gewesen wäre. Zunächst wurde eine kurze Kapillare zwischen zwei wei-

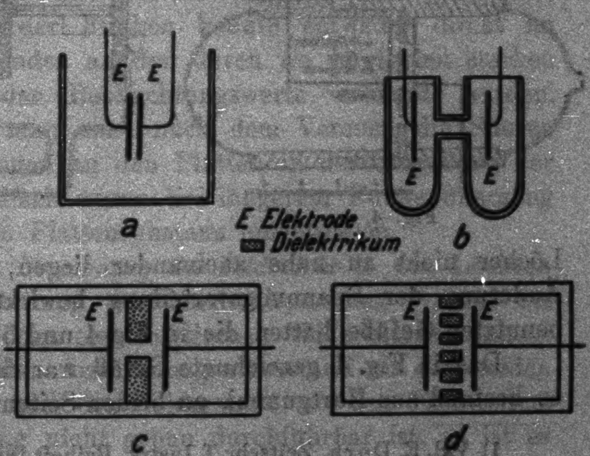


Fig. 3.

ten Glasgefäßen (Fig. 3b) angewandt. Das starke Feld besteht nur in der Kapillare und in ihrer unmittelbaren Umgebung; in der Nähe der großen Elektroden ist Feld und Stromdichte klein, so daß der Einfluß der Elektroden unmerklich ist. Später wurde zu immer kürzeren Strecken übergegangen, um zu höheren Feldstärken zu gelangen; schließlich zu Strecken von nur 1 mm Länge und darunter. Um diese herzustellen, wurden anstatt der Kapillare Platten aus Hartgummi oder Cellon benutzt, in welche ein kleines Loch gebohrt war (Fig. 3c). Das Loch mußte entsprechend der geringen Dicke h der Platten nur einen sehr kleinen Durchmesser ($2r$) haben, bis zu 0,25 mm herab, um zu verhindern, daß der Ausbreitungswiderstand[1]) ($1{,}6/r\,\pi\cdot\varkappa$) neben dem Widerstand im Loch $h/r^2\pi\varkappa$ allzu groß würde. Wenn das der Fall ist, so entfällt auf den Ausbreitungswiderstand ein großer Teil des Gesamtwiderstandes R des Elektrolytes, und das Feld in dem Loch wird entsprechend kleiner.

Damit nun bei der geringen Flüssigkeitsmenge die Erwärmung nicht zu groß wurde, wurde nicht ein Loch, sondern viele Löcher, bis über tausend, in die Platten nebeneinander gebohrt (Fig. 3d), was, solange die Löcher nicht zu nahe aneinander liegen, keine wesentliche Änderung der Spannungsverteilung bewirkt. Die schließlich benutzten Gefäße hatten die in Fig. 4 und 5 gezeichnete Form.

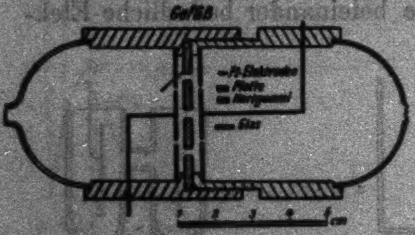


Fig. 4.

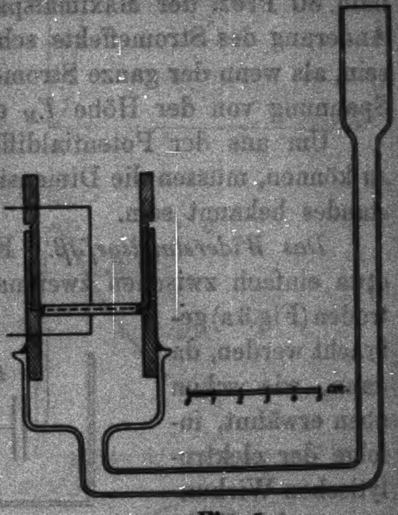


Fig. 5.

Das in Fig. 4 gezeichnete Gefäß war ringsum geschlossen; es bestand aus Hartgummi, an beiden Seiten waren Glaskuppen angebracht, durch die eine eventuelle Funkenbildung beobachtet werden konnte. Die platinierten Platinelektroden wurden möglichst nahe an die durchlöcherte Platte herangerückt. Später wurde meist mit dem in Fig. 5 gezeichneten offenen Gefäß gearbeitet, dessen Füllung und sonstige Handhabung bequemer war.

---

[1] Vgl. E. Dorn, Zeitschr. f. Instrk. Beiheft 1893. $\varkappa$ ist die Leitfähigkeit der Elektrolyten.

Funkenbildung. Störend waren die häufig eintretenden Durchschläge und Funken im Entladungsgefäß. Bei ganz dünnen Platten durchschlug der Funke manchmal das Dielektrikum zwischen den Löchern. Öfter trat aber eine Art von Gleitfunken in den Löchern oder in der Umgebung der Löcher auf, wobei Gasentwicklung zu beobachten war. Gelegentlich führte diese auch zu Explosionen, die das Gefäß zertrümmerten. Die Funken traten um so leichter auf, je höher die Funkenspannung V_0, je größer der Widerstand des Gefäßes und auch je größer die Gesamtenergie der Entladung war. Merkwürdigerweise traten bei dünnen Platten die Funken schwerer auf als bei dicken, obgleich das Feld bei gleicher Potentialdifferenz bei jenen größer ist. So hielten viele nur 0,5 mm dicke Platten lange Versuchsreihen bei Funkenpotentialen von 100000 Volt aus, während an 6 mm dicken Platten unter den gleichen Bedingungen regelmäßig Funken auftraten. Dieser Umstand begünstigte natürlich das Erreichen hoher Feldstärken. Andererseits konnten die Platten auch nicht allzu dünn gewählt werden, da dann schon bei niedrigerer Spannung Funkenbildung eintrat oder die Platte durchschlagen wurde.

Das Auftreten der Funken konnte entweder direkt an ihrer Lichtwirkung oder an der durch sie bewirkten starken Unregelmäßigkeit der Beobachtungswerte erkannt werden. Schließlich konnte man auch nach dem Versuch die Spuren der Funkenentladungen an den Platten in der Umgebung der Löcher sehen. Vielfach waren bei längerem Funkenübergang ganze Kanäle in die Plattensubstanz eingefressen.

Zur genaueren *Berechnung der Feldstärke* in den Löchern muß man die Verteilung der Maximalspannung V_M auf die verschiedenen Teile des elektrolytischen Widerstands kennen: die Löcher selbst, den Ausbreitungswiderstand an den beiden Enden der Löcher und den Widerstand an den Elektroden. Da diese Berechnung nicht genau durchführbar ist, so ist es besser, die Berechnung der Feldstärke aus der Stromintensität J, dem Gesamtquerschnitt der Löcher Q und der Leitfähigkeit der Flüssigkeit $\varkappa$ herzuleiten. Es ist: $J = \frac{V_M}{R}$, die Stromdichte $= J/Q$, der Widerstand der Löcher selbst $R_L = \frac{h}{Q \cdot \varkappa}$, die Spannung an den Löchern $= \frac{J \cdot h}{Q \cdot \varkappa}$, die gesuchte Feldstärke in den Löchern $\frac{J}{Q \cdot \varkappa} = \frac{V_M}{R \cdot Q \cdot \varkappa}$. Es muß also bekannt sein V_M, R, Q und $\varkappa$. Davon ist Q wegen der ungenauen Bohrung der kleinen Löcher und, wie oben dargelegt, V_M unsicher; jedoch braucht ja die Feldstärke auch nur der Größenordnung nach bekannt zu sein.

Die Steigerung der Feldstärke hat ihre Grenzen. Das Funkenpotential kann nicht beliebig gesteigert werden, da die Beobachtung des Stromeffekts bei Funkenpotentialen über 10^5 Volt schwierig ist; schon bei 10^5 Volt war die Fehlergrenze wesentlich größer als bei niedrigeren Potentialen.[1] Ebenso können auch die Platten nicht beliebig dünn gemacht werden: allzu dünne Platten vertragen keine sehr hohen Spannungen, auch wird die Wärmewirkung, die eine große Unsicherheit bedingt, zu groß; ferner müssen die Löcher einen um so kleineren Durchmesser haben, je dünner die Platten sind. Löcher unter etwa 0,25 mm Durchmesser gelang es jedoch nicht durch die Platten zu bohren. Aus diesen Gründen konnte, wie gesagt, bei den eigentlichen Messungen nicht über eine Feldstärke von etwa 500000 Volt/cm hinausgegangen werden.

Versuchsanordnung. Die sehr einfache Versuchsanordnung ist aus Fig. 6 ersichtlich. Das zur Aufladung des Kondensators dienende Induktorium war anfangs ein kleinerer im Institut befindlicher Apparat, später wurde ein ausgezeichnetes Induktorium von R. Seiffert & Co., Hamburg, mit Mitteln der

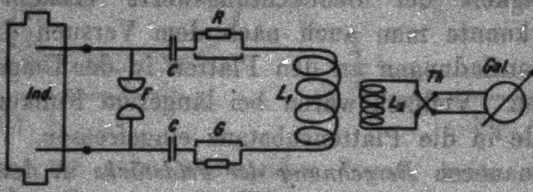


Fig. 6.

---

[1] O. Meisser, Jahrbuch d. drahtl. Tel. 22. S. 204. 1923.

Helmholtz-Gesellschaft bezogen. Betrieben wurde es nach der Einfunkenmethode[1]) mit einem rotierenden Hg-Unterbrecher, später durch einfaches Öffnen des Primärstromes mit einem Hg-Schlüssel unter Parallelschaltung einer passenden Kapazität. Die gewöhnliche Vielfunkenmethode war wegen der dadurch verursachten Erwärmung des elektrolytischen Widerstandes nicht anwendbar.

Die Kapazitäten C des Schwingungskreises bestanden aus Preßgaskondensatoren und aus Minosflaschen von Schott & Gen., die uns die Firma freundlichst zur Verfügung stellte. Die Selbstinduktion L_1 aus einer Spule mit wenigen Windungen dicken Kupferdrahtes, die gleichzeitig dazu diente, um die Koppelung mit dem Thermoelementkreis herzustellen. Das Widerstandsgefäß G ist bereits oben beschrieben worden. An Stelle dieses Gefäßes konnte ein Vergleichswiderstand R eingeschaltet werden. Dieser bestand aus einer U-förmigen Röhre von etwa 5 cm^2 Querschnitt, in die platinierte Platinelektroden mündeten. Durch Verschieben dieser Elektroden konnte der Widerstand in dem nötigen Bereich geändert werden. Das Volumen der Flüssigkeit war so groß gewählt, daß die Temperaturerhöhung durch den Stromdurchgang nicht merklich war. Zur Sicherheit wurde dieser Röhrenwiderstand noch mit einem Drahtwiderstand verglichen und festgestellt, daß der Röhrenwiderstand innerhalb der Versuchsgrenzen als konstant angesehen werden konnte.

Der aperiodische Thermoelementkreis war mit den Windungen L_2 mit dem Schwingungskreis gekoppelt. Die benutzten Thermoelemente bestanden aus Manganin-Konstantan. Sie wurden besonders sorgfältig verlötet; trotzdem litten die Lötstellen auf die Dauer durch die kurzen starken Erwärmungen durch die Stromstöße, so daß das Thermoelement öfter erneuert werden mußte. Unmittelbar vor und nach jeder Versuchsreihe wurde der elektrolytische Widerstand und der Vergleichswiderstand nach der Kohlrauschschen Methode gemessen.

III. Beschreibung einer Versuchsreihe und ihre Auswertung.

In der Tab. 3 ist eine Versuchsreihe für ein Funkenpotential angeführt. Angegeben sind die Daten der Platte: die

---

1) O. Meisser, a. a. O.

Tabelle 3.

Platte A, rotes Cellon $n = 97$ $r = 0,05$ $h = 0,10$
NaCl $\varkappa = 0,0028$ $C = 5 \cdot 10^{-19}$ $L = 10^4$ cm
$F = 3$ cm

α_1	α_G	α_2		
52,9	51,0	48,2	$R_1 = 85,0$ Ohm	
52,9	51,8	48,2	$R_2 = 90,3$ „	$\Delta R = 4,5$ Ohm
52,7	51,0	48,4	$G' = 87,3$ „	$y = \frac{\Delta R}{G'} = 5,2\,\%$
52,3	50,7	48,3	$G = 91,8$ „	
Mittel 52,9	50,9	48,3		

Zahl n und der Radius r der Löcher, die Dicke der Platte h, Art und Leitfähigkeit $\varkappa$ des Elektrolyten, die Konstanten des Schwingungskreises C, L, die Funkenstrecke F.

Der Vergleichswiderstand R wird so gewählt, daß er einmal einen etwas größeren (α_1), das andere Mal einen etwas kleineren Stromeffekt (α_2) gibt als das Gefäß (α_G). Daraus wird dann der Gefäßwiderstand G' interpoliert. In der Regel wurden für jeden der Werte α_1, α_2 und α_G 4 bis 10 Funkenentladungen abwechselnd beobachtet. Durch die vor und nach diesen Versuchen auszuführende Messung des Widerstandes mit der Kohlrauschschen Brücke erhält man den wahren Widerstand G und damit den Unterschied der Leitfähigkeit, wie sie die Messung durch die Kondensatorentladung ergibt, gegenüber der wahren Leitfähigkeit. $y = \frac{\Delta G}{G'}$ gibt die prozentuale Abweichung von der wahren Leitfähigkeit.[1])

In dieser Weise wurde nun jeder elektrolytische Widerstand für eine Reihe von Funkenpotentialen untersucht. In der Tab. 4 sind unter y_1 die Ergebnisse einer vollen Versuchsreihe, wozu das oben in Tab. 3 gegebene Beispiel gehört, mitgeteilt, weiter unter y_2 die Ergebnisse einer zweiten gleichen

---

1) In der Vorveröffentlichung ist y als die prozentuale Änderung des Widerstandes $= \frac{\Delta G}{G}$ — nicht der Leitfähigkeit $= \frac{\Delta G}{G'}$ — berechnet. Die kleinen Abweichungen in den dort angeführten Zahlen für y und Δy gegenüber den unten angegebenen sind auf diese Umrechnung zurückzuführen.

Tabelle 4.

F.	y_1	y_2	$\frac{y_1 + y_2}{2}$	y ausgeglichen	y_0 beob.
1 cm	2,3	3,0	2,7	2,6	0,5 %
2 „	3,6	4,0	3,8	3,7	1,6 „
3 „	5,2	5,4	5,3	5,3	3,1 „
4 „	6,9	6,7	6,8	6,8	4,6 „

vollen Versuchsreihe, dann unter $(y_1 + y_2)/2$ das Mittel aus beiden. Man sieht, daß die Differenz gegenüber der wahren Leitfähigkeit mit dem Funkenpotential schnell ansteigt. Die Vermutung liegt nahe, daß die Differenz der Stromwärme während der Entladung zuzuschreiben ist, y müßte dann wie die Stromwärme mit dem Quadrat der Spannung steigen. In der Fig. 7, obere ausgezogene Linie, sind die beobachteten y als Ordinaten, die Quadrate der Funkenspannung als Abszissen eingetragen; die Beobachtungen liegen offenbar sehr nahe der ausgleichenden Geraden, die nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt wurde. In der Tab. 4 sind unter „y ausgeglichen“ die Punkte dieser Geraden für die betreffende Spannung angegeben, sie wichen nur sehr wenig von dem beobachteten Werte $(y_1 + y_2)/2$ ab. Bei allen Versuchen mit nicht allzu großer Wärmewirkung hat sich diese Geradlinigkeit bestätigt.

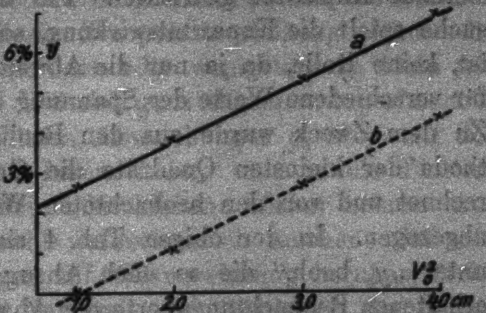


Fig. 7.

Kapazitätswirkung. Ehe ich jedoch auf die Wirkung der Stromwärme näher eingehe, soll eine andere eigentümliche Erscheinung besprochen werden, die in Fig. 7 sofort in die Augen fällt: die Gerade geht nicht durch den Nullpunkt des Koordinatensystems, sondern schneidet die Ordinatenachse oberhalb desselben bei 2,2 Proz. Die gerade Linie ist als ganze nach oben verschoben. Der Grund dieser Verschiebung liegt darin, daß bei diesen sehr schnellen Entladungen sich schon die Verschiebungsströme neben den Leitungsströmen bemerkbar machen. Die Platte und die dielektrische Polarisation der Flüssigkeit wirken zusammen wie ein dem Widerstand der Löcher parallel geschalteter Kondensator.[1]) Der Galvanometerausschlag wird dadurch vergrößert, der Widerstand also scheinbar vermindert. Man kann diese Wirkung kompensieren, indem man dem Vergleichswiderstand ebenfalls einen passenden Kondensator parallel schaltet. In Fig. 7 entspricht die punktierte Linie einer mit kompensierender Kapazität aufgenommenen Versuchsreihe. Sie ist der ausgezogenen Linie merklich parallel; sie geht nicht ganz genau durch den Nullpunkt, weil die kompensierende Kapazität ein wenig zu groß gewählt war.

Bei den Versuchen wurde teils mit, teils ohne kompensierende Kapazität gearbeitet. Für die Auswertung der Versuche spielt die Kapazitätswirkung, solange sie nicht allzu groß ist, keine Rolle, da ja nur die Abweichung von dem Nullwert für verschiedene Werte der Spannung festgestellt werden sollte. Zu dem Zweck wurde aus den Beobachtungen nach der Methode der kleinsten Quadrate die Gerade $y = A + BV_0^2$ berechnet und von den beobachteten Werten dann die Größe A abgezogen. In der obigen Tab. 4 sind in der letzten Reihe unter „y_0 beob.“ die so nach Abzug des Nullwertes $A = 2{,}2$ erhaltenen Beobachtungswerte der Abweichungen der Leitfähigkeit von der normalen Leitfähigkeit eingetragen.

Wärmewirkung. Die gefährlichste Fehlerquelle ist die Wärmewirkung; sie ist proportional dem Quadrat der Potentialdifferenz, und man könnte annehmen, daß der geradlinige Verlauf der den Beobachtungen entsprechenden Kurve bewiese, daß das Ansteigen von y mit dem Potential ausschließlich dem Anwachsen der Jouleschen Wärme zuzuschreiben wäre. Das Gefährliche liegt nun darin, daß die zu erwartende Abweichung von dem Ohmschen Gesetz nach Lenard ebenfalls proportional dem Quadrat der Feldstärke ist. Da sie negativ ist, so würde der Lenardeffekt nur bewirken, daß die Wärmewirkung scheinbar kleiner ausfällt, als sie sollte.

Die anfangs beabsichtigte Berechnung der Wärmewirkung

---

1) Die Theorie einer Kondensatorentladung durch Widerstände und Spulen mit Eigenkapazität ist nicht ganz einfach. Da sie von allgemeinerer Bedeutung ist, so soll sie von anderer Seite für sich behandelt werden.

ist aus verschiedenen Gründen unsicher. Einmal sind die Dimensionen der sehr kleinen Löcher besonders bei sehr dünnen Platten nicht sicher meßbar, dann wird die Energie der Entladung nicht allein in den Löchern verzehrt, sondern sie verteilt sich auf alle im Schwingungskreis vorhandenen Widerstände, und diese sind z. T. wieder gerade bei sehr dünnen Platten nicht genau genug bekannt; schließlich und hauptsächlich zeigte es sich, daß bei diesen sehr schnellen Entladungen eine Berechnung der Wärmewirkung, bei der der normale Temperaturkoeffizient der Elektrolyte zugrunde gelegt wird, nicht statthaft ist. Diese ganze Frage der Wärmewirkung der Kondensatorentladungen wird im hiesigen Institut zurzeit einer besonderen Untersuchung unterzogen, über deren Ergebnisse in Kürze berichtet werden wird.

Hier handelte es sich in erster Linie darum, die störende Fehlerquelle, die in dieser Temperaturerhöhung durch die Stromwärme liegt, zu beseitigen oder wenigstens so klein wie möglich zu machen. Es ließ sich ganz allgemein experimentell zeigen, daß die beobachteten Abweichungen y_0 stets mit der Stromwärme steigen und fallen, indem man in die Platten, mehr oder weniger, größere oder kleinere Löcher bohrte. Auf diese Weise ließ sich wohl wahrscheinlich machen, daß die vorhandenen Abweichungen auf Wärmewirkung beruhen, nicht aber ein zahlenmäßiger Nachweis der Gültigkeit des Ohmschen Gesetzes erbringen. Es mußte versucht werden, die Wärmewirkung und den Lenardeffekt experimentell voneinander zu trennen. Das geschah, indem zunächst durch das Gefäß die Entladung eines großen Kondensators bei verhältnismäßig kleiner Spannung hindurchgeschickt wurde, woraus die Wärmewirkung zu entnehmen war. Dann wurden die eigentlichen Versuche mit einem kleinen Kondensator — also kleiner Wärmewirkung und hohen Spannungen — vorgenommen und hieran dann die Wärmekorrektion auf Grund der Versuche mit dem großen Kondensator angebracht. In Tab. 5 und Fig. 8 sind zwei solche Versuchsreihen dargestellt. Unter I die Wärmeversuche mit der Kapa-

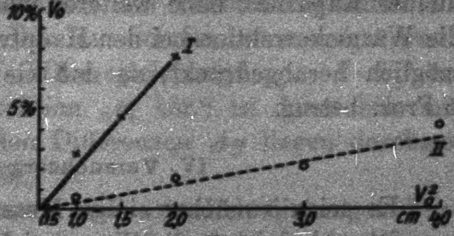


Fig. 8.

zität $C = 3,3 \cdot 10^{-18}$ und die daraus berechnete Grade. Unter II die beobachteten Werte bei dem Spannungsversuch mit $C = 5 \cdot 10^{-19}$. Die bei II eingezeichnete punktierte Linie entspricht der Linie I mit einer im Verhältnis von

$$\frac{5 \cdot 10^{-19}}{3,3 \cdot 10^{-18}} = \frac{1}{6,6}$$

geringeren Neigung. Diese punktierte Linie würde die errechnete Wärmekorrektion darstellen. Die Abweichungen der Beobachtungen von der punktierten Linie sind in der Tabelle unter Δy wiedergegeben. Offenbar liegen sie innerhalb der Fehlergrenze der Beobachtung, die etwa 1 Proz. betragen dürfte.

Tabelle 5. Fig. 8.

Platte A. Vgl. Tab. 7. NaCl + 27 % Rohrzucker.

I		II			
F.	y_0 beob.	F.	y_0 beob.	y_0 ber.	Δy
0,5	0,0	1,0	0,5 %	0,8 %	+0,2 %
1,0	2,9	2,0	1,5	1,2	+0,3
1,5	4,7	3,0	2,3	2,4	−0,1
2.9	7,8	4,0	4,4	3,6	+0,8

Daraus Wärmegleichung für II: $y_0 = 0,00036\, V_0^2$.

Immerhin erschien mir auch diese Art der Korrektion nicht völlig einwandfrei, weil, wie oben erwähnt, die Wärmeeinflüsse bei diesen schnellen Entladungen sich nicht normal verhalten, so daß es fraglich erschien, ob die Übertragung des Wärmeeinflusses bei großer Kapazität auf die Versuche mit kleiner Kapazität ohne weiteres statthaft ist. Deshalb wurde die Wärmekorrektion bei den Hauptversuchen so weit als irgend möglich herabgedrückt, so daß sie nicht mehr als höchstens 5 Proz. betrug.

IV. Versuchsergebnisse.

Es seien zunächst einige Messungen an dickeren Platten angeführt, bei denen die Wärmewirkung verschwindend ist oder doch kaum über die Fehlergrenzen hinausgeht, bei denen also eine Abweichung vom Ohmschen Gesetz direkt hätte hervor-

Tabelle 6.

Hartgummiplatte.

$h = 0{,}386$ $n = 97$ $r = 0{,}1$ $C = 5 \cdot 10^{-19}$ $L = 10^4$ cm

a) $KHSO_4$ $\varkappa = 0{,}0027$

F.	V_0 (KV)	$\mathfrak{E}\ \frac{10^5\ \text{Volt}}{\text{cm}}$	y_0
1,0 cm	31	0,1	+0,1 %
1,5 „	45	0,2	±0,0
2,0 „	57	0,25	−0,1
2,5 „	68	0,3	±0,0

b) NaCl $\varkappa = 0{,}0028$ Wärmegleichung: $y_0 = 0{,}00008\ V_0^2$

F.	V_0 (KV)	$\mathfrak{E}\ \frac{10^5\ \text{Volt}}{\text{cm}}$	y_0 beob.	y_0 ber.	Δy
1,0	31	0,1	−0,1 %	+0,1 %	±0,0 %
1,5	45	0,2	+0,2	+0,2	±0,0
2,0	57	0,25	+0,2	+0,3	−0,1
3,0	81	0,35	+0,9	+0,5	+0,4
4,0	100	0,45	+1,3	+0,8	+0,5

treten müssen. In der Tab. 6 sind der Reihe nach zunächst wieder die Konstanten von Platte, Stromkreis und Elektrolyt angegeben, dann in den eigentlichen Tabellen in der ersten Reihe die Schlagweite in Zentimetern, in der zweiten Reihe die den benutzten Elektroden — Halbkugeln von 3 cm Radius — entsprechenden Funkenpotentiale, dann die Feldstärke $\mathfrak{E}$ in runden Zahlen und die beobachteten Abweichungen y_0 angegeben. Während bei dem in Tab. 6 unter a) dargestellten Versuch überhaupt noch keine merkliche Abweichung erkennbar ist, tritt bei den höheren Feldstärken des Versuchs b) schon die Wärmewirkung hervor. Die aus einem vorausgegangenen „Wärmeversuch“ und der „Wärmegleichung“ $y_0 = B \cdot V_0^2$ ermittelte kleine Wärmekorrektion „y_0 ber.“ ist daher hier angebracht, die übrigbleibenden Differenzen Δy liegen durchaus innerhalb der Fehlergrenzen.

Von besonderem Interesse sind natürlich diejenigen Versuche, bei denen die Feldstärke groß ist, da ja der zu erwartende Lenardeffekt proportional dem Quadrat der Feldstärke steigt. Es ist daher im folgenden eine größere Anzahl von Versuchen mit Platten von 1, 0,5 und 0,23 mm Dicke angeführt. Als Elektrolyte wurden NaCl, H_2SO_4, $KHSO_4$ und schließlich NaCl mit Zusatz von Zucker gewählt. H_2SO_4 wegen des schnellen H-Ions, $KHSO_4$, weil diese Flüssigkeit einen anormal niedrigen Temperaturkoeffizienten besitzt, und NaCl mit Zuckerzusatz, um eine Flüssigkeit mit vermehrter innerer Reibung zu untersuchen. Die Leitfähigkeit aller Flüssigkeiten wurde so gewählt, daß der Widerstand des Gefäßes stets etwa 100 Ohm betrug. Die Leitfähigkeit war also bei der gleichen Platte bei allen Flüssigkeiten annähernd die gleiche.

In den Tabellen 7a bis 7c und 8a bis 8b sind die Versuchsreihen bei der Platte A ($h = 1$ mm) und der Platte B ($h = 0,5$ mm) angegeben. In den Tabellen 9 und 10 sind die mit den gleichen Platten gewonnenen Schlußergebnisse nochmals zusammengestellt.

Tabelle 7a bis 7c.

Platte A. Rotes Cellon.

$n = 97 \quad h = 0,10 \quad r = 0,05 \quad C = 5 \cdot 10^{-19} \quad L = 10^4$

$\varkappa = 0,0027$

a) NaCl

F.	y_0 beob.	y_0 ber.	Δy
1,0	0,5 %	0,4 %	+0,1 %
2,0	1,6	1,3	+0,3
3,0	3,1	2,6	+0,5
4,0	4,6	4,0	+0,6

Wärmegleichung:
$y_0 = 0,00040\, V_0^2$

b) H_2SO_4

F.	y_0 beob.	y_0 ber.	Δy
1,0	0,7 %	0,4 %	+0,3 %
2,0	1,5	1,4	+0,1
3,0	3,3	2,7	+0,6
4,0	5,0	4,1	+0,9

Wärmegleichung:
$y_0 = 0,00041\, V_0^2$

c) NaCl + 27 Proz. Rohrzucker
(vgl. Fig. 8)

F.	y_0 beob.	y_0 ber.	Δy
1,0	0,5 %	0,3 %	+0,2 %
2,0	1,5	1,2	+0,3
3,0	2,3	2,4	−0,1
4,0	4,4	3,6	+0,8

Wärmegleichung: $y_0 = 0,00036\, V_0^2$

Tabelle 8a bis 8d.

Platte B. Hartgummi.

$n = 318$ $h = 0{,}05$ $r = 0{,}02$ $C = 5 \cdot 10^{-19}$ $L = 10^4$ $\varkappa = 0{,}0012$

a) NaCl

F.	y_0 beob.	y_0 ber.	Δy
1,0	0,7 %	0,6 %	+0,1 %
2,0	1,8	2,1	−0,3
3,0	3,2	4,1	−0,9
4,0	5,5	6,2	−0,7

Wärmegleichung:
$y_0 = 0{,}00061\ V_0^2$

b) H_2SO_4

F.	y_0 beob.	y_0 ber.	Δy
1,0	0,5 %	0,6 %	−0,1 %
2,0	1,7	2,0	−0,3
3,0	3,3	3,9	−0,6
4,0	5,4	6,0	−0,6

Wärmegleichung:
$y_0 = 0{,}00060\ V_0^2$

c) $KHSO_4$

F.	y_0 beob.	y_0 ber.	Δy
1,0	0,5 %	0,5 %	0,0 %
2,0	2,1	1,6	+0,5
3,0	3,9	3,2	+0,7
4,0	6,0	4,9	+1,1

Wärmegleichung:
$y_0 = 0{,}00048\ V_0^2$

d) NaCl + 47 Proz. Rohrzucker

F.	y_0 beob.	y_0 ber.	Δy
1,0	0,2 %	0,5 %	−0,3 %
2,0	2,3	1,6	+0,7
3,0	3,2	3,1	+0,1
4,0	5,7	4,7	+1,0

Wärmegleichung:
$y_0 = 0{,}00047\ V_0^2$

Tabelle 9.

Ergebnisse bei Platte A.

$\mathfrak{E}\ \frac{10^5\ \text{Volt}}{\text{cm}}$	Δy		
	NaCl	H_2SO_4	NaCl + 27 % Rohrzucker
0,5	+0,1 %	+0,3 %	+0,2 %
1,0	+0,3	+0,1	+0,3
1,5	+0,5	+0,6	−0,1
2,0	+0,6	+0,9	+0,3

Tabelle 10.

Ergebnisse bei Platte B.

$\mathfrak{E}\ \frac{10^5\ \text{Volt}}{\text{cm}}$	Δy			
	NaCl	H_2SO_4	$KHSO_4$	NaCl + 47 % Rohrzucker
1,0	+0,1 %	−0,1 %	±0,0 %	−0,3 %
2,0	−0,3	−0,3	+0,5	+0,7
3,0	−0,9	−0,6	+0,7	+0,1
4,0	−0,7	−0,6	+1,1	+1,0

In den Tabellen 11a, 11b und 12 sind noch zwei Versuche mit einer besonders dünnen Platte von $h = 0{,}23$ mm bei H_2SO_4- und NaCl-Füllung angegeben. Bei dieser Platte konnten nicht die höchsten Funkenpotentiale verwandt werden, da bei 3 cm Schlagweite (vgl. Tab. 11) deutlich Funkenbildung zu erkennen war. Trotzdem war bei ihr die Feldstärke bei F. = 2,5 cm die höchste ($5{,}5 \cdot 10^{-5}$ Volt/cm), die ich erreicht habe.

Tabelle 11.

Platte C. Hartgummi.

$n = 1084$ $r = 0{,}018$ $h = 0{,}028$ $C = 5{,}8 \cdot 10^{-19}$ $L = 10^4$ $x = 0{,}00094$

a) H_2SO_4

F.	y_0 beob.	y_0 ber.	Δy
0,5	0,4 %	0,3 %	+0,1 %
1,0	0,9	1,0	−0,1
1,5	1,9	2,0	−0,1
2,0	2,7	3,3	−0,6
2,5	4,6	4,8	−0,2
3,0	(8,7)	Funkenbildung!	

Wärmegleichung:
$y_0 = 0{,}0010\, V_0^2$

b) NaCl

F.	y_0 beob.	y_0 ber.	Δy
1,0	0,6 %	0,5 %	+0 1 %
1,5	1,1	1,0	+0,1
2,0	1,7	1,7	±0,0
2,5	2,3	2,4	−0,1
3,0	(8,9)	Funkenbildung!	

Wärmegleichung:
$y_0 = 0{,}00051\, V_0^2$

Tabelle 12.

Ergebnisse bei Platte C.

$\mathfrak{E}\ \frac{10^5\ \text{Volt}}{\text{cm}}$	Δy	
	H_2SO_4	NaCl
1,5	+0,1 %	—
2,5	−0,1	+0,1 %
4,0	−0,1	+0,1
5,0	−0,6	±0,0
5,5	−0,2	−0,1

Aus allen Tabellen ist zu entnehmen, daß nirgends größere Abweichungen Δy auftreten, welche über die zu erwartenden Beobachtungsfehler hinausgehen. Nur einmal tritt bei der $KHSO_4$-Lösung eine Abweichung von über 1 Proz. (1,1 Proz.) auf, jedoch sind bei dieser Flüssigkeit mit anormal niedrigem Temperaturkoeffizienten die Bedenken wegen der Wärmekorrektion besonders groß, so daß auch hier die Differenz der ungenauen Wärmekorrektion zuzuschreiben sein dürfte, und nicht etwa einer Abweichung vom Ohmschen Gesetz. Diese Abweichung müßte bei der Schwefelsäure mit dem schnellsten Ion am stärksten hervortreten, aber gerade hier sind die Abweichungen klein und überall innerhalb der Fehlergrenzen (vgl. z. B. Tab. 10 und 12, bei denen die Feldstärken die höchsten Werte erreichen).

Ich glaube, durch diese Versuche den Beweis gebracht zu haben, daß bis zu Feldstärken von etwa 500000 Volt/cm das Ohmsche Gesetz für Elektrolyte innerhalb von etwa 1 Proz. gültig bleibt. Darin liegt eine qualitative Bestätigung der Lenardschen Theorie, nach der die Abweichungen unter meinen Versuchsbedingungen ebenfalls sehr klein sind und im Höchstfall 1 bis 2 Promille betragen müßten. Eine quantitative Prüfung war leider nicht möglich, da ich Feldstärke und Meßgenauigkeit nicht weiter zu steigern vermochte.

Jena, Physik. Inst. d. Univ., 13. Oktober 1923.

2. *Über die Asymmetrie der Elektronenemission an sehr dünnen Metallschichten unter der Einwirkung von Röntgenstrahlen;*

von W. Seitz.

Nach den Arbeiten von **Bragg** und **Madsen**[1]), **Beatty**[2]), **Cooksey**[3]) u. a. erzeugen R.-Strahlen beim Durchgang durch ein Metall auf der Austrittseite eine intensivere Elektronenemission als auf der Eintrittseite, vorausgesetzt, natürlich, daß die R.-Str. in der Metallschicht keine erhebliche Schwächung erleiden. Bei allen bisher ausgeführten Unternehmungen dieses Effekts wurde die Elektronenstrahlung dadurch gemessen, daß vor, bzw. hinter der Metallschicht die Leitfähigkeit der Luft, die im wesentlichen nur durch die Elektronenstrahlung hervorgebracht wird, bestimmt wurde. Es ist der Einwand nicht von der Hand zu weisen, die so gefundene Asymmetrie könnte auf irgendwelche sekundäre Effekte zurückzuführen sein, auf jeden Fall aber bleibt unentschieden, ob auf der Rückseite mehr Elektronen austreten, oder ob ihre Zahl dieselbe wie auf der Vorderseite und nur ihr Ionisationsvermögen größer ist.

Ich hielt es deshalb für angebracht, die Erscheinung zu prüfen, indem ich im höchsten Vakuum die Aufladung eines dünnen Blättchens, das nur auf der einen Seite einen metallischen Belag hatte, also im wesentlichen nach einer Seite Elektronen abgeben konnte, und das bald mit der metallischen, bald mit der nicht metallischen Seite der R.-Röhre zugewendet war, bestimmte.

Die Versuchsanordnung ergibt sich aus der nachfolgenden Figur.

---

[1]) W. K. **Bragg** u. **Madsen**, Trans. Roy. Soc. South Australien 32. Mai 1908.

[2]) R. T. **Beatty**, Proc. Phil. Soc. Cambridge 15. S. 492. 1910.

[3]) C. D. **Cooksey**, Phil. Mag. VI. 24. S. 38. 1912; Nature LXXVII. S. 509. 1908.

Die R.-Str., die von der 44 cm entfernten Antikathode einer Coolidgeröhre kamen, traten, durch Bleiblenden in geeigneter Weise abgegrenzt, zunächst durch das Fenster *F* in das Hochvakuumgefäß ein. Das Fenster bestand aus ungefähr $^1/_{10}$ mm starkem Aluminiumblech, das auf der Innenseite schellackiert war, um den Austritt von Elektronen zu verhindern. Um aber vielleicht doch noch entstehende Elektronen zur Seite zu biegen, befand sich das Röhrchen direkt hinter dem Fenster zwischen den Polen eines Hufeisenstahlmagnets. Allerdings war es ohne merklichen Einfluß auf die Messungen, ob dieser Magnet vorhanden war oder nicht.

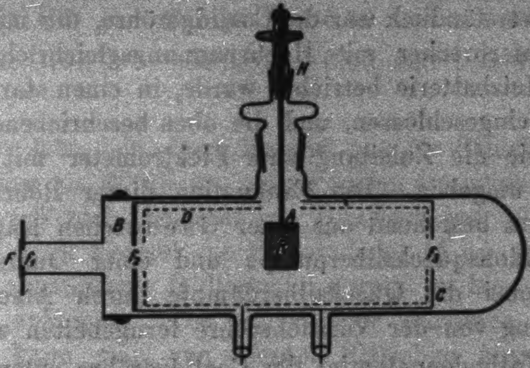


Fig. 1.

Der Zylinder *C* bestand aus aufeinandergewalztem Aluminiumkupferblech, wobei das Aluminium die Innenseite bildete, um die Erzeugung von Elektronen durch zerstreute R.-Str. möglichst zu verringern. Die Vorderwand mit dem Diaphragma f_2 war außen mit 2 mm starkem Bleiblech belegt. Das vom Zylinder *C* isolierte Drahtnetz *D*, das aus 0,1 mm starkem Kupferdraht gefertigt war und eine Maschenweite von 1 mm hatte, konnte geerdet werden, während der Zylinder mit Hilfe einer kleinen Akkumulatorenbatterie auf + 50 bzw. 100 Volt gebracht wurde. Dadurch sollten event. von der Innenwand ausgehende langsame Elektronen zurückgetrieben werden. Doch zeigte sich der Einfluß einen solchen Feldes auf die Meßresultate als gering. Bei einer Reihe von Versuchen wurde das Netz negativ geladen und der Zylinder geerdet.

Nachdem die R.-Str. das später zu beschreibende Plättchen *R* (in der Figur um 90° gedreht) passiert haben, treten sie durch das Diaphragma f_3 aus dem Zylinder wieder aus. Sämtliche Diaphragmen sind so bemessen, daß der Zylinder und das Netz auf der Innenseite, so wie der Halter A des Plättchens R von direkten R.-Str. nicht getroffen wird. Der Schlitz S im Zylinder und Netz ist so schmal, daß das Plättchen (Größe 15 × 18 mm), das in den Halter A eingeklemmt ist, eben noch eingeführt werden kann. Mit Hilfe des Schliffs H wird das Plättchen um 180° gedreht, seine Aufladung bestimmt ein Dolezalekscches Elektrometer (Ladungsempfindlichkeit mit Harmsschen Kondensator gemessen $1{,}37 \cdot 10^{-13}$ Coulomb pro Millimeter Ausschlag).

Selbstverständlich war die Coolidgeröhre, die mit Induktor und Gasunterbrecher mit Hochspannungsgleichrichter, sowie isolierter Heizbatterie betrieben wurde, in einen starkwandigen Bleikasten eingeschlossen, und die oben beschriebene Vakuumröhre, sowie die Zuleitung zum Elektrometer mit geerdeten Bleihüllen umgeben. Die Evakuation dieser Röhre besorgte ein Aggregat bestehend aus einer Gaedeschen Kapselpumpe, einer Rotationsquecksilberpumpe und einer Quarzdiffusionspumpe, wobei die Quecksilberdämpfe durch Alkoholkohlensäurekühlung von der Versuchsröhre ferngehalten wurden.

Das Kathodenpotential der Coolidgeröhre entsprach einer Funkenstrecke von 2,90 cm zwischen Kugeln von 6,8 cm Durchmesser, d. i. 78000 Volt.[1])

Es wurden zwei Arten von einseitig mit einer Metallschicht überzogenen Plättchen verwendet, Celluloidplättchen, die aus Packfilms, deren Gelatineschicht entfernt worden, geschnitten waren und Kohlenstofftelephonmembranen von 0,4 mm Dicke. Diese Plättchen wurden in einer mit verdünntem Argon gefüllten Röhre nach der bekannten Weise bei Glimmentladung verschieden lang mit Platin einseitig bestäubt. Bei den so behandelten Zelluloidplättchen wurde die Lichtabsorption für Rot und Grün mit einem Spektralphotometer gemessen, und versucht, nach der Methode von Hagen und Rubens[2]) daraus die Dicke der Platinschicht zu berechnen.

---

[1]) Die Röntgenstrahlung war demnach bereits reich an K-Strahlung des Wolfram.

[2]) E. Hagen u. H. Rubens, Ann. d. Phys. 8. S. 432. 1902.

Wenn J' die Lichtintensität nach Durchgang durch ein unplatiniertes Plättchen bedeutet, J'' jene hinter dem platinierten, R den Reflexionskoeffizienten, α den Absorptionskoeffizienten und d die Dicke des Platins, so ist

$$\frac{J''}{J'} = (1 - R)\, 10^{-\alpha d}$$

und daraus

$$d = \frac{1}{\alpha}\left(\lg \frac{J'}{J''} + \lg (1 - R)\right),$$

wobei wir nach **Hagen** und **Rubens**

für Rot ($\lambda = 0{,}7\ \mu$) $R = 0{,}69$ und $\alpha = 37{,}4$

für Grün ($\lambda = 0{,}55\ \mu$) $R = 0{,}61$ und $\alpha = 37{,}6$

setzen.

Leider läßt sich diese Formel nur für Schichten, deren Dicke größer als 20 $\mu\mu$ ist, einigermaßen streng anwenden, da für dünnere R nicht bekannt ist. Demnach hat selbst in dem Falle, wo diese Formel die Schichtdicke 15 $\mu\mu$ ergibt, diese Zahl nur angenäherte Gültigkeit, worauf es hier im übrigen auch nur ankommt. Die Stärke der dünneren bestäubten Plättchen kann man von diesem Plättchen ausgehend aus der Bestäubungsdauer, die man wohl der schließlich erhaltenen Dicke proportional setzen darf, abschätzen. Auf diese Weise sind die Zahlen in Kolumne 2 der Tab. I entstanden. Es wurde dann auch versucht, aus der Bestäubungsdauer den gleichen Schluß auf die Dicke des Platinbelags das Kohlenplättchen zu ziehen. Die Zahlen der Tab. II in Kolumne 1 sind so berechnet. Daß bei gleicher, so geschätzter Schichtdicke die Intensität der Elektronenstrahlung bei Kohlenplättchen größer als bei Celluloidplättchen ist, erklärt sich wohl ohne weiteres aus der Rauhigkeit der Oberfläche. Hierauf ist auch zurückzuführen, daß die Versuche mit Kohle etwas weniger übersichtliche Resultate ergaben.

Die Messung bestand also darin, die Aufladung des Plättchens und des damit verbundenen Elektrometers während einer bestimmten Dauer der Bestrahlung mit R.-Str. zu bestimmen, wenn einmal die Metallseite der R.-Röhre zugewandt, das anderemal um 180° gedreht war. Selbstverständlich wurde

Tabelle I.

Platinierte Celluloidplättchen.

Bestäubungsdauer Sek.	Dicke $\mu\mu$	Netz und Zylinder geerdet E_a	E_i	E_a/E_i	Netz — 50 Volt Zylinder geerdet E_a	E_i	E_a/E_i
Bis zur Undurchsichtigkeit platiniert		171,0	149,8	1,14	93,0	79,7	1,17
1000	15,0 (opt. best.)	105,5	96,0	1,10			
500	7,5	58,5	53,4	1,10	31,8	25,0	1,27
375	5,6	42,5	39,1	1,09	21,8	17,9	1,22
100	1,5	25,0	22,9	1,09			
50	0,75	18,4	18,5	0,995			
40	0,60	15,4	14,6	1,05			

Tabelle II.

Platinierte Kohleplättchen.

Bestäubungsdauer Sek.	Dicke $\mu\mu$	Netz und Zylinder geerdet E_a	E_i	E_a/E_i	Netz — 100 Volt Zylinder geerdet E_a	E_i	E_a/E_i
500	7,5	107,0	101,5	1,05	39,4	33,5	1,18
250	3,75	89,4	85,6	1,04	36,4	33,1	1,10
175	2,65	39,5	37,0	1,07			
100	1,50	31,3	29,0	1,08			
50	0,75	22,7	20,8	1,09			
40	0,60	19,4	19,2	1,01			
35	0,53	9,3	9,4	0,99			
0	0	−1,0	−1,0		−2,4	−2,4	

geprüft, ob nicht irgendwelche Asymmetrie der Anordnung die Ursache für den Unterschied des Effektes in den beiden Stellungen des Plättchens ist, und ob auch Ladung auftrat, wenn der Metallbelag fehlte. Wie die letzte Zeile der Tab. II zeigt, rufen die R.-Str. an einem unplatinierten Kohleplättchen, falls das Netz geerdet ist, eine eben noch merkliche negative Ladung, entsprechend einem Elektrometerskalenteil in 90 Sek., hervor, die vermutlich von Elektronen, welche durch zerstreute R.-Str. am Netz und Zylinder ausgelöst werden, herrühren.

Diese negative Ladung erreicht größere Werte (2 bzw. 2,4 Skalenteile in 90 Sek.), wenn das Netz gegen das Plättchen und den Zylinder ein Potential von — 50 bzw. — 100 Volt hat. Durch diesen Effekt wird also bei den übrigen Messungen die positive Ladung des Plättchens etwas zu klein, und es wurde daher in den Tabellen an den direkt abgelesenen Elektrometerausschlägen Korrekturen angebracht, entsprechend obigen an unplatiniertem Kohleplättchen gemachten Beobachtungen. Diese Korrektur beeinflußt aber den Wert von E_a/E_i nur bei den Plättchen mit dünnstem Platinbelag.

Die in den Tabellen angegebenen Zahlen beziehen sich auf eine Röntgenstrahlung, die durch 3 mm Aluminium filtriert war. E_a bedeutet den Elektrometerausschlag in 90 Sek. bei abgewendeter Platinschicht (Austrittseffekt), E_i den entsprechenden Ausschlag in der entgegengesetzten Stellung (Einfallseffekt).

Die drei letzten Kolumnen der Tabellen geben die Effekte an für den Fall, daß das Netz gegen das Plättchen, sowie gegen den Zylinder auf — 50 Volt bzw. — 100 geladen war, wodurch die langsamen Elektronen zurückgetrieben und der Effekt nahezu auf die Hälfte bzw. ein Drittel verringert wurde.

Wie beide Tabellen zeigen, ist abgesehen von den dünnsten Platinschichten E_a/E_i durchweg größer als Eins, *es treten also tatsächlich auf der abgewandten Seite mehr Elektronen aus;* daß bei der äußerst regelmäßigen Schicht auf Celluloid E_a/E_i deutlich größer als auf der matten regellosen Oberfläche der Kohle ist, erscheint verständlich.

Durch ein Gegenfeld von 50 bzw. 100 Volt wird E_a/E_i deutlich vergrößert, ein Zeichen, daß, wie zu erwarten, die langsamen Elektronen die Asymmetrie, die wohl nur den primär von R.-Str. erzeugten schnellen Elektronen zukommt, verschleiern.

Wenn nun durch diese Versuche einwandfrei festgestellt ist, *daß aus dem Metall in der Richtung der R.-Str. mehr Elektronen austreten als in der entgegengesetzten*, so ist doch noch die Frage zu beantworten, *ob dies auch für das Metallatom selbst gilt.* Es wäre auch denkbar, daß aus den Atomen im Mittel nach allen Seiten gleich viel Elektronen ausgesandt werden, daß diese aber in der genannten Richtung eine größere Geschwindigkeit haben und deshalb weniger absorbiert werden, also in größerer Menge aus dem Inneren an die Oberfläche gelangen. Eine Entscheidung dieser Frage könnte die Bestimmung der Asymmetrie des Elektroneneffektes bei verschiedener Dicke der Metallschicht geben.

In dem Fall daß die aus den Atomen selbst austretende Elektronenzahl in der Richtung der R.-Str. größer, die Geschwindigkeit dagegen im Mittel in allen Richtungen gleich ist, muß die Asymmetrie E_a/E_i bei den allerdünnsten Schichten am größten sein, weil sich die diffuse Zerstreuung im Metall noch nicht geltend macht; im andern Fall aber, wo die Elektronenzahl in allen Richtungen gleich, die Geschwindigkeitsverteilung aber unsymmetrisch ist, muß der Wert von E_a/E_i bei abnehmender Schichtdicke sich dem Wert 1 nähern und ist bei größerer Dicke infolge der verschieden starken Absorption größer als 1. Es erscheinen die beiden Tabellen die letztere Annahme zu bestätigen, doch möchte ich die Frage noch nicht für sicher entschieden erachten, da bei den dünnsten Plättchen der Elektroneneffekt so klein ist, daß diese Resultate durch irgendwelche Fehlerquellen entstellt sein könnten. Der Asymmetrieeffekt wurde auch bei einem Celluloidplättchen untersucht, das auf der einen Seite mit 0,0006 mm starkem Blattaluminium beklebt war. Da die Elektronenemission des Al sehr schwach ist, mußte davon abgesehen werden, die R.-Str. wie bisher zu filtrieren.

Es ergab sich

$$\frac{E_a}{E_i} = 1{,}31\,.$$

Ferner wurden in der gleichen Weise ein 0,2 mm dickes Aluminiumblech, das auf der einen Seite in der Argonröhre dünn verkupfert war, untersucht. Da die Elektronenemission des Aluminiums gegenüber der des Kupfers nahezu zu vernachlässigen ist, war zu erwarten, daß die Aufladung höher werde, wenn das Kupfer auf der Austrittseite der R.-Str. sich befindet. Dies bestätigen folgende Zahlen:

E_a = Elektrometerausschlag, wenn Kupfer auf der Austrittseite der R.-Str.,

E_i = Elektrometerauschlag, wenn Kupfer auf der Eintrittseite der R.-Str.

Die R.-Str. sind durch 6 mm Aluminium gefiltert.

Wenn Netz und Zylinder geerdet . . . $\frac{E_a}{E_i} = 1{,}14$.

Wenn Netz − 100 Volt, Zylinder geerdet $\frac{E_a}{E_i} = 1{,}20$.

Dieser Versuch dient als weiterer sicherer Beweis dafür, daß tatsächlich die Elektronenzahl der beobachteten Austrittsstrahlung größer als die der Eintrittsstrahlung ist.

3. *G. A. Schotts Form der relativistischen Dynamik und die Quantenbedingungen;*
von M. v. Laue.

Trotzdem sich die relativistische Dynamik in weitgehender Analogie zur klassischen ausbilden läßt, leidet sie bei der Anwendung auf bestimmte Probleme meist unter dem Übelstand, daß gewisse, nicht ganz einfache Wurzelausdrücke auftreten, welche sich in letzter Linie auf die Wurzel im Ausdruck für die Energie eines Massenpunkts von der Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ und der Masse m,

$$\frac{m c^2}{\sqrt{c^2 - \mathfrak{q}^2}},$$

zurückführen lassen. Für die Bewegung eines einzelnen Ladungsträgers in einem statischen elektrischen und magnetischen Felde hat G. A. **Schott**[1]) dem abzuhelfen gewußt, indem er statt der Zeit t die Eigenzeit τ des Körpers einführt. Verstehen wir unter φ' die Ableitung irgendeiner Größe φ nach τ, unter Φ das skalare Potential des elektrischen und unter $\mathfrak{A}$ das vektorielle Potential des magnetischen Feldes, so lauten nach ihm die Bewegungsgleichungen in den rechtwinkeligen Koordinaten x, y, z:

$$(1) \qquad \frac{d}{d\tau}\left(m x' + \frac{e}{c}\mathfrak{A}_x\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(E - e\Phi)^2}{2 m c^2} + \frac{e}{c}(\mathfrak{w}\mathfrak{A})\right] \text{ usw.}$$

$\mathfrak{w}$ ist dabei der Vektor mit den Komponenten x', y', z', also die auf die Eigenzeit τ bezogene Geschwindigkeit des Körpers. Sie steht mit der auf t bezogenen Geschwindigkeit $\mathfrak{q}$ in demselben Zusammenhang, wie bei irgendeiner Größe φ die Ableitung φ' nach τ zur Ableitung $\dot{\varphi}$ nach t, nämlich:

---

[1]) G. A. **Schott**, Electromagnetic radiation. Cambridge 1912. Vgl. auch den demnächst erscheinenden Band VI des **Marx**schen Handbuchs der Radialogie. Zwar hat schon A. **Sommerfeld** (Phys. Zeitschr. 17. S. 491. 1916) bei der quantentheoretischen Behandlung des Zeemaneffekts die Eigenzeit eingeführt, sonst aber nicht die **Schott**sche Form der Bewegungsgleichungen benutzt.

$$(2) \qquad \varphi' = \frac{c}{\sqrt{c^2 - \mathfrak{q}^2}}\,\dot{\varphi}, \qquad \mathfrak{w} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - \mathfrak{q}^2}}\,\mathfrak{q}\,.$$

E ist eine Konstante, und zwar die Energie der Bewegung. Von den Bewegungsgleichungen der klassischen Dynamik unterscheiden sich die Formeln (1) (abgesehen von der Bedeutung der unabhängigen Veränderlichen) nur dadurch, daß die potentielle Energie $e\,\Phi$ ersetzt ist durch

$$(3) \qquad -\frac{(E - e\,\Phi)^2}{2\,m\,c^2}\,.$$

Deswegen verläuft die Durchrechnung eines bestimmten Problems auch rechnerisch genau wie in der klassischen Dynamik, und man hat nur bei der Bestimmung der sechs Integrationskonstanten dafür Sorge zu tragen, daß die Energie den Wert E erhält. Man kann z. B. den Energiesatz sogleich in der Form

$$(4) \qquad \tfrac{1}{2}\,m\,w^2 - \frac{(E - e\,\Phi)^2}{2\,m\,c^2} = \text{const}$$

hinschreiben; nur muß man notwendigerweise die Konstante gleich $-\frac{1}{2}\,m\,c^2$ setzen, denn nur dann geht (4), wenn man w^2 nach (2) durch q^2 ausdrückt, in die Gleichung über:

$$(4\text{a}) \qquad E = \frac{m\,c^2}{\sqrt{c^2 - q^2}} + e\,\Phi\,.$$

Auch die relativistischen Probleme der Quantentheorie lassen sich am einfachsten nach diesem Verfahren behandeln, da ja bei ihnen (bisher wenigstens) dessen Voraussetzungen immer erfüllt sind. Nun beziehen sich die Quantenregeln auf Integrale von der Form

$$(5) \qquad \int \psi_i\,d\,\varphi_i\,,$$

wobei die φ_i beliebige Koordinaten, die ψ_i die zugehörigen Impulse bedeuten. In Übertragung des aus der klassischen Dynamik befolgten Verfahrens wird man letztere aus dem kinetischen Potential

$$(6) \qquad \mathfrak{L} = \tfrac{1}{2}\,m\,w^2 + \frac{(E - e\,\Phi)^2}{2\,m\,c^2} + \frac{e}{c}\,(\mathfrak{w}\,\mathfrak{A})$$

durch die Differentiation nach den Ableitungen φ_i', also

$$\psi_i = \frac{\partial\,\mathfrak{L}}{\partial\,\varphi_i'}$$

zu definieren haben. Denn der „klassische" Wert dieses Potentials ist

$$\tfrac{1}{2} m q^2 - e\Phi + \frac{e}{c}(\mathfrak{q}\mathfrak{A}) .$$

Andererseits aber hat man bei diesen Problemen bisher die Integrale (5) so ausgewertet, daß man die Impulse aus dem kinetischen Potential

$$\mathfrak{L}^* = - m c \sqrt{c^2 - q^2} - e\Phi + \frac{e}{c}(\mathfrak{q}\mathfrak{A}) \tag{7}$$

durch Differentiation nach den Geschwindigkeiten $\dot{\varphi}_i$ gewann, also

$$\psi_i^* = \frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial \dot{\varphi}_i} .$$

Es fragt sich, ob beide Verfahren zum gleichen Wert für eines der Integrale (5) führen. Und dies ist offensichtlich dann der Fall, wenn identisch in den φ_i und den $\dot{\varphi}_i$ die Gleichungen

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi_i'} = \frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial \dot{\varphi}_i}$$

gelten.

Nun ist nach (6):

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi_i'} = \tfrac{1}{2} m \frac{\partial (\mathfrak{w}^2)}{\partial \varphi_i'} + \frac{e}{c} \frac{\partial (\mathfrak{w}\mathfrak{A})}{\partial \varphi_i'} ;$$

und nach (7):

$$\frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial \dot{\varphi}_i} = \tfrac{1}{2} m \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} \frac{\partial (q^2)}{\partial \dot{\varphi}_i} + \frac{e}{c} \frac{\partial (\mathfrak{q}\mathfrak{A})}{\partial \dot{\varphi}_i} .$$

Das skalare Produkt $(\mathfrak{w}\mathfrak{A})$ ist in den φ_i' linear, ebenso wie $(\mathfrak{q}\mathfrak{A})$ in den $\dot{\varphi}_i$; das erstere geht in das andere über, wenn man alle φ_i' durch die $\dot{\varphi}_i$ ersetzt. Deshalb ist

$$\frac{\partial (\mathfrak{w}\mathfrak{A})}{\partial \varphi_i'} = \frac{\partial (\mathfrak{q}\mathfrak{A})}{\partial \dot{\varphi}_i} .$$

Ferner ist w^2 eine homogene quadratische Funktion der φ_i' und geht in q^2 über, falls man dieselbe Vertauschung vornimmt. Deswegen geht dabei auch $\partial (w^2)/\partial \varphi_i'$ in $\partial (q^2)/\partial \dot{\varphi}_i$ über, und diese beiden Differentialquotienten unterscheiden sich um denselben Faktor, wie φ_i' und $\dot{\varphi}_i$, d. h. es ist nach (2)

$$\frac{\partial (w^2)}{\partial \varphi_i'} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - q^2}} \frac{\partial (q^2)}{\partial \dot{\varphi}_i} .$$

Damit ist der Nachweis erbracht, daß für jeden Impuls, also auch für jedes Integral von der Form (5), nach beiden Berechnungsarten derselbe Wert herauskommt.

Dies läßt sich natürlich auch auf andere Art zeigen. Man bestätigt z. B. leicht nach (6) und (7) die Gleichungen:

$$\sum \psi_i \varphi_i' = \sum \varphi_i' \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \varphi_i'} = m w^2 + \frac{e}{c} (\mathfrak{w} \mathfrak{A}),$$

$$\sum \psi_i^* \dot{\varphi}_i = \sum \dot{\varphi}_i \frac{\partial \mathfrak{L}^*}{\partial \dot{\varphi}_i} = \frac{m c q^2}{\sqrt{c^2 - q^2}} + \frac{e}{c} (\mathfrak{q} \mathfrak{A}),$$

und schließt aus ihnen, daß sich bei einer Koordinatentransformation die ψ_i kontragredient zu den φ_i', die ψ_i^* kontragredient zu den $\dot{\varphi}_i$ transformieren. Die φ_i' und $\dot{\varphi}_i$ aber unterliegen den gleichen Transformationsformeln und außerdem stimmen für die rechtwinkeligen Koordinaten x, y, z, die man aus (1) ersieht, die Impulse ψ_x usw. mit ψ_x^* usw. überein. Also stimmen ψ_i und ψ_i^* auch für beliebige Koordinaten überein.

Drücken wir in (4) w^2 statt durch die φ_i' durch die Impulse ψ_i aus, so finden wir die Energie E als eine Funktion $E(\varphi, \psi)$; und zwar als dieselbe Funktion, wie wenn wir in der gleichbedeutenden Gleichung (4a) q^2 durch die Impulse ausdrücken. Infolgedessen ergeben beide Berechnungsarten auch dieselbe Hamilton-Jacobische Differentialgleichung.

Dies läßt sich keineswegs schon daraus schließen, daß die Bahn des Teilchens und der Ort als Funktion der Zeit bei beiden Berechnungsarten gleich herauskommen muß; es könnte noch zwei verschiedene Wirkungsfunktionen S und S^* geben. Daraus folgt nämlich nur, wenn wir mit α_2 und α_3 die Konstanten bezeichnen, welche neben der Energiekonstanten $\alpha_1 = E$ in einer vollständigen Lösung dieser Differentialgleichung auftreten,

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial S^*}{\partial \alpha_i}.$$

Also muß zwischen S und S^* nur der Zusammenhang bestehen:

$$S(\alpha, \varphi) = S^*(\alpha, \varphi) + f(\varphi).$$

Aber die Funktion f der Koordinaten φ braucht keine Konstante, sie könnte sogar mehrwertig sein, so daß auch die Periodizitätsmoduln dieser Funktionen, welche für die Quantentheorie ihre Bedeutung haben, verschieden ausfallen. Erst wenn man die Tatsache hinzunimmt, daß für die Koordinaten x, y, z wegen $\psi_x = \psi_x^*$ usw. die Gleichungen

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial S^*}{\partial x} \quad \text{usw.}$$

bestehen, so sieht man, daß die Funktion f nur eine bedeutungslose Konstante sein kann.[1])

In der Aufstellung der Hamilton-Jacobischen Differentialgleichung aber zeigt wieder das Schottsche Verfahren seine Einfachheit. Denn man braucht diese Gleichung nur nach der klassischen Dynamik hinzuschreiben und dann die potentielle Energie durch den Ausdruck (3) und, wie in (4), die bei der klassischen Dynamik willkürliche Konstante durch $-\frac{1}{2} m c^2$ zu ersetzen.

---

1) Dieser Absatz ist aus einer Besprechung mit Hrn. W. Gordon hervorgegangen.

4. *Abklingungszeit und Verweilzeit angeregter Atome;*

von Gustav Mie.

---

1. Die Versuchsergebnisse W. **Wiens** über die Abnahme der Lichtemission eines Kanalstrahls, der in einen völlig gasfreien Raum hineinschießt, sind von ihm selber in seiner ersten Veröffentlichung[1]) durch die allmähliche Abklingung der Lichtemission der einzelnen Atome gedeutet worden. Dieser Deutung habe ich mich in einer an die **Wiensche** Arbeit anknüpfenden theoretischen Untersuchung[2]) angeschlossen. Maßgebend für die Abnahme der Kanalstrahlen-Helligkeit ist hiernach die Abklingungszeit des Atoms. Späterhin ist jedoch von mehreren Autoren die Ansicht vertreten worden, daß die Lichtemission der Atome ein fast momentan erfolgender Vorgang sei, und daß die Abnahme der Helligkeit des Kanalstrahls dadurch zu erklären sei, daß die Lichtblitze anfangs häufiger, später aber, wenn die Zahl der angeregten Atome abgenommen hat, seltener erfolgen. Nach dieser Ansicht ist die durchschnittliche Verweilzeit des Atoms im angeregten Zustand vor der explosionsartigen Lichtemission maßgebend für die Geschwindigkeit, mit der die Helligkeit der Kanalstrahlen abnimmt. Es ist aber nicht zu sehen, wie man diese zweite Ansicht mit der durch die Erscheinungen der Beugung und Interferenz bewiesenen Tatsache in Einklang bringen kann, daß das von den leuchtenden Atomen ausgesandte Licht Wellenzüge von mehreren Millionen Wellen bildet. Denn aus dieser Tatsache folgt, daß auch dann, wenn der Emissionsprozeß des Atoms selbst fast momentan vor sich geht, doch das aus ihm hervorgegangene Lichtgebilde sich im Laufe seiner weiteren Entwicklung in einen Wellenzug von einigen Millionen

---

1) **W. Wien**, Ann. d. Phys. **60**. S. 597. 1919.

2) **G. Mie**, Ann. d. Phys. **66**. S. 237. 1921.

kohärenter Wellen auflöst. Es ist nämlich klar, daß sich nicht erst die Ausstrahlungen einer größeren Menge von Atomen zu kohärenten Wellenzügen zusammenschließen können, es sei denn, daß unsere jetzige Vorstellung vom Atomismus von Grund auf falsch wäre. Nach dieser Vorstellung sollen die Strahlungen der verschiedenen Atome ja gerade gänzlich inkohärent sein. Der lange Wellenzug muß sich also schon aus dem von einem einzelnen Atom ausgestoßenen Lichtgebilde entwickeln. Während der Entwickelung der Wellen kann sich das Wellenzentrum relativ zum Atom nur wenig bewegen, denn sonst würde die Theorie mit den Beobachtungen über den Dopplerschen Effekt in Konflikt kommen. Also auch wenn wir die Theorie der momentanen Lichtemission akzeptierten, so würden die von W. Wien aufgenommenen Kurven die Abklingung der aus dem ursprünglichen Lichtgebilde sich entwickelnden Strahlung wiedergeben, aber nicht die Verweilzeit. Nimmt man mit Einstein[1]) an, daß das Lichtatom mit Lichtgeschwindigkeit aus dem Atom herausschießt, so muß man auch die Konsequenz ziehen, daß dieses Lichtatom schon von vornherein mit der Wellenstruktur herauskommt, die man in großen Entfernungen an ihm beobachtet. Daraus folgt dann, daß der Vorgang der Lichtemission in einer Zeit abklingt, deren Größe ungefähr der von Wien berechneten Abklingungszeit gleichkommt. Auch wenn das Licht, wie in der Theorie der „Nadelstrahlung“ angenommen wird, nahezu in einer Richtung aus dem Atom herausschießt, so sind doch bei einer großen Zahl von Atomen alle Richtungen gleichwertig, und die Strahlung eines kleinen Volumenteilchens, in welchem sehr viele leuchtende Atome vorhanden sind, zeigt daher dieselbe Intensitätsverteilung, als wenn von den Atomen lauter Kugelwellen ausgingen. Danach muß die von Wien beobachtete Abnahme der Kanalstrahlen-Helligkeit von der Abklingung der von dem einzelnen Atom emittierten Strahlung herrühren. So führt schließlich jede Theorie zu dem Schluß, daß die Wienschen Kurven im wesentlichen Abklingungszeit, und nicht Verweilzeit, widerspiegeln.

2. Ich gehe im folgenden von der Annahme aus, daß die

---

1) A. Einstein, Phys. Ztschr. 18. S. 121. 1917.

Strahlung von Anfang an ihre Wellenstruktur hat, und daß das Atom in der Zeit, während welcher es die Strahlung abgibt, nach und nach von einem stationären Zustand in einen anderen stationären Zustand übergeht. Das Atom verweilt dabei also längere Zeit in nicht stationären Zuständen. Daß dies möglich ist, wird durch die Tatsache bewiesen, daß das Atom, wie man aus den Gesetzen der Brechung und der Reflektion des Lichtes weiß, eine auftreffende Wellenstrahlung in derselben Art wie ein Körnchen eines trüben Mediums diffus zerstreut. Nach der Quantentheorie ist dies so zu deuten, daß die Wellenstrahlung das Atom etwas aus seinem stationären Zustand herausbringt, und daß das Atom in dem nichtstationären Zustand, den es nun angenommen hat, strahlt. Es strahlt dabei um so stärker, je weiter es infolge der Intensität der auftreffenden Wellen von dem stationären Zustand entfernt gehalten wird. Ich nehme an, daß es sich bei der freien Ausstrahlung ähnlich verhält. Je weiter der momentane Zustand des Atoms von dem stationären Endzustand entfernt ist, um so stärker ist die Strahlung. Wenn das Maß der Entfernung durch den Energieüberschuß des momentanen Zustandes gegen den stationären Endzustand gegeben ist, so erklärt sich sehr einfach, warum die Abklingung einem Exponentialgesetz gehorcht. Ob beim Verlassen des oberen stationären Zustandes die Ausstrahlung zuerst schwach beginnt, um in einer gewissen Entfernung von ihm ein Maximum zu erreichen und dann exponentiell abzuklingen, oder ob die Strahlungsintensität sofort mit einem großen Wert beginnt und dauernd exponentiell sinkt, das können wir dahingestellt sein lassen. Ich habe mich früher[1]) für die erste Annahme ausgesprochen, aber ich halte heute die zweite Annahme für ebenso berechtigt. Der wesentliche Unterschied der nichtstationären Elektronenbahnen gegen die stationären besteht in der Energieabgabe des Atoms durch Strahlung. Infolgedessen sind die nichtstationären Bewegungen der Elektronen nicht periodisch, und man wird annehmen müssen, daß sie nicht mehr die einfachen Gesetze der klassischen Mechanik erfüllen, ähnlich wie für die nichtperiodischen Bewegungen

---

1) G. Mie, Ann. d. Phys. **66**. S. 241. 1921.

der Elektronen in den komplizierteren Atommodellen nach **Niels Bohr** die Gesetze der klassischen Mechanik ungültig sind.[1])

3. Sprunghafte Änderungen kann das Atom bekanntlich durch Zusammenstöße mit Elektronen oder mit anderen Atomen erfahren. Man unterscheidet Stöße erster und zweiter Art.[2]) Bei einem Stoß erster Art geht das Atom plötzlich aus dem unteren stationären Zustand in einen höheren stationären Zustand über, indem die dazu nötige Energie von der Bewegungsenergie der beiden zusammenprallenden Korpuskeln entnommen wird. Ein Stoß erster Art kann nur dann eintreten, wenn bei dem Zusammenprall kinetische Energie von einer Größe, die mindestens dem Energieunterschied der beiden Niveaus gleichkommt, verfügbar wird. Bei einem Stoß zweiter Art geht das Atom umgekehrt vom oberen zum unteren Zustand über, indem die frei werdende Energie als Zuwachs der Bewegungsenergie der beiden Korpuskeln hervortritt. Ein Stoß zweier Atome, von denen mindestens das eine sich in einem höheren Zustand befindet, kann immer ein Stoß zweiter Art sein, wie langsam die Atome sich auch gegeneinander bewegen mögen. Kann das Atom auch in nichtstationären Zuständen einige Zeit verweilen, so müssen wir annehmen, daß es auch aus einem solchen Zwischenzustand durch einen Stoß plötzlich entweder in den oberen oder in den unteren stationären Zustand befördert werden kann. Wesentlich ist, daß das Endresultat eines wirksamen Stoßes immer ein stationärer Zustand des Atoms ist.

Es soll nun gezeigt werden, daß die Versuchsergebnisse von **R. W. Wood**[3]) und von **G. Cario**[4]) über die Abnahme der Lichtemission eines durch „optische Resonanz" oder durch Elektronenstöße angeregten Metalldampfes bei Zusatz eines neutralen Gases, die Herr Cario auf die Existenz einer endlichen Verweilzeit zurückführt, unter den von mir gemachten Annahmen ebenso gut durch eine endliche Abklingungszeit der Atome erklärt werden können. Ich rechne unter folgenden vereinfachenden Voraussetzungen:

---

1) **N. Bohr**, Ztschr. f. Phys. **13**. S. 134. 1923.

2) **O. Klein** und **S. Rosseland**, Ztschr. f. Phys. **4**. S. 46. 1921.

3) **R. W. Wood**, Phys. Ztschr. **13**. S. 353. 1912.

4) **G. Cario**, Ztschr. f. Phys. **10**. S. 185. 1922.

1. Die Verweilzeit sei Null.

2. Das Gesetz der Abklingung sei rein exponentiell:

$$J = J_0 \cdot e^{-a \cdot t} = J_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}},$$

die Konstante τ wollen wir als die „Abklingungszeit“ bezeichnen, es ist diejenige Zeit, in welcher die Intensität der Atomstrahlung auf den e^{ten} Teil heruntergeht. Nach den Messungen von W. Wien ist τ von der Größenordnung $2 \cdot 10^{-8}$ sec.

3. Jeder Zusammenstoß eines angeregten Atoms mit einem Atom des beigemischten neutralen Gases führe den Übergang des Atoms in den unteren stationären Zustand herbei.

Die dritte Annahme übernehme ich von Hrn. G. Cario, der sie seiner Überschlagsrechnung zugrunde legt. Da die Atome des beigemischten Gases sich verhältnismäßig langsam bewegen, so sind jedenfalls die Stöße erster Art sehr selten. Andererseits scheinen die Versuchsergebnisse dafür zu sprechen, daß fast jeder Stoß ein wirksamer Stoß ist.

Es sei T das durchschnittliche Zeitintervall zwischen zwei Zusammenstößen, die ein Quecksilberatom mit den Atomen des neutralen Gases erfährt. Der Moment des ersten Stoßes sei 0, der des zweiten T, in einem dazwischen liegenden Moment t werde das Atom zum Leuchten angeregt. Wir wollen eine Durchschnittsrechnung für eine sehr große Zahl N von Erregungen ausführen. Die Zahl der Fälle, wo das Atom gerade in dem Zeitelement zwischen t und $t + dt$ erregt wird, ist dann $N \cdot dt/T$. Die Energie des Atoms in den beiden Niveaus, zwischen denen die Ausstrahlung stattfindet, sei ε_m und ε_n, $\varepsilon_m = \varepsilon_n + h\nu$, wo ν die Schwingungszahl der emittierten Strahlung ist. In dem Moment, wo das zur Zeit t erregte Atom gestoßen wird, ist seine Energie ε nach dem von uns vorausgesetzten Abklingungsgesetz zu berechnen:

$$\varepsilon = \varepsilon_n + h \cdot \nu \cdot e^{-\frac{T-t}{\tau}}.$$

Es hat also bis zu dem Stoß weggestrahlt:

$$\varepsilon_m - \varepsilon = h \cdot \nu \cdot \left(1 - e^{-\frac{T-t}{\tau}}\right).$$

Von der ganzen in den N betrachteten Fällen verfügbaren Energie:

$$J_0 = N \cdot (\varepsilon_m - \varepsilon_n) = N \cdot h \cdot \nu$$

wird demnach der folgende Bruchteil ausgestrahlt:

$$J = \int_0^T \frac{N \cdot dt}{T} \cdot (\varepsilon_m - \varepsilon) = \int_0^T N \cdot h \cdot \nu \cdot \left(1 - e^{-\frac{T-t}{\tau}}\right) \cdot \frac{dt}{T},$$

$$J = J_0 \cdot \left(1 - \frac{\tau}{T} \cdot \left(1 - e^{-\frac{T}{\tau}}\right)\right).$$

Der Rest wird in Wärme umgesetzt.

Nicht nur die gewonnene Formel selbst, sondern sogar der ganze Gang der Rechnung stimmt, wenn man das Wort „Verweilzeit“ durch „Abklingungszeit“ ersetzt, vollkommen mit der Rechnung von Hrn. G. Cario überein, die auf den Voraussetzungen beruht: 1. Die Verweilzeit sei gleich τ, 2. Die Abklingungszeit sei 0. Die erwähnten Versuchsergebnisse lassen sich also ebenso gut mit einer endlichen Abklingungszeit, wie mit einer endlichen Verweilzeit erklären, die Abklingungszeit tritt einfach an die Stelle der Verweilzeit.

Will man genau rechnen, so hat man sowohl für die Abklingungszeit, wie für die Verweilzeit, endliche Werte anzunehmen. Außerdem muß man in Betracht ziehen, daß nach dem Beginn des Leuchtprozesses auch Stöße eintreten können, die die Atome in den oberen stationären Zustand zurückbringen. Allerdings ist das nur bei solchen Stößen möglich, die ein Atom ganz im Anfang des Leuchtprozesses treffen, wenn seine Energie noch nicht sehr weit unter die des oberen Niveaus gesunken ist. Denn späterhin, wenn das Atom mehr Energie weggestrahlt hat, wird die kinetische Energie der Wärmebewegung zu solchen Stößen erster Art im allgemeinen nicht mehr ausreichen.

4. Man wird noch eine zweite Möglichkeit sprunghafter Änderungen im Atom außer durch Stöße ins Auge fassen müssen, wenn man bedenkt, daß die Absorption der Strahlung von quantenhaften Änderungen begleitet ist. Die Gesetzmäßigkeiten der lichtelektrischen Emission von Elektronen bei Absorption von kurzwelligem Licht und von Röntgenstrahlung lassen sich mit einem kontinuierlichen Absorptionsprozeß, wie ihn beispielsweise M. Planck in der „zweiten Fassung der

Quantentheorie“[1]) annimmt, nicht in Einklang bringen. Trotzdem braucht man nicht sogleich die strenge Gültigkeit des Energieprinzips anzuzweifeln, wenn man sich dazu entschließt, anzunehmen, daß in den Atomen oder vielleicht in den Elektronen selbst Energie in einer uns bisher noch unbekannten Form als eine Art latenter Energie aufgespeichert werden kann. Wir wollen uns denken, daß beim Zusammenstoß zweier Atome ein Austausch latenter Energie stattfinden kann, ohne daß ihr Betrag im ganzen dabei geändert wird. Sie muß dann im statistischen Gleichgewicht auf die Atome des Körpers nach einem bestimmten Gesetz verteilt sein, das uns hier nicht interessiert. Ihr gesamter Betrag wird eine für die betreffende Atomart charakteristische, von der Temperatur unabhängige Größe haben. Die für die Lichtausstrahlung verfügbare Energie, von der im Bohrschen Modell allein die Rede ist, werde ich die freie Energie der Atome nennen. Die Menge der freien Energie allein soll durch den Buchstaben ε bezeichnet werden. Wir wollen nun zuerst *die* Atome für sich betrachten, die sich im unteren stationären Zustand n befinden. Wir müssen uns vorstellen, daß eine Bestrahlung dieser Atome mit Licht von der Schwingungszahl ν, welche einer Eigenschwingung des Atoms, $h\nu = \varepsilon_m - \varepsilon_n$, entspricht, und auf welche das Atom, wie die Erscheinung der anormalen Dispersion beweist, resoniert, zwei verschiedene Wirkungen habe. Erstens soll es von den Atomen absorbiert werden, und zwar soll die absorbierte Energie in der Form der latenten Energie aufgespeichert werden. Zweitens soll es in den Atomen explosionsartige Vorgänge auslösen, bei denen sie sprungweise vom unteren stationären Zustand n in den oberen m übergehen. Die hierzu nötige freie Energie wird dem Reservefond des Atoms an latenter Energie entnommen. Sowohl die Lichtabsorption als auch die auslösende Wirkung des Lichtes soll der Intensität der Strahlung proportional sein, und die Elementargesetze, welche die beiden Vorgänge beherrschen, sollen es mit sich bringen, daß die bei den Explosionen verbrauchte latente Energie immer gerade gleich der durch die Absorption in der Gesamtheit der Atome wieder hinzukommenden Menge der latenten Energie ist. Die Menge der latenten Energie ändert sich also nicht, und infolge der Zusammenstöße der Atome stellt sich immer wieder ihre ursprüngliche Verteilung her. Infolgedessen äußert sich die Absorption der Strahlung nur in den sprunghaften Änderungen der Atome, gleich als ob sie selber sprunghaft geschähe.

---

[1]) M. Planck, Theorie der Wärmestrahlung. 4. Aufl. S. 183 ff. 1921.

Die hiermit geschilderte Auffassung von der Absorption des Lichtes kann natürlich nicht den Anspruch machen, als eine wohl begründete Theorie zu gelten. Es genügt aber für meine Zwecke, gezeigt zu haben, daß es jedenfalls eine Möglichkeit gibt, die sprunghaften Wirkungen der Lichtabsorption mit der Wellenlehre des Lichtes und mit dem Gesetz von der Erhaltung der Energie zu vereinigen.

Ebenso wie im unteren stationären Zustand n muß das Atom auch im oberen stationären Zustand m Lichtabsorption zeigen, aber hier ist der Absorptionskoeffizient negativ, d. h.: Latente Energie verwandelt sich in Strahlungsenergie. Gleichzeitig werden sprunghafte Änderungen der Atome ausgelöst, bei denen die freie Energie $\varepsilon_m - \varepsilon_n = h \cdot \nu$ in latente Energie umgewandelt wird. Die Vorgänge verlaufen so, daß die neu entstandene latente Energie gerade die in Licht umgewandelte Menge wieder ersetzt.

In der Einsteinschen Theorie der schwarzen Strahlung[1]) spielen diese Vorgänge der positiven und der negativen Absorption des Lichtes in den Atomen eine wichtige Rolle. Wird die Zahl der Atome in den Zuständen n und m mit N_n und N_m angegeben, ist ferner die Energiedichte der von ihnen absorbierten Strahlung ϱ, so bezeichnet Einstein die Zahl der im Zeitelement dt ausgelösten sprunghaften Änderungen in den Atomen durch:

$$N_m \cdot B_m^n \cdot \varrho \cdot dt,$$

$$N_n \cdot B_n^m \cdot \varrho \cdot dt.$$

Für die beiden Größen B_m^n und B_n^m gilt der folgende wichtige Satz: Es seien die statistischen Gewichte der beiden stationären Zustände p_m und p_n, dann ist:

$$p_m \cdot B_m^n = p_n \cdot B_n^m .$$

---

[1]) A. Einstein, Verh. d. Dtsch. phys. Ges. 18. S. 318. 1916 und Phys. Ztschr. 18. S. 121. 1917.

Wenn die beiden Zustände an sich gleich wahrscheinlich sind, $p_m = p_n$, so ist auch die Wahrscheinlichkeit der sprunghaften Änderung der Atome aufwärts und abwärts gleich groß:

$$B^n_m = B^m_n.$$

Endlich wollen wir noch die nichtstationären Zwischenzustände ins Auge fassen, die das Atom durchläuft, wenn es unter freier Ausstrahlung eines Wellenzuges von der Periodenzahl ν allmählich vom Zustand m zu dem Zustand n übergeht. Wir werden annehmen müssen, daß die Atome auch in den Zwischenzuständen die Strahlung von der Periode ν, auf die sie resonieren, zum Teil negativ, zum Teil positiv absorbieren, und daß die Strahlung in ihnen sprunghafte Änderungen auslöst, und zwar sowohl nach oben wie nach unten. Es sei die Wahrscheinlichkeit dieser Sprünge von einem Zustand aus, in welchem die freie Energie des Atoms ε ist, durch die Größen B^m_ε und B^n_ε angegeben. Wir wollen als Verallgemeinerung des oben erwähnten Satzes annehmen: Wenn $p_m = p_n$, ist: $B^m_\varepsilon = B^n_\varepsilon$.¹)

5. Wir sind nun so weit gekommen, daß wir die Frage beantworten können, ob man, auch wenn die Ausstrahlung des Atoms in endlicher Zeit abklingt, für die Strahlung des schwarzen Körpers die Plancksche Formel bekommt. Nach der hier vertretenen Auffassung müssen die Atome über die Zwischenzustände zwischen zwei stationären Zuständen n und m kontinuierlich verteilt sein, dagegen sind in den stationären Zuständen selbst endliche Häufungsstellen der Atome. Wir wollen wie oben die freie Energie des Atoms allgemein mit ε bezeichnen, in den beiden stationären Zuständen mit ε_n und ε_m. In den beiden unendlich kleinen Gebieten ε_n bis $\varepsilon_n + \delta$ und ε_m bis $\varepsilon_m - \delta'$ haben wir endliche Atomzahlen N_m und N_n, die unabhängig von der Wahl der Intervallbreiten δ und δ' sind, falls nur δ und δ' genügend klein gewählt sind. In jedem anderen Intervall ε bis $\varepsilon + d\varepsilon$ dagegen ist die Zahl der Atome unendlich klein und proportional mit der Intervallbreite $d\varepsilon$, ich setze sie gleich $z_\varepsilon \cdot d\varepsilon$.

Wir werden uns in unserer Untersuchung auf den Übergang in dem einen Gebiet (m, n) beschränken, das Resultat

---

1) Wahrscheinlich: $B^m_\varepsilon = B^n_\varepsilon = B^m_n = B^n_m$.

besitzt, wie **Einstein**[1]) bemerkt hat, doch allgemeine Gültigkeit. Außerdem werden wir nach dem Vorgange von **M. Planck**[2]) annehmen, daß die beiden stationären Zustände an sich gleich wahrscheinlich sind: $p_m = p_n$. Diese Einschränkung ist nicht wesentlich.

Die Lichtemission der N_m angeregten Atome bringt es infolge der mit ihr verbundenen Energieabnahme mit sich, daß in jedem Zeitelement dt eine gewisse Zahl von Atomen, die natürlich mit der Gesamtzahl N_m proportional ist, die untere Grenze $\varepsilon_m - \delta'$ überschreitet. Wir wollen diese Zahl mit:

$$N_m \cdot a' \cdot dt$$

bezeichnen. Die Konstante a' ist der reziproke Wert der Verweilzeit τ':

$$\tau' = \frac{1}{a'} .$$

Nach dieser Definition hat der Begriff der Verweilzeit immer einen bestimmten Sinn, gleichgültig ob wir annehmen, daß die Lichtemission plötzlich mit großer Amplitude einsetzt, oder ob wir die Vorstellung eines allmählichen Anschwellens der Amplitude vorziehen (vgl. S. 197).

Wenn die Zustände der Atome im statistischen Gleichgewicht sind, und wenn außerdem alle Atome vom Zustand m an bis zum Zustand n herunter ungestört ausstrahlen, dann ist die Zahl der Atome, welche in einem Zeitintervall dt in einem Energiebereich $d\varepsilon$ von oben eintreten, genau gleich der Zahl derer, welche den Energiebereich $d\varepsilon$ in demselben Zeitintervall dt verlassen. Daraus folgt, daß sie auch gleich der Zahl $N_m \cdot a' \cdot dt$ der Atome ist, welche während des Zeitintervalls dt die Grenze $\varepsilon_m - \delta'$ passieren, und ebenso gleich der Zahl der Atome, die während dt durch die Grenze $\varepsilon_n + \delta$ in den unteren Bereich, wo der Zustand n herrscht, eintreten. Wenn also die Atome vollkommen ungestört fertig strahlen können, so ist die Zahl der aus der oberen Häufungsstelle herausfallenden Atome jederzeit gleich der in die untere Häufungsstelle hineinfallenden, gleichgültig ob der Ausstrah-

---

1) **A. Einstein**, Verh. d. Dtsch. phys. Ges. 18. S. 320. 1916.

2) **M. Planck**, Theorie der Wärmestrahlung. 4. Aufl. S. 172. 1921.

lungsprozeß fast momentan vor sich geht oder ob er eine lange Abklingungszeit in Anspruch nimmt.

Anders ist es, wenn der Ausstrahlungsprozeß der Atome irgendwo zwischen den Zuständen m und n jäh abgebrochen werden kann. Nach den vorhergegangenen Erörterungen müssen wir annehmen, daß dies auf zweierlei Art geschehen kann: sowohl durch den wirksamen Stoß eines anderen Atoms, als auch durch die Auslösung einer sprunghaften Änderung durch die im Körper vorhandene Strahlung von der Periodenzahl ν.

Wir wollen uns auf die Betrachtung des extremen Falles beschränken, daß es keinem einzigen der angeregten Atome gelingt fertig auszustrahlen, daß vielmehr alle schon unterwegs, ehe sie die Grenze $\varepsilon_n + \delta$ erreichen, einen jähen Abschluß ihrer Strahlung erleiden. In einem nichtgasförmigen Körper und in den Gasen, deren Druck größer ist als etwa 1 cm Hg, sind die Zusammenstöße der Atome so häufig, daß nur der hier betrachtete Fall Interesse hat. Wir fassen die Gesamtheit der strahlenden Atome in dem Zwischengebiet zwischen $\varepsilon_m - \delta'$ und $\varepsilon_n + \delta$ ins Auge. Die gesamte Zahl der Stöße, welche die Atome dieses Gebietes während der kleinen Zeit dt erfahren, sei mit $P \cdot dt$ bezeichnet, und die gesamte Zahl der Auslösungen von Sprüngen durch Strahlung mit $S \cdot dt$. Dann ist in dem von uns betrachteten Fall, da kein einziges Atom die Grenze $\varepsilon_n + \delta$ erreicht, notwendigerweise:

$$N_m \cdot \alpha' \cdot dt = P \cdot dt + S \cdot dt.$$

Die Wirkung der Stöße kann von zweierlei Art sein: Entweder springt das gestoßene Atom plötzlich in den Zustand m zurück; indem die kinetische Energie der zusammenprallenden Korpuskeln um $\varepsilon_m - \varepsilon$ verringert wird, oder es springt in den Zustand n herunter, und die kinetische Energie gewinnt den Betrag $\varepsilon - \varepsilon_n$. Wir wollen die gesamte Zahl der Stöße von der ersten Art mit $P^m \cdot dt$, die von der zweiten mit $P^n \cdot dt$ bezeichnen. Es ist also:

$$P = P^m + P^n.$$

Wenn der Körper sich im statistischen Gleichgewicht befindet, so muß jedem Stoß zweiter Art während des Zeitintervalls dt, durch den der Wärmebewegung die Energie $u = \varepsilon_m - \varepsilon$ entzogen wird, ein genau umgekehrt verlaufender Stoß entsprechen.[1]) Dieser umgekehrte Stoß ist ein Stoß erster Art, durch welchen die Wärmebewegung die Energie u wieder zurückbekommt. Das Atom, das ihn erfährt, muß seine Energie gerade bis zu einem Betrage ε' ausgestrahlt haben, der sich aus der Gleichung $u = \varepsilon_m - \varepsilon = \varepsilon' - \varepsilon_n$ ergiebt. Ebenso entspricht jedem Stoß zweiter Art auch ein Stoß erster Art. Die gesamten Zahlen der Stöße erster und zweiter Art in dem ganzen Bereich von $\varepsilon_m - \delta$ bis $\varepsilon_n + \delta$ müssen also einander gleich sein:

$$P^m = P^n = \tfrac{1}{2} P.$$

Auch die sprunghafte Änderung, die durch die Strahlung ausgelöst wird, kann erster und zweiter Art sein:

$$S = S^m + S^n$$

und zwar ist:

$$S^m \cdot dt = \int_{\varepsilon_n + \delta}^{\varepsilon_m - \delta'} z_\varepsilon \cdot B_\varepsilon^m \cdot d\varepsilon \cdot \varrho \cdot dt,$$

$$S^n \cdot dt = \int_{\varepsilon_n + \delta}^{\varepsilon_m - \delta'} z_\varepsilon \cdot B_\varepsilon^n \cdot d\varepsilon \cdot \varrho \cdot dt.$$

Da wir voraussetzen, daß die Zustände m und n das gleiche statistische Gewicht haben, so ist nach S. 203: $B_\varepsilon^n = B_\varepsilon^m$, folglich:

$$S^m = S^n = \tfrac{1}{2} S.$$

Nun wird von sämtlichen Atomen, die während des Zeitintervalls dt aus dem Zwischengebiet $\varepsilon_n + \delta$ bis $\varepsilon_m - \delta$ plötzlich herausfallen, die Zahl $(P^m + S^m) \cdot dt$ in den oberen Bereich zurückgeworfen, und nur die Zahl $(P^n + S^n) \cdot dt$ gelangt in das untere Gebiet. Nach unsern eben angestellten Erwägungen ist diese Zahl:

$$(P^n + S^n) \cdot dt = \tfrac{1}{2}(P + S) \cdot dt = \tfrac{1}{2} N_m \cdot a' \cdot dt.$$

Wenn wir mit Einstein die Zahl der Atome, die infolge der eigenen Ausstrahlung vom Zustand m in den Zustand n herunterfallen, mit $N_m \cdot A_m^n \cdot dt$ bezeichnen, so ergibt sich also:

---

[1]) Vgl. O. **Klein** und S. **Rosseland**, Ztschr. f. Physik. **4.** S. 49. 1921.

$$A^n_m = \tfrac{1}{2} \cdot a'$$

oder, wenn τ' die Verweilzeit ist:

$$A^n_m = \frac{1}{2 \cdot \tau'} \,.$$

A^n_m ist das Reziproke der doppelten Verweilzeit.

Nach der extremen Quantentheorie **Einsteins** ist dagegen A^n_m gleich dem reziproken Wert der Verweilzeit selbst $A^n_m = 1/\tau'$.

Die Zahl der Atome im unteren Gebiet ε_n bis $\varepsilon_n + \delta$ erfährt weiter noch dadurch Änderungen, daß mit dem oberen Gebiet ε_m bis $\varepsilon_m - \delta$ direkt Atome ausgetauscht werden, und zwar erstens durch wirksame Stöße, zweitens durch die von der Strahlung hervorgebrachten Sprünge. Dabei kommen von dem oberen Gebiet nur die Sprünge zweiter Art, von dem unteren Gebiet nur die erster Art in Betracht. Denn wenn im oberen Gebiet Sprünge erster Art eintreten, so kommen die von ihnen betroffenen Atome dadurch nicht aus dem Gebiet heraus, dasselbe gilt für Sprünge zweiter Art im unteren Gebiet. Nach der von uns schon vorhin gebrauchten Schlußweise folgt, daß beim statistischen Gleichgewicht der Wärmebewegung die Stöße erster Art im unteren Gebiet denen der zweiten Art im oberen Gebiet gleich sind. Die wirksamen Stöße der beiden Gebiete heben sich also in der Weise auf, daß die Zahl der Atome im unteren Gebiet durch sie keine Änderung erfährt. Anders ist es mit den durch die Strahlung hervorgebrachten Sprüngen. Da nämlich $N_m \neq N_n$, $B^m_n = B^n_m$, so ist:

$$N_n \cdot B^m_n \cdot \varrho \cdot dt \neq N_m \cdot B^n_m \cdot \varrho \cdot dt \,,$$

und die Bedingung für das statistische Gleichgewicht liefert:

$$A^n_m \cdot N_m = B^m_n \cdot N_n \cdot \varrho - B^n_m \cdot N_m \cdot \varrho \,.$$

Diese Gleichung ergibt, wie **Einstein** gezeigt hat, die **Plancksche** Strahlungsformel.

Zusammenfassung.

I. Es wird eine Strahlungstheorie auf folgenden Annahmen begründet:

1. Die Atome zeigen bei der spontanen Ausstrahlung sowohl eine endliche Verweilzeit, als auch eine endliche Abklingungszeit.

2. Sprunghafte Änderungen können in einem Atome durch zwei Ursachen hervorgerufen werden: durch wirksame Stöße anderer Atome und durch Absorption einer Strahlung, auf die das Atom resoniert.

3. Die Sprünge erfolgen nicht nur wenn das Atom sich in einem stationären Zustand befindet, sondern ebenso gut auch in den nichtstationären Zuständen, die es während einer spontanen Ausstrahlung von Licht durchläuft.

4. Das Endresultat jeder sprunghaften Änderung ist ein stationärer Zustand des Atoms. Man unterscheidet demgemäß Sprünge erster und zweiter Art, je nachdem es in den oberen oder den unteren stationären Grenzzustand gelangt.

II. Für die Vernichtung des von einem angeregten Metalldampf ausgehenden Lichtes bei Zufügung eines neutralen Gases nach den Versuchen von R. W. Wood und von G. Cario ist in erster Linie die Abklingungszeit des leuchtenden Atoms maßgebend.

III. Aus den von mir gemachten Annahmen folgt nach dem Einsteinschen Beweisverfahren für die schwarze Strahlung die Plancksche Formel, und zwar ergibt sich die Einsteinsche Größe A_m^n allein aus der Verweilzeit des Atoms.

IV. Während nach der extremen Quantentheorie die Größe A_m^n gleich dem reziproken Wert der einfachen Verweilzeit ist, ergibt sie sich nach den von mir gemachten Annahmen in dem Fall, daß die beiden Grenzzustände gleiches statistisches Gewicht haben, als der reziproke Wert der doppelten Verweilzeit.

Halle a. S., Physikalisches Institut der Universität,
18. Oktober 1923.

5. *Zur Theorie der Multipletts und ihrer Zeemaneffekte;*

von A. Sommerfeld.

Die gegenwärtige Arbeit bildet die Fortführung zweier älterer in diesen Annalen erschienener Abhandlungen.

In der ersten Abhandlung1) wurde das Schema der inneren Quantenzahlen eingeführt (ich benutze jetzt den von Bohr vorgeschlagenen Buchstaben j an Stelle des früheren n_j), um bei den Dublett- und Triplettsystemen die Struktur der in der I. N. S. (Kombination von p- und d-Term) auftretenden Liniengebilde zu erklären, nicht modellmäßig, sondern formal auf Grund der Festsetzung des folgenden Auswahlprinzipes:

$$\begin{tikzcd} & j-1 \\ j \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & j \\ & j+1. \end{tikzcd}$$

In Worten: Die innere Quantenzahl darf nicht um mehr als eine Einheit springen.

Dieses Auswahlprinzip hat Hr. Landé2) ergänzt durch die Vorschrift: 0 → 0 verboten. Landé bestimmte nämlich die inneren Quantenzahlen der Singuletterme der Erdalkalien im Anschluß an die von mir bestimmten inneren Quantenzahlen der Tripletterme und führte das Nichtauftreten der Kombination Sp_3 auf das Verbot 0 → 0 zurück.

In einer zweiten Abhandlung3), die ihre Entstehung meinem Zusammentreffen mit Hn. Catalan in Madrid verdankte, wurde die von Catalan4) und Gieseler5) im Spektrum von

---

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 63. S. 121. 1920. Im folgenden als „Erste Abhandlung“ zitiert.

2) A. Landé, Phys. Zeitschr. 22. S. 417. 1921.

3) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 70. S. 32. 1923. Im folgenden als „Zweite Abhandlung“ zitiert.

4) M. A. Catalan, Trans. Roy. Soc. 223. S. 127. 1922; Anal. Soc. Esp. Fis. y Chim. 21. S. 321. 1923.

5) H. Gieseler, Ann. d. Phys. 69. S. 147. 1922.

Cr und von Catalan im Spektrum von Mn entdeckten komplizierteren Multipletts nach denselben Auswahlregeln erklärt. Auch wurden Figuren mitgeteilt, der Hauptsache nach auf eine Idee von W. Heisenberg zurückgehend, welche den ersten Schritt in der Richtung einer Modellvorstellung der Multiplettstruktur tun.

Seitdem sind in schneller Folge weitere Multipletts beschrieben worden, nämlich von Catalan[1]) bei Cr, Mo, Sc, von Paschen[2]) bei Cl^+ und O^+, von C. C. und H. K. Kiess[3]) bei Mo und Ti, von Walters[4]) bei Fe, von Laporte[5]) und Meggers[6]) bei V.

Außer den Kombinationsgesetzen hat bei der Zusammenordnung solcher Multipletts insbesondere auch eine Intensitätsregel[7]) mitgeholfen, die zunächst empirisch gewonnen und dann auch korrespondenzmäßig begründet wurde. Sie bewährt sich aufs Schönste bei den von Götze[8]) analysierten Gruppen $(p p')$ und $(d d')$ von Ca und Sr. Wir dürfen erwarten, aus der Entwirrung der bisher unbekannten komplizierten Spektren und ihrer Anordnung in Multipletts außerordentlich wertvolle und reiche Aufschlüsse über die Fragen der Atomstruktur zu erhalten.

Schließlich hat Landé[9]) in einer bedeutungsvollen Arbeit die anomalen Zeemaneffekte für alle solche Multipletts vorhergesagt, nachdem er bereits früher das Schema für die Dublett- und Tripletterme[10]) erfolgreich entwickelt hatte. An der genauen Richtigkeit seiner Vorhersagen scheint kein Zweifel

---

1) M. A. Catalan, Anal. Soc. Esp. Fis. y Quim. 21. S. 84 und 213. 1923; 20. S. 606. 1922.

2) F. Paschen, Ann. d. Phys. 71. S. 537. 1923.

3) C. C. Kiess u. H. K. Kiess, Science 56. S. 666. 1922; Journ. Wash. Acad. of Science 13. S. 270. 1923.

4) F. M. Walters, ebenda 13. S. 243. 1923.

5) O. Laporte, Naturwiss. 11. S. 779. 1923; Phys. Zeitschr. 24. 1923.

6) W. F. Meggers, Journ. Wash. Acad. of Science 13. S. 317. 1923.

7) Zuerst mitgeteilt in „Atombau und Spektrallinien“ 3. Aufl., S. 448.

8) R. Götze, Ann. d. Phys. 66. S. 291. 1921.

9) A. Landé, Zeitschr. f. Phys. 15. S. 189. 1923. Im folgenden als „erste Mitteilung“ zitiert.

10) Zeitschr. f. Phys. 5. S. 231. 1921.

zu sein, da Hr. Back[1]) sie an verschiedenen Beispielen aus dem Mn-Spektrum mit äußerster Präzision bestätigt hat. Von den sonstigen Ergebnissen der Landéschen Arbeit sei insbesondere auf die allgemeine Intervallregel[2]) hingewiesen, die ebenso wie die Intensitätsregel gute Dienste bei der Auffindung von Multipletts leistet.[3]) Sie verallgemeinert in glücklicher Weise eine von Heisenberg[4]) für Tripletterme aufgestellte Regel.

Zwischen der Landéschen und meiner Auffassung der Termstruktur besteht der folgende Gegensatz: Bei Landé sind die eigentlichen inneren Quantenzahlen (bei ihm J genannt) der *ungeradzahligen* Terme *halbzahlig*, der *geradzahligen* Terme *ganzzahlig*. Meine ursprünglichen Konstruktionen benutzen *ganzzahlige* j-Werte bei den *ungeradzahligen*, zum Teil *halbzahlige*[5]) bei den *geradzahligen* Termen. Ich muß hieran durchaus festhalten; überhaupt habe ich an meiner Darstellung der ungeradzahligen Terme und ihrer Anwendung auf das Cr-Spektrum nichts abzuändern. Meine frühere Konstruktion für die geradzahligen Terme dagegen werde ich hier durch konsequentere Benutzung der halben Quanten verbessern. Was insbesondere das Mn-Spektrum betrifft, so haben dessen Terme nach Ausweis der Backschen Zeemanmessungen geradzahligen, nicht wie ich mit Hrn. Catalan annahm, ungeradzahligen Charakter.

Im gegenwärtigen Zustande der Theorie scheint es das Sicherste zu sein, die Frage nach der modellmäßigen Bedeutung in die zweite Linie zu stellen und zunächst die empirischen Beziehungen auf ihre einfachste arithmetische und geometrische Form zu bringen. Dieses Verfahren hat sich z. B. in der Theorie der Röntgenspektren bewährt. Während die speziellen

---

[1]) E. Back, Zeitschr. f. Phys. 15. S. 206. 1923.

[2]) Sie ist von Landé weiter vertieft in Zeitschr. f. Phys. 19. S. 112. 1923. Im folgenden als „zweite Mitteilung" zitiert.

[3]) Z. B. bei Laporte, l. c.

[4]) W. Heisenberg, Zeitschr. f. Phys. 8. S. 273. 1922.

[5]) Dasselbe tut Bohr, Ann. d. Phys. 71. Kayserheft, vgl. insbesondere S. 277 u. ff. Bohrs j-Werte sind aber durchweg um 1 größer als meine, weil er dem Heliumatom (der K-Schale) den Impuls 1 zuschreibt. Ich kann mich weder dem Bohrschen Heliummodell noch seiner absoluten Zählung der j anschließen.

Modelle (Kreisringe, Ellipsenverein, Kuben) sich als unfruchtbar erwiesen, hat die auf Kombinationsprinzip und Auswahlregeln basierte, halb empirische Systematik der Röntgenspektren zu wertvollen und sicheren Resultaten geführt. Wir werden hier in der Frage der Termstruktur ähnlich verfahren.

§ 1. Ungeradzahlige Terme.

Der Vollständigkeit wegen muß ich die in der ersten Abhandlung mitgeteilte Konstruktion hier kurz wiederholen. Es sei

j_s die innere Quantenzahl des unangeregten[1] Zustandes (s-Zustandes), früher j_0 genannt.

$j_a = k - 1$ eine Zahl, welche die Anregung mißt, früher mit j_1 bezeichnet.

j die innere Quantenzahl des jeweils betrachteten Termniveaus.

Bei ungeradzahligen Termen sind j_s, j_a und j *ganze* Zahlen. Wir sind geneigt, mit Landé j, also auch j_s (nach Multiplikation mit $h/2\pi$) als resultierendes Impulsmoment des Atoms anzusehen, ohne uns hierauf unbedingt festzulegen. Bei j_a ist die modellmäßige Bedeutung schon einigermaßen zweifelhaft. Wie dem auch sei, wir müssen alle drei Größen wie Vektoren behandeln, so daß j als Resultierende von j_s und j_a erscheint.

Die Art der Zusammensetzung von j_s und j_a zu j erläutern wir im Falle $j_s = 3$, $j_a = 2$, bzw. $j_a = 4$ durch die Figg. 1 u. 2. OS ist der Vektor j_s, SA der Vektor j_a. Mit j_a schlagen wir um S einen Kreis als geometrischen Ort für alle möglichen Lagen von j. Wegen der Ganzzahligkeit von j werden die wirklichen Lagen erhalten, indem wir um O Kreise mit allen in Fragen kommenden ganzzahligen Radien beschreiben. Ist $j_a \geqq j_s$, so haben wir die *permanente*[2] Niveauzahl erreicht. Diese ist

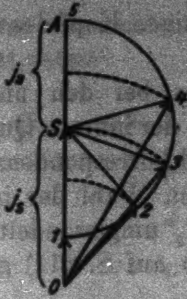
$$r = 2j_s + 1, \tag{1}$$

z. B. $r = 7$ für $j_s = 3$. Ist $j_a < j_s$, so befinden wir uns in der Reihe der ungeradzahlig aufsteigenden „unvollständigen" Niveau-

---

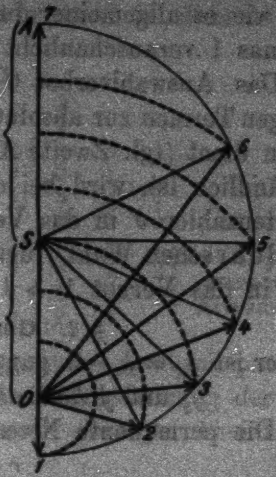
[1] Diese Bezeichnung ist vom Standpunkte des Impulsmomentes aufzufassen. Vom energetischen Standpunkte braucht der s-Term bekanntlich nicht der unangeregte Grundzustand zu sein.

[2] Name und Begriff stammt aus Erste Abhandlung § 1.



$j_s = 3$, $j_a = 2$

Fig. 1.



$j_s = 3$, $j_a = 4$

Fig. 2.

zahlen. Das Gesamtschema der j-Werte ist für $j_s = 3$ (Septettsystem):

Schema I.

$j_a = 0$	s					3				
1	p				4	3	2			
2	d			5	4	3	2	1		
3	f		6	5	4	3	2	1	0	$r = 7$, permanente
4	g	7	6	5	4	3	2	1		Niveauzahl

[Die Bezeichnung $g, h \ldots$ für Überbergmannterme ist einem Vorschlage von **Hansen**, **Takamine** und **Werner** nachgebildet.[1]]

In jeder Termreihe entsteht der höchste, bzw. niedrigste j-Wert durch *algebraische* Addition, bzw. Subtraktion der Vektoren j_s und j_a:

$$\begin{cases} j_{\max} = j_s + j_a \\ j_{\min} = |j_s - j_a| = \begin{cases} j_s - j_a & \text{unvollständige Terme,} \\ j_a - j_s & \text{permanente Terme,} \end{cases} \end{cases} \tag{2}$$

alle übrigen j-Werte entstehen durch geneigte *Vektor*addition.

Unser Beispiel entspricht dem Septettsystem, z. B. Cr. Im Singulettsystem ist $j_s = 0$, also $r = 2j_s + 1 = 1$, im Triplettsystem haben wir $j_s = 1$, $r = 3$. Die Einfachheit der s-Terme im Triplettsystem ist ein erstes Beispiel für das schrittweise Ansteigen der Multiplizität von 1 bis zur permanenten Niveauzahl, wie es allgemeiner durch den dreieckigen Kopf des obigen Schemas I veranschaulicht wird.

---

[1] **H. Hansen**, **T. Takamine** u. **Sw. Werner**, Dänische Akademie, Math.-phys. Mitt. 5. Nr. 3.

Das Auswahlverbot 0 -> 0, welches bei den ungeradzahligen Termen zur absoluten Normierung der inneren Quantenzahlen dient (vgl. Zweite Abhandlung) und korrespondenzmäßig verständlich ist, wird bei der **Landéschen** Wahl der inneren Quantenzahlen J in das Verbot $^1/_2 \rightarrow {}^1/_2$ umgewandelt. Bei der **Bohrschen** Wahl[1]) der j (vgl. Anm. 5 auf S. 211) geht es über in das Verbot $1 \rightarrow 1$.

§ 2. Geradzahlige Terme.

Hier ist $j_a = k - 1$ ganzzahlig, als Maß der Anregung, aber j_s und j *halbzahlig*.

Die permanente Niveauzahl r ist wieder

$$r = 2j_s + 1, \tag{1a}$$

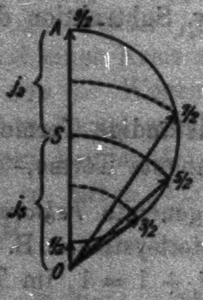
nämlich

	Dubl.	Quart.	Sext.	Okt.
$j_s =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
$r =$	2	4	6	8

Indem wir das halbzahlige j_s mit dem ganzzahligen j_a zu dem halbzahligen j zusammensetzen, erhalten wir jetzt die folgenden Figg. 3 und 4, in denen wir z. B.

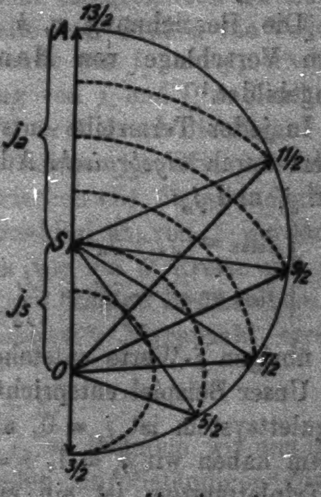
$$j_s = \tfrac{5}{2}, \quad j_a = 2, \text{ bzw. } 4$$

nehmen.



$j_s = {}^5/_2,\ j_a = 2$

Fig. 3.



$j_s = {}^5/_2,\ j_a = 4$

Fig. 4.

---

[1]) Vgl. N. **Bohr**, Ann. d. Phys. 71. S. 280 (Kayserheft). Die daselbst gegebene Erklärung dieses Verbotes ist von der absoluten Normierung der inneren Quantenzahlen unabhängig.

Das Gesamtschema der j-Werte wird in diesem Falle (Sextettsystem).

Schema II.

$j_a = 0$	s					$\frac{5}{2}$			
1	p				$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$		
2	d			$\frac{9}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	
3	f		$\frac{11}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$r = 6$, permanente Niveauzahl
4	g	$\frac{13}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$		

In jeder Termreihe entsteht $j_{\max}$ und $j_{\min}$ durch parallele gleichsinnige oder entgegensinnige Aneinandersetzung der Vektoren j_s und j_a, alle übrigen j durch geneigte Aneinandersetzung. Es ist auch jetzt

$$(2a)\quad \begin{cases} j_{\max} = j_s + j_a \\ j_{\min} = |j_s - j_a| = \begin{cases} j_s - j_a & \text{unvollständige Terme,} \\ j_a - j_s & \text{permanente Terme.} \end{cases} \end{cases}$$

Während vorher die permanente Termzahl erreicht war, wenn zum ersten Male 0 auftrat, ist sie jetzt erreicht, wenn zum zweiten Male $^1/_2$ auftritt. Es ist wohl zu bemerken, daß bei den geradzahligen Termen nur die permanente Termzahl geradzahlig ist, daß dagegen die noch nicht permanenten Termzahlen wie vorher in der Reihe 1, 3, 5 ansteigen.

In meiner ursprünglichen Darstellung (zweite Abhandlung) hatte ich j_s und j_a halbzahlig, j aber ganzzahlig genommen. Dadurch erhielt ich eine gerade Termzahl nicht nur bei den permanenten, sondern auch bei den unvollständigen Termen, also bei letzteren nach Ausweis der Erfahrung je ein Niveau zu viel. Das Schema der j-Werte im Sextettsystem würde z. B. nach meiner früheren Konstruktion lauten:

Schema III.

S					3	(2)		
p				4	3	2	(1)	
d			5	4	3	2	1	(0)
f		6	5	4	3	2	1	
g	7	6	5	4	3	2		

Die überzähligen, tatsächlich nicht auftretenden Niveaus sind eingeklammert; läßt man sie weg und verkleinert jeden j-Wert um $^1/_2$, so ergibt sich aus Schema III das vorige

Schema II. Daß bei der halbzahligen Wahl der j-Werte genau die richtige Niveauzahl zwangläufig und naturgemäß herauskommt[1]), scheint mir unbedingt für diese Wahl zu sprechen.

Ebenso haben wir die in meiner ersten Abhandlung angegebenen j-Werte des Dublettsystems je um $^1/_2$ zu verkleinern, um sie mit unserer jetzigen Zählung in Einklang zu bringen:

Schema IV.

	früher				jetzt			
s				1				$\frac{1}{2}$
p			2	1			$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
d		3	2			$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	
f	4	3			$\frac{7}{2}$	$\frac{5}{2}$		

Auf die Kombinations- und Intensitätsfragen hat diese Abänderung natürlich keinen Einfluß.

Es sei betont, daß unsere Konstruktionen zunächst nur als eine geometrische Einkleidung des arithmetischen Vorkommens der j-Werte angesehen werden mögen.

Als einziges über die Dubletts hinausgehendes Beispiel für geradzahligen Termcharakter wies ich in meiner zweiten Abhandlung mit allem Vorbehalt auf das Neonspektrum hin, obwohl nach seiner Stellung im periodischen System Neon ungeradzahligen Charakter haben sollte. Dieser Hinweis war irrig; zweifellos hat Landé[2]) recht, wenn er das Neonspektrum in seinen beiden der L_1- und L_2-Schale entsprechenden Termreihen aus Triplett- und Quintett, bzw. aus Singulett- und Tripletttermen aufbaut.

§ 8. Verteilung im periodischen System-Wechselsatz.

Bekanntlich vermutete Rydberg einen regelmäßigen *Wechsel* zwischen Dubletts und Tripletts beim Fortschreiten im periodischen System von einer Kolonne zur nächsten; er ließ seine Vermutung aber fallen, als er die von Kayser und Runge beobachteten Tripletts im Mn-Spektrum kennen lernte. Kossel und ich nahmen Rydbergs „Wechselsatz“ wieder auf, indem wir den Dublettcharakter einer unpaaren, den Triplettcharakter einer paaren Zahl von Valenzelektronen zuordneten; die scheinbare Ausnahme im Mn-Spektrum ließ sich dann durch die Annahme von Elektronen in einer „Zwischenschale" deuten. Nach der Zeemananalyse der Mn-Linien durch Back wissen wir aber, daß wir im Mn-Spektrum gar keine wahre Triplettstruktur, sondern viel kompliziertere und zwar geradzahlige Strukturen (Sextetts und Oktetts) haben; die Tripletts treten nur bei den noch nicht permanenten p-Termen auf. Überhaupt sehen wir jetzt, daß der Wechselsatz sich gar nicht auf die äußeren Valenzelektronen bezieht, sondern die folgende viel tiefer greifende Bedeutung hat: *Im periodischen System haben wir einen regelmäßigen Wechsel zwischen geradzahliger und ungeradzahliger Termstruktur*, in der I. Reihe Dubletts, in der II. Reihe Tripletts und Singuletts, in der III. Reihe außer den bekannten Dubletts wahrscheinlich Quartetts u. s. f. Die folgende Tabelle gibt die bisher bekannten und eingeklammert die von uns vermuteten Termstrukturen.[1]) Darunter sind einige der zurzeit verfügbaren Belege von neutralen und ionisierten Atomen angegeben.

---

[1]) Die Figuren Landés in seiner ersten Mitteilung bedeuten keine zwangläufige Vorschrift zur Konstruktion der j- bzw. J-Werte.

[2]) A. Landé, Zeitschr. f. Phys. 17. S. 292. 1923.

I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
Dubl.	Sing. Tripl.	Dubl. (Quart.)	(Sing.) Tripl. Quint.	(Dubl.) Quart. Sext.	(Singl.) (Tripl.) Quint. Sept.	(Dubl.) Quart. Sext. Okt.	Singl. Tripl. Quint.
Alk. Al^{++}, Si^{+++}	Erdalk. Al^{+}, Si^{++}	Erden Si^{+}	Ti	O^{+}, V	O, Cr, Mo Mn^{+}, Cl^{+}	Mn	Ne

Von den Elementen der Eisengruppe hat Fe selbst ungeradzahligen Charakter (Tripletts und Quintetts), Ni wahrscheinlich geraden, Co ungeraden Charakter. An Co schließt sich der geradzahlige Charakter des Cu-Spektrums an.

Man kann den Wechselsatz auch so formulieren: *Alle j- und j_s-Werte sind in der I, III, . . . Reihe halbzahlig, in der II, IV, . . . ganzzahlig; der maximale Wert von j_s, welcher die maximale permanente Niveauzahl bestimmt, nimmt regelmäßig von einer Reihe zur nächsten um $^1/_2$ zu.*

---

[1]) Vgl. auch Laporte, l. c.

§ 4. Anomale Zeemaneffekte und magnetisches Moment.

Es sei m die „magnetische Quantenzahl“; sie ist zugleich mit j ganz- oder halbzahlig und stets $\leqq j$. Ferner sei g der **Landé**sche Aufspaltungsfaktor und ΔT die von einem äußeren Magnetfelde hervorgerufene Termänderung, im Verhältnis zu der normalen Aufspaltung $\Delta \nu_{\text{norm}}$ genommen. Dann gilt bei schwachen Feldern[1])

$$(3)\quad \Delta T = m g \begin{cases} m = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}, \ldots \pm j & \text{für gerade Terme,} \\ = 0, \pm 1, \ldots \pm j & \text{für ungerade Terme.} \end{cases}$$

Landés allgemeine Formel für g aber schreibt[2]) sich in unseren Zeichen

$$(4)\qquad g = 1 + \frac{j(j+1) + j_s(j_s+1) - j_a(j_a+1)}{2j(j+1)}$$

oder auch

$$(4a)\qquad g = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{(j_s - j_a)(j_s + j_a + 1)}{j(j+1)}\,.$$

Der Zähler in der letzten Formel ist nach den Gl. (2) und (2a) auch gleich

$$(\pm j_{\min})(j_{\max} + 1),$$

wobei das Zeichen $-$ oder $+$ für die permanenten oder unvollständigen Terme gilt.

---

1) In starken Feldern (Paschen-Back-Effekt) findet bekanntlich eine „Normalisierung“ der magnetischen Niveaus statt. Das von **Pauli** für diesen Vorgang vorgeschlagene Schema (vgl. **Landé**, Zweite Mitteilung, Gl. (8)) schreibt sich in unseren Bezeichnungen:

$$\Delta T = \begin{cases} m + j - j_a & \text{für} \quad m \geqq j_s - j_a, \\ 2m + j - j_s & \text{„} \quad m \leqq j_s - j_a. \end{cases}$$

2) Ich möchte darauf hinweisen, daß sich auch **Landés** Formel für die feldlosen Aufspaltungen γ (Zweite Mitteilung, Gl. (6)) in unseren Zeichen besonders symmetrisch und in Analogie zu (4) schreibt

$$(4')\qquad \gamma = \frac{j(j+1) - j_s(j_s+1) - j_a(j_a+1)}{2(j_s + \frac{1}{2})(j_a + \frac{1}{2})}$$

wobei noch, wie mir scheint, die Addenden $1/2$ im Nenner auch wegfallen können, da sie empirisch nicht kontrollierbar sein dürften. Die Einfachheit der Formeln (4) und (4′), sowie namentlich der Figuren aus § 1 und 2 scheint mir dafür Zeugnis abzulegen, daß unsere j, j_a, j_s wirklich die einfachsten Elemente zur Wiedergabe des Tatsachenmaterials sind.

Die Formeln (3) und (4) decken, wie **Landé** gezeigt hat, das ganze, zurzeit gedeutete magnetooptische Material. Es gibt aber nach **Landé** und **Back** Zeemantypen, z. B. bei Ne und Pb, die nicht unter dieses Schema fallen.

Die für uns wichtigste Folgerung bezieht sich auf die Aufspaltung des „maximalen" Termniveaus. Wir setzen also in (4a)

$$j = j_{\max} = j_s + j_a$$

und erhalten:

$$g = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{j_s - j_a}{j_s + j_a} = \frac{2j_s + j_a}{j_s + j_a}\,. \tag{5}$$

Aus (3) folgt dann

$$\Delta T = (2j_s + j_a)\,\frac{m}{j}\,. \tag{5a}$$

Nun ist ΔT die (durch $h\,\Delta\nu_{\mathrm{norm}}$ dividierte) magnetische Energie des Atoms im äußeren Felde H und diese ist gleich H mal der Komponente des *magnetischen Momentes* μ des Atoms in Richtung von H also (bis auf den Faktor $h\,\Delta\nu_{\mathrm{norm}}$):

$$\Delta T = \mu\, H \cos(\mu, H). \tag{5b}$$

Wir setzen voraus: Das magnetische Moment μ hat dieselbe Richtung wie das „mechanische Moment" j; im Magnetfelde orientiert sich diese Richtung so, daß die Projektion des mechanischen Momentes j auf die Feldrichtung H gleich der magnetischen Quantenzahl m wird; die verschiedenen gequantelten Orientierungen des mechanischen Momentes im Magnetfelde sind dann durch die Forderung bestimmt, daß die Projektion $m \leqq j$ und zwar ganzzahlig oder halbzahlig wird, je nachdem j ganzzahlig oder halbzahlig ist; vgl. Fig. 5 und Fig. 6.

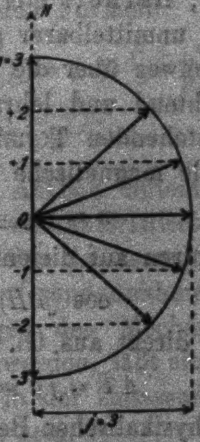


Fig. 5.

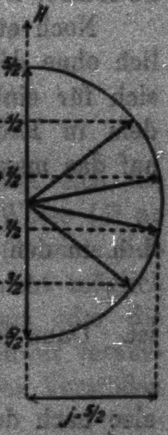


Fig. 6.

Also ist allgemein

$$\cos(\mu, H) = \cos(j, H) = \frac{m}{j}.$$

Dann aber liefert der Vergleich von (5a) und (5b)

$$(6) \qquad \mu = 2j_s + j_a.$$

Den Faktor H in (5b) haben wir dabei gegen den in (5b) hinzuzudenkenden Nenner

$$h\,\Delta \nu_{\text{norm}} = \frac{e}{m}\,\frac{h}{4\pi}\,H$$

fortgehoben; der übrig bleibende Faktor $\frac{e}{m}\,\frac{h}{4\pi}$ bedeutet die Einheit des **Bohrschen** Magnetons, in der wir μ weiterhin messen werden.

Gl. (6) besagt nun: *Um das magnetische Moment des Atoms aus den j-Werten zu berechnen, hat man j_s doppelt, j_a einfach zu zählen.*

Dies gilt für jedes Atom und jedes maximale Termniveau, insbesondere für den s-Term $j_a = 0$. *Im s-Zustande ist das magnetische Moment einfach gleich* $2j_s$. Den Faktor 2 bei j_s bezeichnen wir als *„magnetooptische Anomalie.“* Er erinnert unmittelbar an die *magnetomechanische Anomalie*[1]) von **Einstein-de Haas, Beck, Barnett** etc.

Noch etwas unmittelbarer gelangen wir zur Gl. (6), nämlich ohne den Umweg über die Fig. 5 und 6, die ich aber an sich für einleuchtend und lehrreich halte, wenn wir uns bei dem in Rede stehenden Termniveau $j = j_{\max}$ beschränken auf das maximale magnetische Aufspaltungsniveau

$$m = m_{\max} = \pm j,$$

d. h. in den Figuren auf diejenigen Lagen, wo

$$\cos(\mu H) = \pm 1$$

ist. Dann folgt direkt aus Gl. (3) und (5)

$$\Delta T = j g = 2j_s + j_a,$$

also nach der physikalischen Bedeutung der magnetischen Aufspaltung wieder $\mu = 2j_s + j_a$, Gl. (6).

---

1) Hierauf hat **Landé** wiederholt hingewiesen, vgl. Zeitschr. f. Phys. 5. S. 239; 7. S. 404. 1921; 11. S. 362. 1922. Der Faktor 2 ist von **Sucksmith** und **Bates** (Proc. R. Soc. 104. S. 499. 1923) mit einer Genauigkeit von 1 Proz. bestimmt.

Es ist bezeichnend, daß das in unseren Konstruktionen einfachste Termniveau $j_{\max}$, bei welchem j_s und j_a gleichgerichtet sind, auch die einfachste magnetische Deutung $\mu = 2j_s + j_a$ zuläßt. In den Figuren, die Landé l. c. zur Konstruktion der Termniveaus und ihrer Einstellung im Magnetfelde gibt, entsteht j auch bei dem Niveau $j = j_{\max}$ durch schiefwinklige Aneinanderlagerung seines „Rumpfimpulses" und „Zusatzimpulses" und findet keine Parallelstellung zum äußeren Magnetfelde statt. Allerdings stellt sich Landé eine weitergehende Aufgabe als wir: Er will die vollständige modellmäßige Deutung der g-Formel erreichen, was zurzeit undurchführbar scheint. Wenden wir nämlich unser Verfahren auf ein allgemeines Termniveau an, in dem j_s und j_a verschieden gerichtet sind, so kommen wir zu magnetischen Aufspaltungen, die von der Landéschen Formel (4) verschieden sind. Das sinngemäß verallgemeinerte Verfahren wäre hier: Richtungsquantelung des Vektors j im Magnetfelde, doppelte Zählung von j_s, wobei sowohl von j_s wie von j_a nur die Komponente in Richtung von j zu nehmen ist, während diejenige senkrecht dazu durch eine Präzession des ganzen Atomgerüstes um die j-Achse im Zeitmittel aufgehoben gedacht wird. Dies führt ähnlich wie bei Landé[1]) zu den Formeln

$$\mu = j + j_s \cos(j, j_s) = j + \frac{j^2 + j_s^2 - j_a^2}{2j}$$

$$g = \frac{\mu}{j} = 1 + \frac{j^2 + j_s^2 - j_a^2}{2j^2}.$$

Trotz ihrer Ähnlichkeit im Aufbau unterscheidet sich die letztere Formel von (4) in so charakteristischer Weise (j^2 an Stelle von $j(j+1)$ usw.), daß ihre Anpassung an (4) ohne tiefgreifende Änderungen in den Grundannahmen nicht möglich scheint. Ob diese Änderungen den Mechanismus oder die Quantenbedingungen betreffen werden, läßt sich schwer voraussagen. Ich glaube, man soll in der Zulassung von Verstößen gegen die Mechanik vorsichtig sein.

Wenn unsere ursprünglichen Annahmen ausreichend wären, müßte sich wenigstens der Sonderfall $j = j_{\min}$, der neben dem vorangestellten $j = j_{\max}$ der nächsteinfache ist, befriedigend er-

---

1) A. Landé, Erste Mitteilung S. 200. Gl. (21), (21').

ledigen lassen. Bei $j = j_{\min}$ liegen die beiden Bestandteile j_s und j_a in der gleichen Geraden, wie bei $j = j_{\max}$, sind aber entgegengesetzt gerichtet. Er gliedert sich in zwei Unterfälle

a) $j = j_{\min} = j_s - j_a$, unvollständiger Term,
b) $j = j_{\min} = j_a - j_s$, permanenter Term.

(Der Übergangsfall $j_s = j_a$, $j_{\min} = 0$, ist bezeichnender Weise nach Landés Formel magnetisch unbestimmt: hier gibt es keine Möglichkeit der Orientierung wegen Verschwinden des j-Vektors).

Aus (4a) berechnet man, $j_s \neq j_a$ vorausgesetzt

$$g = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{j_s + j_a + 1}{j + 1} = \begin{cases} \dfrac{2j_s - j_a + 2}{j_s - j_a + 1} \quad \ldots \text{ Unterfall a)} \\[2ex] \dfrac{j_a - 2j_s + 1}{j_a - j_s + 1} \quad \ldots \text{ Unterfall b).} \end{cases} \tag{7}$$

Aus Gl. (3) folgt daraufhin für die magnetischen Termaufspaltungen

$$\Delta T = \{2(j_s + 1) - j_a\}\frac{m}{j^*},\; j^* = j + 1 = (i_s + 1) - j_a, \tag{7a}$$

$$\Delta T = \{(j_a + 1) - 2j_s\}\frac{m}{j^*},\; j^* = j + 1 = (j_a + 1) - j_s. \tag{7b}$$

Diese Formeln sind nicht hypothetisch. Wohl aber ist es die folgende geometrische Deutung: Räumlich gequantelt wird jetzt nicht das Moment j, sondern $j + 1$. Und zwar denken wir uns die Erhöhung von j auf $j + 1$ so vorgenommen, daß die Einheit an den größeren der beiden Bestandteile j_s oder j_a von j angetragen wird, also an j_s im Unterfalle a), $j_s > j_a$, an j_a im Unterfalle b), $j_a > j_s$. Schreiben wir also etwa

a) $j_s^* = j_s + 1$, $j_a^* = j_a$, $j^* = j + 1 = j_s^* - j_a^*$,
b) $j_s^* = j_s$, $j_a^* = j_a + 1$, $j^* = j + 1 = j_a^* - j_s^*$,

so können wir (7a, b) zusammenfassen in

$$\pm \Delta T = (2j_s^* - j_a^*)\frac{m}{j^*} \tag{8}$$

und können wiederum den ersten Faktor als magnetisches Moment μ, den zweiten als Richtungsfaktor $\cos(\mu, H)$ deuten; dann haben wir formal dieselbe Regel wie vorher: Im magnetischen Moment zählt j_s^* doppelt, j_a^* einfach.

Abgesehen aber von der künstlichen Einführung des j^* usw. entsteht die Schwierigkeit, daß, wenn wirklich j^* die Richtungsquantelung bestimmt, jetzt $m \leqq j^*$ sein sollte. In Wirklichkeit aber gilt allgemein $m \leqq j$.

§ 5. Spektroskopische Magnetonenzahlen, magnetische Fassung des Wechselsatzes.

Zum Schluß meiner zweiten Abhandlung habe ich die magnetischen Momente von Cr und Mn in Einheiten des **Bohr**schen Magnetons $\left(\frac{e}{m}\,\frac{h}{4\pi}\right)$ aus deren Spektren abzuleiten gesucht, und zwar habe ich sie dort mit j_s identifiziert, wie man es nach der klassischen Elektrodynamik erwarten sollte. Wir lernten aber als Hauptresultat des vorigen § die „magnetooptische Anomalie“ kennen, der zufolge das magnetische Moment des s-Termes doppelt so groß ist als sein j-Wert.

Bei Cr wurde l. c. nur das Quintettsystem ($j_s = 2$) analysiert. Aus der inzwischen bekannt gewordenen Seriendarstellung des Septettsystems geht hervor, daß der Grundzustand des neutralen Cr nicht dem Quintett-, sondern dem Septettsystem angehört. Wir haben also hier

$$j_s = 3\,;\ \mu = 6\,.$$

Die Magnetonenzahl 6 für das neutrale Chromatom bestätigt[1]) in schlagender Weise die von **Epstein**[2]) und **Gerlach**[3]) berechneten Magnetonenzahlen 3 und 4 von Cr^{++} und Cr^{+}.

Bei Mn gehört der Grundzustand zum Sextettsystem,

$$j_s = \tfrac{5}{2}\,,\quad \mu = 5\,,$$

außerdem gibt es das Oktettsystem:

$$j_s = \tfrac{7}{2}\,,\quad \mu = 7\,.$$

Die von **Epstein** und **Gerlach** berechneten Magnetonenzahlen $\mu = 4$ für Mn^{+++} (unsicher), $\mu = 5$ für Mn^{++} lassen die Möglichkeit des Überganges sowohl in $\mu = 5$ wie in $\mu = 7$ für Mn neutral erkennen.

---

[1]) Vgl. hierzu die beiden Noten des Verf., Physik. Zeitschr. 24. S. 360. 1923 u. Zeitschr. f. Phys. 19. S. 221. 1923. In letzterer wird gezeigt, daß die Rechnungen von **Gerlach** und **Epstein** auf Grund der Theorie des anomalen Zeemaneffektes zu modifizieren sind.

[2]) P. **Epstein**, Science 57. Mai 1923.

[3]) W. **Gerlach**, Physik. Zeitschr. 24. S. 275. 1923.

Dem Rydbergschen Wechselsatz können wir hiernach neben seiner spektropischen Fassung in § 3 auch die folgende magnetische Fassung geben: *Im periodischen System findet ein regelmäßiger Wechsel zwischen geraden und ungeraden Magnetonenzahlen statt.* Den *geradzahligen Termsystemen* entspricht wegen $\mu = 2j$, eine *ungerade Magnetonenzahl*, den *ungeradzahligen Termsystemen* eine *gerade Magnetonenzahl.* Dabei ist stillschweigend vorausgesetzt, daß der Grundzustand des Atoms, um dessen Magnetonenzahl es sich handelt, ein *s-Zustand* sei. Ist dies nicht der Fall, so kann bei einem *geradzahligen*[1] (ungeradzahligen) Termsystem gegebenenfalls eine *gerade* (ungerade) oder auch eine *gebrochene* Magnetonenzahl auftreten. Insbesondere sei erwähnt, daß die Magnetonenzahl, die dem *s*-Zustande der maximalen Termmultiplizität entspricht, *gleich der maximalen Valenz des Atoms ist.*

In den Gebieten des periodischen Systems, wo die Atomionen nicht durch paramagnetische Eigenschaften ausgezeichnet sind, wo es also keine im Aufbau begriffene „Zwischenschalen“ gibt, stellt sich die Elektronenkonfiguration im allgemeinen auf das jeweils mögliche *Minimum der Magnetonenzahl* ein, d. i. auf 0 bei ungeradzahligem Termcharakter (*S*-Term der Singuletts), auf 1 bei den geradzahligen Termen (*s*-Term der Dubletts). Auch wenn im unangeregten *S*-Zustande die Magnetonenzahl 0, das Atom also *diamagnetisch* ist, würden die angeregten Zustände (höhere *s*- oder *p*-, *d*- . . . Terme) dennoch *paramagnetischen Charakter* zeigen.

Zum Schluß einige Bemerkungen methodischer Art: In unserer Darstellung haben wir diese magnetischen Gesetzmäßigkeiten mit unserer Verfügung über die *j*-Werte (ganzzahlig oder halbzahlig bei ungeradem oder geradem Termcharakter) in Verbindung gebracht, auf welche Weise sie sich in der Tat am bequemsten ausdrücken lassen. Wir wollen aber hervorheben, daß diese Verbindung nicht notwendig ist.

---

[1] Vielleicht kann man die (Zeitschr. f. Phys. 19. S. 228. 1923) betonte Anomalie bei Co^{++} ($\mu = 4$ trotz geraden Termcharakters) dahin deuten, daß hier nicht der *s*-Term den Grundzustand des Co^{++}-Ions darstellt.

Die magnetischen Momente folgen direkt aus den empirischen Zeemaneffekten (genauer gesagt aus ihrer Zerlegung in Terme), sind also weniger hypothetisch als die Absolutwerte der j, über welche, vgl. die Einleitung, verschiedene Meinungen bestehen.

Ähnliches gilt von dem zu erwartenden Ergebnis der Stern-Gerlachschen Versuche bei paramagnetischen Atomen wie Cr oder Mn. Was Landé hierüber in seiner zweiten Mitteilung[1]) über „Termstruktur und Zeemaneffekt" andeutet, stimmt überein mit dem, was ich in der Physik. Zeitschr.[2]) geschrieben habe. Trotz abweichender Ansichten über die Normierung der inneren Quantenzahlen und ihre geometrische Deutung beurteilen wir also die zu erwartenden Versuchsergebnisse in gleicher Weise, weil diese unmittelbar die Zeemanterme widerspiegeln. Sie geben ebenso wie die letzteren, vgl. § 4, Gl. (5b) direkt die Komponente des magnetischen Momentes in der Feldrichtung an, also das Produkt $\mu \cos (\mu, H)$ bzw. $\mu \cos (j, H)$, wenn wir μ und j als gleichgerichtet ansehen dürfen. Das Produkt von μ in den Neigungscosinus ist also ohne Willkür bestimmt; willkürlich wird erst die Trennung in die beiden Faktoren den „Größenfaktor" μ und den „Neigungsfaktor" $\cos (\mu, H)$. Nach meiner Auffassung wäre beim Ag-Atom

$$\cos (\mu, H) = \cos (j, H) = \pm 1, \quad \mu = 1, \quad j_s = \tfrac{1}{2},$$

nach Landés Auffassung dagegen

$$\cos (\mu, H) = \cos (J, H) = \pm \tfrac{1}{2}, \quad \mu = 2, \quad J = 1,$$

also schon in diesem einfachsten Falle keine parallele oder antiparallele Orientierung[3]), sondern Schiefstellung gegen das Feld! Nach meiner Auffassung dagegen wird die Neigung von μ gegen H allemal durch die Figuren 5 und 6 bestimmt.

---

[1]) a. a. O., vgl. insbesondere Anm. 3 am Anfang.

[2]) l. c. 1923, § 3. Für Cr wird dort ein System von 7 Ablenkungsstreifen vorhergesagt, bei Mn ein System von 6, in den Abständen 0, ±2, ±4, ±6 bzw. ±1, ±3, ±5 von der Mitte, die Ablenkung beim Ag-Atom als 1 gerechnet.

[3]) Auch N. Bohr schließt Parallelstellung im Felde aus (l. c. Kayser-Heft), z. B. im Grundzustande der Edelgase, um damit ihr diamagnetisches Verhalten zu erklären, trotz seiner Annahme $j = 1$; vgl. hierzu unsere Anm. 5 auf S. 211.

Es scheint mir zweifellos, daß die Einfachheit und Natürlichkeit unserer geometrischen Konstruktionen, sowohl bei der Termstruktur wie bei den Zeemaneffekten, dem wirklichen Sachverhalt näher kommen, als die Landéschen. Aber es sollte hier ausdrücklich festgestellt werden, daß eine bindende Entscheidung zwischen beiden Standpunkten nicht möglich ist, weder beim Stern-Gerlach-Versuch, noch bei den Magnetonenzahlen, weil bei der Deutung des empirischen Tatbestandes die Spaltung in Neigungsfaktor und Größenfaktor notwendigerweise eine gewisse Willkür mit sich bringt.

Zusammenfassung.

Ohne im allgemeinen die Modellfrage lösen zu wollen, sollten die empirischen Tatsachen der Termstruktur und der Zeemaneffekte in ein möglichst einfaches arithmetisches und geometrisches Schema gebracht werden. Dazu diente vor allem die Festsetzung: Die innere Quantenzahl j ist bei den geradzahligen Termen (Dubletts, Quartetts . . . .) halbzahlig, bei den ungeradzahligen Termen (Singuletts, Tripletts . . . .) ganzzahlig. Dasselbe gilt insbesondere von der inneren Quantenzahl j_s des s-Termes. Dagegen ist die „Quantenzahl“ j_a der Anregung stets ganzzahlig und gleich $k-1$.

Die Ann. 70 gegebene Konstruktion der geradzahligen Terme ist daraufhin abzuändern und liefert alsdann diese Terme ebenso vollständig und naturgemäß wie die frühere Konstruktion der ungeradzahligen Terme.

Landés Formel der anomalen Zeemaneffekte, die sich in den Zeichen j, j_s, j_a besonders symmetrisch schreibt, enthält als einfachste Folgerung die „magnetooptische Anomalie“: Bei der Bestimmung des magnetischen Momentes der Atome in den Zuständen von maximalem j zählt j_s doppelt, j_a einfach. Die „magnetomechanische Anomalie“ (Einstein-de Haas, Barnett usw.) erscheint als Spezialfall hiervon.

Der „Wechselsatz“ besagt spektroskopisch: Im periodischen System alternieren geradzahlige und ungeradzahlige Terme, die maximale Termmultiplizität ist gleich der Maximalvalenz $+1$; er besagt magnetisch unter der Vorauszetzung, daß der Grundzustand des Atoms ein s-Zustand ist: Die Magnetonenzahl, in quantentheoretischen, Bohrschen Einheiten gemessen, ist im periodischen System abwechselnd ungerade und gerade. Die maximale Magnetonenzahl (im allgemeinen bei angeregten Termsystemen verwirklicht) ist direkt gleich der Maximalvalenz. Außerhalb der paramagnetischen Gruppen mit unvollständigen Schalen stellt sich im allgemeinen die Magnetonenzahl auf den Minimalbetrag 0 oder 1 ein.

Eine zwingende Entscheidung zwischen dieser und der Landéschen Auffassung läßt sich aus den empirischen Tatsachen (einschließlich des Stern-Gerlachschen Versuches) nicht fällen. Die Erfahrungen über Richtungsquantelung liefern immer nur das Produkt Größenfaktor des magnetischen Momentes mal Neigungsfaktor.

6. *Über den Zusammenhang zwischen Kernneutralisierung und Sekundärstrahlung bei den α-Strahlen und Kanalstrahlen;*

von E. Rüchardt.

---

§ 1. In den Annalen habe ich vor kurzem eine Arbeit[1]) veröffentlicht, in der die Umladungen von homogenen Wasserstoffatomkanalstrahlen ausführlich untersucht wurden. Für den Neutralisierungsvorgang der Wasserstoffatomkerne bei ihrer Wechselwirkung mit H_2-, N_2- und O_2-Molekülen ergaben sich dabei besonders einfache Resultate. Es zeigte sich, daß die mittlere freie Umladungsweglänge L_1 des H-Kernes in diesen Gasen nahezu gleich groß ist und stark mit zunehmender Geschwindigkeit zunimmt. Ich habe dann weiter in der Zeitschrift für Physik[2]) diesen Vorgang theoretisch zu deuten versucht, und Hr. Wentzel[3]) hat die gleiche Frage allgemeiner behandelt und ist zu ähnlichen Resultaten gelangt.

Es zeigte sich, daß folgender Ausdruck für die Weglänge L_1 eines Kernes von der Kernladungszahl E sich aufstellen ließ:

$$L_1 = \frac{m^2 v^4}{4 N \pi e^2 E^2}, \tag{1}$$

m ist hierbei die Masse und e die Ladung des Elektrons, v die Geschwindigkeit des Kerns und N die Zahl der Elektronen, die der Kern aus dem Gasmolekül pro gaskinetischen Zusammenstoß im Ionisierungsprozeß im Mittel frei macht und die als anlagerungsfähige Elektronen zur Verfügung stehen, multipliziert mit der Zahl der Moleküle pro Kubikzentimeter. N ist also die Zahl der anlagerungsfähigen Elektronen pro Kubikzentimeter und kann, wenn beim Drucke p beobachtet wird, geschrieben werden:

---

[1]) E. Rüchardt, Ann. d. Phys. 71. S. 377. 1923.

[2]) E. Rüchardt, Zeitschr. f. Phys. 15. S. 164. 1923.

[3]) G. Wentzel, Zeitschr. f. Phys. 15. S. 172. 1923.

$$N = \frac{N_0 p}{760} n, \tag{2}$$

wobei N_0 die Loschmidtsche Zahl pro Kubikzentimeter bei 760 mm Hg und 300° abs. ($2{,}45 \cdot 10^{19}$)[1]) und n die Zahl der pro gaskinetischen Zusammenstoß des Kerns mit einem Gasmolekül im Mittel freigemachte Zahl von Elektronen ist. Es ist dabei immer angenommen, daß die Anlagerung eines Elektrons an den Kern im unmittelbaren Anschluß an den Ionisierungsprozeß des Moleküls erfolgt. Mit Anlagerung verbundene Zusammenstöße mit freien Sekundärelektronen sind zu vernachlässigen. Es zeigte sich nun, daß der Ausdruck 1 die Beobachtungen richtig wiedergibt, wenn n zwischen 1 und 2 liegt. Es mußte also angenommen werden, daß pro gaskinetischen Zusammenstoß mit einem H_2-, O_2- oder N_2-Molekül durch einen Wasserstoffkern im Kanalstrahl im Mittel ein bis zwei Elektronen von dem Molekül abgetrennt werden. Es würde eine gute Kontrolle für die Theorie sein, wenn die Messung von n direkt möglich wäre.

Von den bei dem Zusammenstoß H-Kern–Gasmolekül befreiten Elektronen wird eines sich anlagern können, während die übrigen als Sekundärelektronen völlig frei werden. Die Zahl n ist also die Summe der sekundären und angelagerten Elektronen pro gaskinetischen Zusammenstoß. Die Zahl der Sekundärelektronen, die pro gaskinetischen Zusammenstoß frei werden, wird gewöhnlich nach dem Vorgange von Lenard und Kossel als „sekundärstrahlender Querschnitt“ gemessen in Einheiten des gaskinetischen Querschnitts bezeichnet. Ist also der „sekundärstrahlende Querschnitt“ in diesem Sinne gleich n, so heißt dies, daß der sekundärstrahlende Querschnitt n-mal größer ist als der gaskinetische, und das kann zunächst entweder so aufgefaßt werden, daß nur bei jedem *gaskinetischen* Zusammenstoß Elektronen frei werden und im Mittel jedesmal n oder aber so, daß bei jedem mit *Sekundärstrahlung* verbundenen Zusammenstoß nur *ein* Elektron frei wird, dafür aber die Zahl der Zusammenstöße mit dieser Wirkung n-mal größer ist als die Zahl der gaskinetischen Zusammenstöße. n braucht deshalb natürlich keine ganze Zahl zu sein und kann auch kleiner

---

1) In meiner Veröffentlichung in der Zeitschr. f. Phys. steht versehentlich $4{,}25 \cdot 10^{19}$.

als 1 sein. Für Wasserstoff kann die Zahl der Elektronen, die bei der Ionisierung eines Moleküls frei wird, natürlich nicht größer als 2 sein, ein α-Teilchen macht aber im Wasserstoff in der Nähe der Optimalgeschwindigkeit für die Ionisierung pro gaskinetischen Zusammenstoß etwa zehn Elektronen frei. Dies zeigt, daß der sekundärstrahlende Querschnit bei diesem Vorgang wesentlich größer ist als der gaskinetische. Bei Kathodenstrahlen ist dagegen n selbst in der Nähe der Optimalgeschwindigkeit klein (in Luft nach **Kossel** etwa 0,4)[1]), so daß hier der sekundärstrahlende Querschnitt kleiner ist als der gaskinetische. Nun liegen aber auch bei Wasserstoffkanalstrahlen Messungen der Sekundärstrahlung seit einiger Zeit vor. Nach diesen Messungen von H. **Baerwald**[2]) ist die „differentiale Sekundärstrahlung“ s von Wasserstoffkanalstrahlen in Wasserstoff als Funktion der Strahlgeschwindigkeit bekannt. Unter der „differentialen Sekundärstrahlung“ wird dabei nach der Nomenklatur von **Lenard** diejenige Zahl von Sekundärelektronen s verstanden, die von einem Strahlteilchen auf 1 cm Weg bei einem Gasdruck von 760 mm Hg erzeugt wird. Bei **Baerwalds** Meßverfahren wird die *gesamte Ladung* der durch die Ionisierung entstandenen positiven *Restionen* des Gases gemessen und durch die im gleichen Maße gemessene Teilchenzahl im Strahl und den Weg im Meßraum dividiert. Ein Unterschied in der Wirkung der H-Kerne und der neutralen H-Atome besteht dabei nicht.[3]) Man bekommt auf diese Weise alle bei den Ionisierungsvorgängen auf dem Wege 1 cm durch einen H-Kern freigemachten Elektronen, also alle in unserem Sinne *anlagerungsfähigen* Elektronen. Zum Teil werden sie tatsächlich sofort angelagert, zum Teil sind sie als freie Sekundärelektronen im Raume beobachtbar. Nach **Baerwald** ergeben sich nun folgende Zahlen:

Tabelle I.

v	s	s/Q
$1 \cdot 10^8$	$0{,}76 \cdot 10^4$	0,65
$1{,}9 \cdot 10^8$	$1{,}52 \cdot 10^4$	1,30
$2{,}3 \cdot 10^8$	$2{,}28 \cdot 10^4$	1,96
$2{,}5 \cdot 10^8$	$2{,}6 \cdot 10^4$	2,24

---

[1]) H. **Kossel**, Ann. d. Phys. 37. S. 393. 1912.

[2]) H. **Baerwald**, Ann. d. Phys. 65. S. 167. 1921.

[3]) H. **Baerwald**, Verh. d. D. Phys. Ges. 14. S. 867. 1912.

In der dritten Kolonne habe ich den Quotienten aus s und der gaskinetischen Querschnittssumme für Wasserstoff 11700[1]) gebildet. Q ist, da der Kern punktförmig ist, gleich der Zahl der gaskinetischen Zusammenstöße des Kernes pro Zentimeter und s/Q unsere gesuchte Größe n. Man sieht, daß die von den meinigen ganz unabhängigen Versuche von **Baerwald** in der Tat ergeben, daß n im Bereiche der untersuchten Geschwindigkeiten 1 bis 2 ist. Wir haben also für N nunmehr zu setzen:

$$N = \frac{N_0 p}{760} \frac{s}{Q} \tag{3}$$

und es wird

$$L_1 = \frac{m^2 v^4\, 760\, Q}{4 N_0 p \pi e^2 E^2 s}, \tag{4}$$

s ist dabei eine nach **Baerwald** experimentell bekannte Funktion von v. Dieser Ausdruck muß L_1 als Funktion von v übereinstimmend mit dem Experiment darstellen.

Fig. 1 stellt s/Q als Funktion von v nach Tab. I dar.

Fig. 2 zeigt in Kurve I den Verlauf der Formel

$$\frac{1}{L_1} = \frac{4 N \pi e^2 E^2}{m^2 v^4} \tag{5}$$

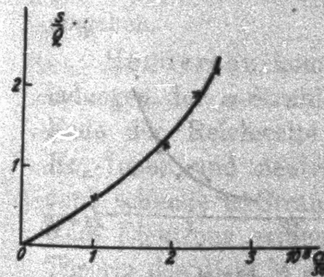


Fig. 1.

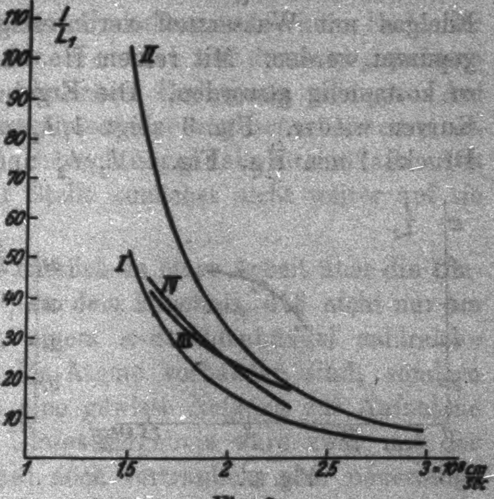


Fig. 2.

für $p = 1$ mm Hg und $n = \frac{s}{Q} = 1$. Kurve II entspricht $n = \frac{s}{Q} = 2$ und Kurve III $n = \frac{s}{Q}$, wo s/Q als Funktion von v aus Fig. 1 entnommen ist. Kurve IV endlich gibt den experimentellen Verlauf von $1/L_1$ als Funktion von v in Wasserstoff. Kurve III und IV sollten identisch sein. Die Übereinstimmung erscheint völlig genügend, wenn man beachtet, daß Baerwalds Strahlen nicht homogen in bezug auf v und m waren und die Geschwindigkeit nur aus der Parallelfunkenstrecke ermittelt ist. Da die Werte von L_1 innerhalb der Meßgenauigkeit die gleichen sind, wenn statt Wasserstoff, Sauerstoff oder Stickstoff das umladende Gas ist, können wir vermuten, daß s/Q für H-Kanalstrahlen in diesen drei Gasen wesentlich den gleichen Wert und die gleiche Geschwindigkeitsabhängigkeit besitzt.

---

[1]) Nach **Landolt-Börnstein**, 5. Aufl.

Da es mir wünschenswert erschien nachzusehen, ob sich vielleicht einatomige Gase den Umladungen gegenüber anders verhalten, habe ich mit meiner früher beschriebenen Anordnung die Umladungen der H-Kanalstrahlen in einem technischen Gemisch von Ne und He untersucht.[1] Da nämlich wegen der notwendigen Trennung von Beobachtungs- und Entladungsraum die Durchströmungsmethode benutzt werden mußte und das Edelgas mit Wasserstoff verunreinigt wurde, mußte es abgepumpt werden. Mit reinem He wären deshalb die Versuche zu kostspielig geworden. Die Ergebnisse gebe ich in einigen Kurven wieder. Fig. 3 zeigt $1/L_2$ als Funktion von v beim Drucke 1 mm Hg, Fig. 4 L_1/L_2 und Fig. 5 den hieraus berechneten Verlauf von $1/L_1$ als Funktion von v ebenfalls bei 1 mm Hg. Zum Vergleich ist der Verlauf von $1/L_1$ in Wasserstoff wiedergegeben. Die Abweichungen der beiden Kurven

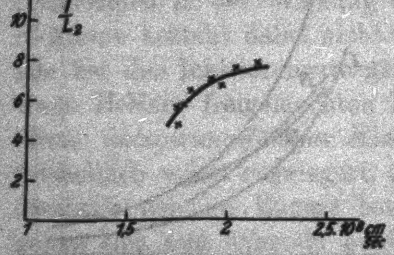


Fig. 3.

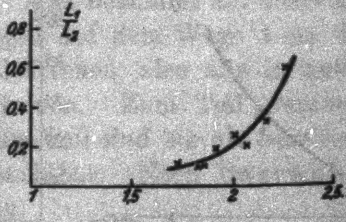


Fig. 4.

---

[1] Eine kleine Bombe mit diesem Gasgemisch hat uns die Gesellschaft für Lindes Eismaschinen freundlicherweise zur Verfügung gestellt, wofür ich Hrn. Dr. Politzer meinen besonderen Dank sage.

werden sich wohl auf die Unterschiede in s/Q für H-Strahlen in Wasserstoff und dem Edelgasgemisch zurückführen lassen.

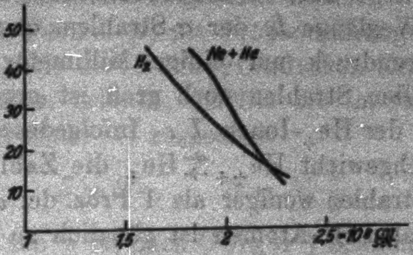


Fig. 5.

§ 2. Die experimentelle Erfahrung, daß α-Strahlen erst am Ende ihrer Reichweite Neigung zur Elektronenaufnahme zeigen, hatte mich weiter veranlaßt zu der Anlagerungsbedingung 1 noch eine zweite beschränkende Bedingung hinzuzufügen, welche für die Kanalstrahlen nur von untergeordneter Bedeutung ist, bei den großen Geschwindigkeiten der α-Strahlen aber das vermeintliche Fehlen von Umladungen bis zum Ende der Reichweite erklärte, und Hr. Wentzel war durch allgemeinere Betrachtungen zu einer ähnlichen Bedingung gelangt. Auf Grund einiger neuerer experimenteller englischer Arbeiten erscheinen aber nun diese Betrachtungen als zweifelhaft. Ich möchte deshalb an dieser Stelle zunächst nicht weiter auf sie eingehen.

Henderson kommt nämlich in einer Arbeit über die Umladungen der α-Strahlen[1]) zu dem Ergebnis, daß nicht nur am Ende der Reichweite in einem α-Strahlenbündel zahlreiche He_+-Ionen und neutrale He-Atome vorhanden sind, sondern auch schnelle α-Strahlen eine gewisse Neigung zur Aufnahme eines Elektrons zeigen. Dieses Ergebnis wäre zwar mit der Theorie des Hrn. Wentzel noch verträglich, aber neuerdings hat Rutherford[2]) gefunden, daß tatsächlich auch schnelle α-Teilchen *häufigen* Umladungen unterliegen, so daß ein α-Teilchen auf seinem Wege bis zum Ende der Reichweite mehrere 1000 Mal ein Elektron aufnimmt und abgibt. Daß trotzdem bei schnellen α-Strahlen die Konzentration der He_+-Ionen und He-Atome so gering ist, daß dies bisher nicht bemerkt wurde, liegt nach Rutherford nur daran, daß die mittlere freie Weglänge L_1 der α-Strahlen, obwohl sie in Luft von Atmosphärendruck nur einige Millimeter betragen soll, doch bei schnellen Strahlen noch groß ist gegen die mittlere freie Weglänge der He_+-Ionen L_2. Infolgedessen beträgt beim Umladungsgleichgewicht $He_{++} \rightleftarrows He_+$ die Zahl der He_+-Ionen bei schnellen Strahlen weniger als 1 Proz. der α-Teilchen. Die Zahl von neutralen He-Atomen ist gänzlich zu vernachlässigen. Da nun nach Rutherford L_1 ungefähr wie v^6 und L_2 ungefähr linear mit abnehmenden v abnimmt und die Geschwindigkeit der α-Strahlen längs der Reichweite dauernd kleiner wird, so wird bei einer bestimmten Geschwindigkeit $L_1 = L_2$ und demnach auch $N_1 = N_2$, d. h. die Zahl der He_+-Ionen gleich der Zahl der α-Strahlen werden, und bei den noch kleineren Geschwindigkeiten am Schluß der Reichweite haben wir dann wesentlich den Umladungsvorgang $He_+ \rightleftarrows He$ bis zur völligen Absorption wie bei den Kanalstrahlen. In diesem Gebiet verschwinden also allmählich die α-Strahlen praktisch aus dem Bündel. Die für drei verschiedene Geschwindigkeiten von Rutherford angegebenen Zahlen sind die folgenden:

---

[1]) G. H. Henderson, Proc. Roy. Soc. 102. S. 496. 1923.

[2]) E. Rutherford, Nature 112. S. 305. 1923.

Tabelle II.

v	L_2/L_1	L_2	L_1 [1]
$1{,}79 \cdot 10^9$	1/200	0,011 mm	2,2 mm
$1{,}44 \cdot 10^9$	1/67	0,0078 „	0,52 „
$0{,}89 \cdot 10^9$	1/7,5	0,0050 „	0,037 „

Bei geringeren Geschwindigkeiten liegen keine Messungen vor. Die Messungen sind insofern nicht ganz einwandfrei als nur L_2 direkt in Luft gemessen ist, während L_1 aus dem Verhältnis $\frac{L_2}{L_1} = \frac{N_2}{N_1}$ ermittelt wurde. Dieses Verhältnis ist aber unter der Annahme gewonnen, daß eine hinsichtlich des Brennvermögens einer gewissen Luftstrecke äquivalente Glimmerschicht auch als *umladende* Materie ebenso wirkt wie diese Luftstrecke. Dieser Schluß erscheint mir sehr gewagt und die quantitative Seite der Untersuchung deshalb zunächst etwas problematisch. Auf die Größenordnung dürfte aber wohl diese Annahme nicht fälschend eingewirkt haben.

---

[1] *Anm. bei der Korr.* Die Werte der freien Weglängen beziehen sich auf $p = 760$ mm Hg.

Daß unsere Formel (1) die Größenordnung und Geschwindigkeitsabhängigkeit der Rutherfordschen Ergebnisse befriedigend darzustellen erlaubt, möchte ich im folgenden zeigen.

Es ist in Formel (1) zu setzen:

$$E = 2e, \qquad N = N_0 \frac{s}{Q},$$

s als Funktion von v ist nach Geiger[1]) bekannt und für Q ist der gaskinetische Wert für Luft zu setzen.[2]) Es ergibt sich:

v	$L_{1\,\text{berechnet}}$	$L_{1\,\text{beobachtet}}$
$1{,}79 \cdot 10^9$	1,17 mm	2,2 mm
$1{,}44 \cdot 10^9$	0,395 „	0,52 „
$0{,}89 \cdot 10^9$	0,0214 „	0,037 „

Ich glaube kaum, daß bei der Unsicherheit, die in der Messung liegt, eine bessere Übereinstimmung erwartet werden konnte.

Bemerkenswert ist besonders, daß die rasche Abnahme von L_1 mit abnehmendem v bei den α-Strahlen und die verhältnismäßig langsame Abnahme von L_1 bei den H-Kanalstrahlen durch die gleiche Formel dargestellt wird. Das liegt an der verschiedenen Geschwindigkeitsabhängigkeit von s in diesen beiden Fällen. Im Gebiete der Kanalstrahlen nimmt, wie Fig. 1 zeigt, s mit v zu und zwar etwas stärker als linear. Setzen wir hier angenähert $s = c_1 \cdot v$, so wird

$$L_1 = c_2 \frac{v^4}{s} = c v^3.$$

Bei den schnellen α-Strahlen nimmt aber umgekehrt s mit zunehmenden v ab und zwar gilt theoretisch[3]) und experimentell $s = \frac{c_1}{v}$.[4]) Es gilt also:

$$L_1 = c_2 \frac{v^4}{s} = c v^5.$$

---

1) H. Geiger, Proc. Roy. Soc. (A) 82. S. 486. 1909 u. E. Rutherford, Marx' Handbuch II, S. 117.

2) Nach Landolt-Börnstein $Q = 20300$.

3) Vgl. z. B. E. Rutherford, Marx' Handbuch II, S. 119.

4) Vgl. das Nähere H. Baerwald, Ann. d. Phys. 65. S. 167. 1921.

Rutherford glaubt aus den drei Beobachtungen ungefähr $L_2 = c v^6$ annehmen zu dürfen, doch ist das wohl nicht als hinreichend gesichert zu betrachten. Diese Unterschiede bei den Kernumladungen der α-Strahlen und Kanalstrahlen können genauer nur durch weitere Versuche geklärt werden. Ich möchte hier nur darauf aufmerksam machen, daß ein Parallelismus zu bestehen scheint zwischen den Umladungen und der Ionisierungsspannung. Der Umladungsvorgang $He_+ \rightarrow He_{++}$ wird im Gebiete der Kanalstrahlen nicht beobachtet[1], während die Vorgänge $H \rightarrow H_+$ und $He \rightarrow He_+$ ganz normale bis zu geringen Geschwindigkeiten beobachtbare Vorgänge sind. Die Ionisierungsspannung von He_+ ist aber etwa viermal größer als die des H-Atoms und etwa doppelt so groß wie die des neutralen He-Atoms. Man kann annehmen, daß auch im Kanalstrahl He_{++} gebildet wird, daß aber bei den kleinen Geschwindigkeiten die Lebensdauer des α-Teilchens so gering ist, die Anlagerung eines Elektrons so rasch wieder erfolgt, daß die Konzentration dieser Teilchen nur äußerst klein ist. H_+-Ionen und He_+-Ionen haben auch bei verhältnismäßig kleinen Geschwindigkeiten eine noch nicht unbeträchtliche Konzentration, doch nimmt diese mit abnehmender Geschwindigkeit ja ebenfalls ab.

München, Physikal. Institut der Universität, Oktober 1923.

---

[1] **F. W. Aston**, Phil. Mag. 45. S. 934. 1923.

7. Über die elektrischen Erscheinungen bei der Reaktion zwischen Chininsulfat und Wasserdampf;

von F. Harms.

Erhitzt man Chininsulfatkristalle an freier Luft, so wird während des Erhitzungsprozesses einige Zeit lang das die Kristalle umgebende Gas ionisiert; ebenso, wenn das erhitzte Chininsulfat sich abkühlt. Die Erscheinung ist mehrfach, zuletzt von A. Kalähne[1]) und von G. C. Schmidt[2]) untersucht, und es steht fest, daß der elektrische Vorgang mit der Aufnahme bzw. Abgabe von Wasser verbunden ist. Es liegt nahe, für die weitere Untersuchung den Vorgang dadurch von Nebenerscheinungen zu befreien, daß man fremde Gase ausschließt, d. h. die Reaktion in reinem Wasserdampf sich abspielen läßt.

1. Die Versuchsanordnung war folgende: Ein luftdichtes Metallgefäß enthielt eine gut isolierte und mit dem Elektrometer verbundene untere Platte *U* und eine obere *O*, die durch den aufgeschliffenen Glasdeckel von dem geerdeten Gehäuse isoliert zu beliebigen Potentialen geladen werden konnte. Auf die untere Platte wurden die zu untersuchenden Präparate gebracht, entweder auf fein mattgeschliffene Metallplatten trocken aufgerieben, oder wenn größere Substanzmengen verwendet werden sollten, in Metallschalen locker eingefüllt. Das

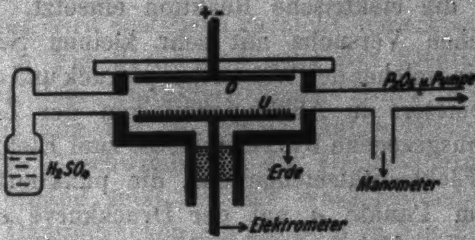


Fig. 1.

---

1) A. Kalähne, Ann. d. Phys. 18. S. 450. 1905; Phys. Zeitschr. 23. S. 45. 1922, daselbst weitere Literaturangaben.

2) G. C. Schmidt, Zeitschr. f. Phys. 8. S. 160. 1922.

Gefäß stand 1. mit einem P_2O_5 enthaltenden Glaskolben und mit einer Gaedepumpe, 2. mit einem Differenzialmanometer, 3. mit einem Schwefelsäure von geeigneter Konzentration enthaltenden Kölbchen in Verbindung. Alle Verbindungen waren durch gute Hähne absperrbar und alles war so dicht, daß auch in mehreren Tagen keine durch P_2O_5 nicht absorbierbaren Gase nachgewiesen werden konnten. Das Ganze wurde längere Zeit ausgepumpt, die Schwefelsäure im Vakuum gasfrei gemacht und der zur Pumpe führende Hahn abgeschlossen. Es ließ sich dann in dem Versuchsgefäß jeder beliebige Wasserdampfdruck dadurch herstellen, das ein über das Schwefelsäurekölbchen geschobener kleiner elektrischer Ofen auf die Temperatur gebracht wurde, die den gewünschten Druck als Dampfdruck über der Schwefelsäure lieferte. Als Manometer diente ein Hg-Differenzialmanometer mit 2 weiten Schenkeln; in dem einen wurde der Stand des Hg bezogen auf eine feste Marke mikroskopisch abgelesen; die improvisierte Anordnung gestattete etwa $^1/_{100}$ mm abzulesen.[1])

2. Läßt man zu dem durch längeres Auspumpen wasserfrei gemachten Chininsulfat Wasserdampf, so zeigt sich, daß der Wasserdampfdruck verhältnismäßig hohe Werte annehmen muß, bevor die elektrische Reaktion einsetzt. Das Ergebnis eines typischen Versuchs mit sehr kleinen Substanzmengen zeigt Fig. 2, in welcher der Wasserdampfdruck und die Einstellung des Elektrometers in Abhängigkeit von der Zeit angegeben sind. Die ausgezogene Kurve stellt die zum Elektrometer übergegangene Elektrizitätsmenge dar, die punktierte die Drucke. Zu der dem Punkte *a* auf der Druckkurve entsprechenden Zeit wurde der Heizstrom des Ofens geschlossen, der Druck steigt allmählich; bei *b* wird der Heizstrom unterbrochen, worauf der Druck sinkt. Ebenso an den Punkten *c* bzw. *d*. Bei *e* wird ein mit P_2O_5 gefülltes Gefäß angeschlossen zur Beschleunigung des Trocknens. Das Elektrometer bleibt zunächst, von einem kleinen von einem früheren Versuch herrührenden Gang abgesehen, in Ruhe, bis ein Druck von etwa 24 Skt. der Manometerskala erreicht ist; bei Erreichung dieses

---

1) Eine etwas vollkommenere Einrichtung wird demnächst an anderer Stelle beschrieben werden.

Druckes setzt der elektrische Vorgang ein (bei 1.) und hört nach Sinken des Druckes allmählich auf; das Elektrometer bleibt zwischen 14 und 15 Skt. in Ruhe. Der Vorgang wiederholt sich bei nochmaliger Drucksteigerung an der Stelle 2 bei demselben Druck. Dieser Druck ist für Chininsulfat charakteristisch und beträgt etwa 0,6—0,7 mm Hg bei 18°. Aus dem Rest der Kurve sieht man deutlich, daß bei der Wasserentziehung dieser Druck keine besondere Rolle spielt; seine Unterschreitung wird elektrisch garnicht bemerkbar; der Druck, bei welchem in Fig. 2 die Bewegung des Elektrometers aufhört, hat mit dem charakteristischen Druck nichts zu tun, sondern hängt von der im ganzen aufgenommenen Wassermenge und der Geschwindigkeit der Druckänderung ab. Der elektrische Vorgang setzt bei der Wasserentziehung erst bei so niedrigen Dampfdrucken ein (Stelle 3 in Fig. 2), daß er mit dem behelfsmäßig verwendeten Manometer nicht genau gemessen werden konnte (etwa 0,06 mm). Auch dieser Druck ist für Chininsulfat charakteristisch.

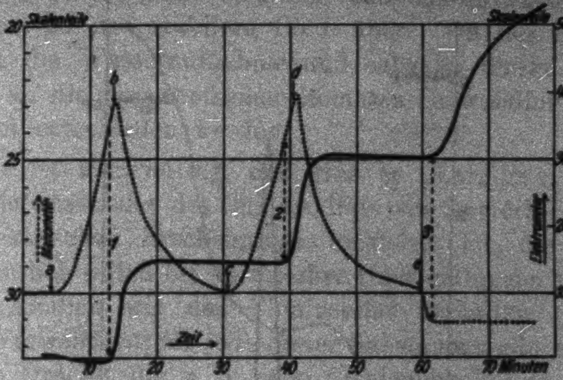


Fig. 2.

3. Aus den Beobachtungen folgt, daß der Vorgang, den die elektrischen Erscheinungen bei der Wasseraufnahme begleiten, nicht derselbe ist, wie der bei der Wasserabgabe. Dieser Schluß wird gestützt durch Beobachtungen mit größeren Substanzmengen, die gleichzeitig eine Messung der Wasserdampfdissoziationsspannung des Chininsulfats gestatteten. Fig. 3 zeigt das Ergebnis. (Es sind übrigens nicht wie in Fig. 2 die

Elektrometereinstellungen, sondern Stromstärken angegeben; Skt. pro Minute) Sie zeigt, daß der Druck von dem Augenblick an, in welchem die elektrische Erscheinung einsetzt, längere Zeit (mehr als 20 Min.) lang konstant bleibt bei kontinuierlicher Dampfzufuhr aus dem Schwefelsäuregefäß, welches in dem mit konstanter Stromstärke brennenden Ofen sehr langsam und gleichmäßig erwärmt wurde. Bei der darauffolgenden Entwässerung (in Fig. 3 nicht mehr gezeichnet), die sich über einen ganzen Tag erstreckte, zeigte sich nicht nur bei dem charakteristischen Druck oder in seiner Nähe keinerlei elektrischer Effekt, sondern auch keinerlei Abweichung von dem glatten Verlauf der Druckkurve. Das Verhalten bei sehr niedrigen Drucken konnte mit dem verwendeten Manometer noch nicht genauer untersucht werden; es scheint, als ob der Druck dort, wo der elektrische Effekt einsetzt, wieder konstant wird (bei etwa 0,06 mm), um erst nach Ablauf des elektrischen Effekts den dem Trockenmittel entsprechenden Wert anzunehmen.

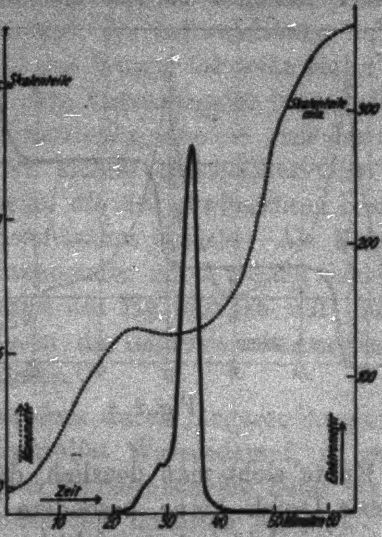


Fig. 3.

4. Man kommt so zu dem etwas unerwarteten Schluß, daß Wasseraufnahme und -abgabe beim Chininsulfat nicht durch dieselben Zwischenzustände erfolge und kann sich den Vorgang vorläufig etwa folgendermaßen vorstellen: Chininsulfat existiert

in 2 Modifikationen Ch. I und Ch. II; Ch. I ist im trocknen Zustande das stabilere, Ch. II als Hydrat. Ch. I aq. hat einen höheren Dissoziationsdruck als Ch. II aq. Wir gehen aus von Ch. I; bei Wasserzufuhr bildet sich bei etwa 0,6 mm Druck das Hydrat Ch. I aq., das sofort in das stabilere Ch. II aq. sich umwandelt. Ch. II aq. verliert sein Wasser erst bei wesentlich niedrigerem Druck (etwa 0,06 mm) und das entwässerte Ch. II geht sofort in das stabilere Ch. I über. Ob der elektrische Effekt an die Wasseraufnahme und -abgabe direkt gebunden ist, oder an die hypothetischen isomeren Umwandlungen, kann noch nicht entschieden werden.

5. Es ist merkwürdig, daß eine so „harmlose" Reaktion wie die Entwässerung des Chininsulfats von immerhin beträchtlichen elektrischen Erscheinungen begleitet ist, die sonst so außerordentlich selten bei chemischen Umwandlungen beobachtet werden. Ähnlich wie das Chininsulfat verhalten sich seine nächsten Verwandten; für jede dieser Substanzen gibt es charakteristische Drucke, die z. B. beim Cinchoninsulfat in der Nähe von 0,15 mm und von 0,03 mm liegen.[1] Zur weiteren Aufklärung sind Dampfdruckmessungen über den Substanzen nötig, die allerdings in dem Gebiet der niedrigen Drucke nicht ganz einfach sind, die aber ausgeführt werden sollen, sobald das verbesserte Manometer gebrauchsfertig ist.

Zu großem Danke verpflichtet bin ich Hrn. P. Rabe, Hamburg für die Überlassung besonders reiner Präparate, und der Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften an der Universität Würzburg, welche mir die Mittel zur Beschaffung größerer Mengen käuflicher Präparate (Merck) zur Verfügung stellte.

Würzburg, Physikalisches Institut, im Oktober 1923.

---

[1] Herr Rohde hat kürzlich auch Cinchonidinsulfat, Chinidinsulfat und Chininnitrat untersucht. Diss. Würzburg 1923. Chinidinsulfat zeigt nach seinen Angaben keinen elektrischen Effekt.

8. *Über das Dämmerungssehen mit Ferngläsern;*
von K. Krüger und J. Zenneck.

Jedem der auf der Jagd oder im Felde ein Fernglas benützt hat, ist die Tatsache bekannt, daß bei Dunkelheit nicht nur punktförmige sondern auch flächenhafte Objekte[1]) erheblich deutlicher erscheinen als mit bloßem Auge, obwohl die Flächenhelligkeit des Bildes auf der Netzhaut durch ein Fernrohr nicht vergrößert werden kann, sondern im Gegenteil durch die Absorption und Reflexion an den Gläsern und eventuell auch durch Pupillenverlust notwendigerweise herabgesetzt werden muß.

1. Ein Grund dieser Erscheinung ist bekannt. Im Gebiet geringer Lichtstärken ist die physiologische Helligkeit eines kleinen Objektes bei gleicher physikalischer Flächenhelligkeit um so größer und im Zusammenhang damit der Schwellwert der Flächenhelligkeit, der das Objekt noch eben sichtbar macht, bei derselben Form des Objektes um so kleiner, je größer seine scheinbare Ausdehnung ist. Daraus folgt, daß bei Dunkelheit die Vergrößerung eines kleinen Objektes durch ein Fernrohr bezüglich der Helligkeit einen prinzipiellen Vorteil bedeutet. Der Vorteil ist im Gebiet geringer Lichtstärken tatsächlich so groß, daß der Lichtverlust im Fernrohr dadurch weit mehr als kompensiert wird.

---

[1]) Wir schließen im folgenden den nahezu selbstverständlichen Fall aus, daß das Objekt so klein ist, daß der Winkel, unter dem es erscheint, unter dem „physiologischen Grenzwinkel" liegt und erst durch die Vergrößerung des Fernrohres über denselben gehoben wird. Das Folgende bezieht sich nur auf den Fall, daß die Dimensionen der Objekte immerhin so groß sind, daß sie bei guter Beleuchtung bequem erkannt werden können. Wir arbeiteten im allgemeinen mit Objekten, deren scheinbare Größe zwischen 10′ und 40′ lag. Bei so großen Objekten spielt auch die Beugung keine wesentliche Rolle.

Diese Seite der Frage ist in letzter Zeit von G. Gehlhoff und H. Schering[1]) ausführlich untersucht worden. Gleichgültig, ob ihre Resultate quantitativ richtig sind oder nicht — es sind gegen dieselben von A. Kühl[2]) Einwände erhoben worden —, so besteht doch über die qualitative Richtigkeit des oben Angegebenen kein Zweifel.

Dieser Einfluß der Vergrößerung läßt sich mit der einfachen Anordnung von Fig. 1 demonstrieren und untersuchen. In einem allseitig verschlossenen Holzkasten in einem völlig verdunkelten Zimmer[3]) befindet sich eine Glühlampe, deren Helligkeit durch Anlegung verschiedener Spannungen variiert werden kann. Die eine Seite des Kastens bildet eine Mattglasscheibe, die mit schwarzem Papier, aus dem Figuren von verschiedener Form (z. B. Kreise, Dreiecke usw.) und Größe ausgeschnitten sind, bedeckt ist. Um den Einfluß der Helligkeit auf den Schwellwert zu zeigen, werden 2 Figuren derselben Form aber verschiedener Größe (z. B. 2 Kreise mit verschiedenem Durchmesser) in das schwarze Papier eingeschnitten und es wird die Helligkeit allmählich gesteigert. Die Figur mit der größeren Fläche erscheint dann dem ausgeruhten Auge stets bei viel kleineren Spannungen als die mit der kleinen Fläche. Der Einfluß der Größe des Objekts auf die physiologische Helligkeit zeigt sich darin, daß bei geringen Lichtstärken der Lampe das größere Objekt stets viel

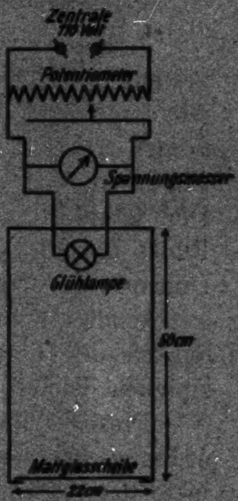


Fig. 1.

---

[1]) G. Gehlhoff u. H. Schering, „Zeitschr. f. Beleuchtungswesen" 25. S. 17. 1919; G. Gehlhoff, „Ursachen der Verbesserung des Nachtsehens durch Ferngläser", Zeitschr. f. Techn. Phys. 2. S. 245. 1921.

[2]) A. Kühl, „Über die Reizschwellwerte der Netzhautzapfen", Zentralzeitschr. f. Optik u. Mechanik 121. 1922.

[3]) Dadurch wird die Vignettierung des Bildes und die Abblendung, die beim Gebrauch des Fernglases im Freien eine Rolle spielen können, ausgeschaltet.

heller erscheint als das kleinere. Erst bei größerer Helligkeit der Lampe verschwindet dieser letztere Unterschied.[1])

Bei diesen Versuchen verglichen wir stets ein kleines Objekt mit einem linear dreimal größeren. Merklich derselbe Unterschied sowohl bezüglich des Schwellwerts als bezüglich der Helligkeit zeigte sich aber auch, wenn auf dem Mattglas des Kastens Fig. 1 nur das kleinere Objekt vorhanden war und man dasselbe mit dem einen Auge direkt, mit dem anderen durch ein dreimal vergrößerndes Galileisches Fernglas betrachtete.[2])

2. Ein zweiter Einfluß der Vergrößerung des Fernrohres besteht in folgendem. Bei Dunkeladaption ist die Pupille sehr groß und die Abbildung des Auges verhältnismäßig unscharf. Die absolute Unschärfe (z. B. die Verbreiterung einer Linie) ist nur gegeben durch die Eigenschaften des Auges. Der Einfluß, den diese Unschärfe auf die Klarheit eines Bildes hat, ist verhältnismäßig um so kleiner, je größer die Dimensionen desselben sind: die relative Unschärfe nimmt mit wachsender Größe des Bildes ab. Auch in bezug auf die Schärfe des Bildes bedeutet also die Vergrößerung einen prinzipiellen Vorteil.

Dieser Effekt läßt sich mit der oben beschriebenen Anordnung ebenfalls sehr einfach zeigen, wenn man wieder 2 Objekte derselben Form aber verschiedener Größe vergleicht und die Lichtstärke der Lampe allmählich steigert. Es wird dann die Form des größeren Objektes bei sehr viel niedrigeren Lichtstärken erkannt, als diejenige des kleinen. Erst bei verhältnismäßig großen Lichtstärken verschwindet auch dieser Effekt, vorausgesetzt immer, daß das kleine Objekt immerhin so große Dimensionen hat, daß es bei gutem Licht bequem erkannt werden kann. Merklich dieselbe Erfahrung macht man, wenn man dasselbe (kleinere) Objekt mit dem einen

---

1) Der Einfluß der Farbe, die ja bei den verschiedenen Belastungen der Lampe etwas verschieden ist, fällt bei den Versuchen heraus, da niemals 2 Objekte bei verschiedenen Belastungen der Lampe verglichen wurden.

2) Bei allen derartigen Versuchen wurde die Rolle der beiden Augen vertauscht, um etwaige Unterschiede der beiden Augen zu eliminieren.

Auge direkt, mit dem anderen durch ein Fernglas betrachtet. Die Form des durch das Fernglas vergrößerten Objektes ist bei viel geringeren Lichtstärken zu erkennen als diejenige des direkt gesehenen.

Daß bei dieser Erscheinung der Pupillendurchmesser des Auges eine wesentliche Rolle spielt, wird durch folgenden Versuch außer Frage gestellt. Vergleicht man wieder ein kleineres und ein (3 mal) größeres Objekt derselben Form, und zwar bei mittleren Lichtstärken, wo der eben genannte Effekt noch deutlich zutage tritt, so verschwindet er bis zu einem gewissen Grade, wenn man das kleine Objekt durch eine Lochblende betrachtet. Trotz des dadurch bedingten Helligkeitsverlustes erscheint die Form des kleinen Objektes deutlicher als ohne Blende. Besonders überzeugend wird der Einfluß der Pupillenöffnung des Auges, wenn man als Objekt ein System von vertikalen und horizontalen Linien (Fig. 2) nimmt. Infolge des Astigmatismus, den jedes Auge mehr oder weniger besitzt, erscheinen entweder die horizontalen *oder* die vertikalen Linien weniger scharf. Der Unterschied ist bei geringen Lichtstärken so, daß die einen Linien schon scharf er-

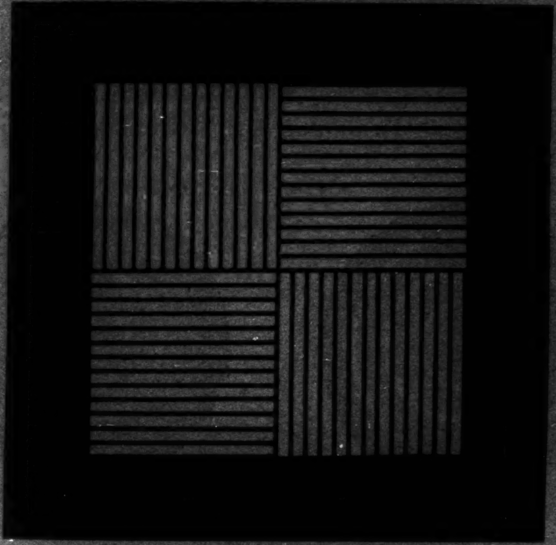


Fig. 2.

kannt werden, während die anderen überhaupt noch nicht als Linien hervortreten. Setzt man eine geeignete Blende vor das Auge, so kann bei richtiger Größe derselben erreicht werden, daß beide Systeme von Linien nahezu gleich deutlich erscheinen.

3. Zu dem in 2. besprochenen direkten Einfluß der Vergrößerung auf die Schärfe des Bildes kommt noch ein indirekter hinzu. Der Kontrast zwischen 2 Flächen scheint um so größer, je schärfer die Grenze zwischen ihnen ist. Jede Erhöhung der Schärfe der Begrenzung wie sie nach dem oben Ausgeführten durch die Vergrößerung des Fernrohrs (vgl. außerdem 4.) hervorgerufen wird, bedeutet also auch aus diesem Grunde eine Erhöhung der Deutlichkeit (Brillanz) des Bildes.

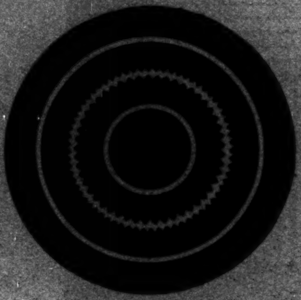


Fig. 3.

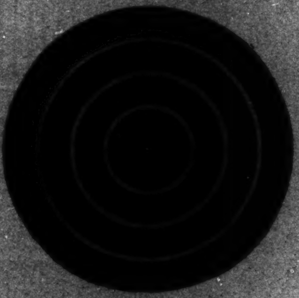


Fig. 4.

Eine Illustration dieser physiologischen Tatsache bildet folgender Versuch. Eine Scheibe mit einer Zeichnung nach Fig. 3 wird auf der Welle eines Motors befestigt und der Motor in Umdrehung versetzt. Es erscheint dann ein Bild nach Fig. 4 (photographische Aufnahme), in welchem der äußere und innere weiße Ring mit scharfer Begrenzung gegen den schwarzen Hintergrund heller erscheinen, als der mittlere weiße Ring, dessen Grenze gegen den schwarzen Grund verwaschen ist.

4. Bei dem bisher Besprochenen handelt es sich um eine direkte oder indirekte Wirkung der *Vergrößerung* des Fernrohres. Zu diesem reinen Vergrößerungseffekt tritt aber eine *spezifische Wirkung des Fernrohrsehens.*

Man überzeugt sich davon am besten in folgender Weise. Ein Objekt nach Fig. 2 wird in 2 Größen, die sich wie 1:3 verhalten, in den Apparat von Fig. 1 gebracht, und das größere Bild mit dem bloßen Auge, das kleinere Bild mit einem 3 mal vergrößernden Fernrohr auf eine Entfernung von einigen Metern beobachtet. Die beiden Bilder sind dann gleich groß; bei ihrem Vergleich ist der Vergrößerungseffekt des Fernrohrs also ausgeschaltet. Trotzdem sind die beiden Bilder nicht identisch. Bei dem direkt gesehenen größeren Objekt erscheinen infolge des Astigmatismus des Auges entweder die horizontalen oder die vertikalen Striche unscharf und infolge davon heben sich die beiden Flächen mit den unscharfen Strichen weniger hell gegen den Hintergrund ab, als die beiden anderen Flächen mit den scharfen Strichen. In dem durch das Fernrohr gesehenen Bild sind bei richtiger Einstellung des Fernrohres sowohl die vertikalen als die horizontalen Striche von gleicher Schärfe bzw. Unschärfe, so daß sich die 4 Felder des Bildes in keiner Weise voneinander unterscheiden.

Der Grund dafür liegt in der Tatsache, daß ein astigmatisches Auge infolge der zylindrischen Komponente seines Linsensystems ein Objekt z. B. von der Form Fig. 2 in verschiedener Entfernung verschieden sieht. Nähert man ein solches Objekt[1]) von großer Entfernung aus allmählich, so erscheint bei großer Entfernung *ein* Liniensystem z. B. das horizontale scharf, das andere (vertikale) unscharf. Je näher man an das Auge herankommt, um so mehr verringert sich dieser Unterschied und bei einer bestimmten Entfernung ist die Schärfe bzw. Unschärfe der beiden Liniensysteme gleich. Geht man noch näher heran, so tritt der Unterschied wieder stärker hervor. Aber es wird jetzt das andere (vertikale) Liniensystem scharf, das erstere (horizontale) unscharf. Beim Fernrohr hat man es nun in der Hand, das vom Okular entworfene virtuelle Bild in eine beliebige Ebene zu legen. Visiert man ein Objekt z. B. von der Art Fig. 2 an, so stellt man dieses Bild unwillkürlich in diejenige Ebene ein, in der die

---

1) Es ist günstig das Objekt in mehreren Größen herzustellen, damit man in der Lage ist die scheinbare Größe für die verschiedenen Entfernungen etwa gleich groß zu wählen und damit den Einfluß der Bildgröße (vgl. 2) auszuschalten.

beiden Liniensysteme gleich scharf werden. Das Fernrohr gestattet also den Einfluß des Astigmatismus, der bei dem Sehen in der Dämmerung mit bloßem Auge eine große Rolle spielt, nahezu auszuschalten, jedenfalls stark zu verringern.[1]

Von der Richtigkeit der gegebenen Erklärung überzeugt man sich, wenn man bei einer bestimmten Entfernung des Objektes das Fernglas zuerst so einstellt, daß die Schärfe der beiden Liniensysteme gleich ist. Ändert man dann die Einstellung des Fernrohres nach der einen oder anderen Richtung, so daß das virtuelle Bild des Okulars in eine größere bzw. kleinere Entfernung zu liegen kommt, so wird im ersten Falle das eine (z. B. das vertikale), im anderen Fall das andere (horizontale) Liniensystem unscharf.

München, Physikalisches Institut der Techn. Hochschule.

---

[1] Das gilt auch beim Fernrohrsehen bei heller Beleuchtung. Wenn man z. B. Häuser durch ein Fernglas beobachtet, so stellt man dasselbe unwillkürlich so ein, daß das virtuelle Bild des Okulars in der Ebene liegt, in der vertikale und horizontale Linien gleich scharf erscheinen. Infolge davon merkt man beim Sehen durchs Fernglas von dem Astigmatismus des Auges nichts, auch dann nicht, wenn er so stark ist, daß er beim Sehen mit bloßem Auge erheblich stört. Bei Dunkelheit tritt die Erscheinung wegen des größeren Pupillendurchmessers nur viel stärker hervor als bei heller Beleuchtung.

9. Über die normale kathodische Stromdichte der Glimmentladung;

von R. Seeliger und J. Schmekel.

1. *Literatur und Problemstellung.* Steigert man die Entladungsstromstärke einer Glimmentladung allmählich, so dehnt sich die Grundfläche der Entladung auf der Kathode bekanntlich mehr und mehr aus, bis die ganze Kathodenoberfläche von einer leuchtenden Haut bedeckt ist; bis dahin behält der Kathodenfall einen konstanten, den sog. „normalen“ Wert bei, um dann erst anzusteigen oder „anomal“ zu werden. Alle bisherigen Messungen haben nun das überraschende und merkwürdige Resultat ergeben, daß, solange die Kathode nicht vollständig bedeckt ist, nicht nur der Kathodenfall, sondern auch die Stromdichte an der Kathode konstant ist, d. h. nicht von der Stromstärke abhängt; geometrisch ist dann also die Grundfläche der Entladung auf der Kathode proportional der Stromstärke. Diese konstante Stromdichte, die als „normale Stromdichte“ bezeichnet sei, hängt ab vom Material und von der Form der Kathode, von der chemischen Natur des Füllgases und von dessen Druck, und wurde für ebene Plattenkathoden und für zylindrische Drahtkathoden bereits mehrfach untersucht. Zu nennen sind hier eine Arbeit von Hehl[1]), der wohl zuerst auf die Konstanz der normalen Stromdichte aufmerksam machte (Hehlsches Gesetz), und insbesondere die eingehende Untersuchung von Skinner, Cheney und Neuswanger.[2]) Neben den für verschiedene Kathodenmetalle (Al, Zn, Ni, Fe, Pt) und Füllgase (H_2, O_2, N_2) charakteristischen Zahlenwerten[3]) ergab sich für die Abhängigkeit $j(p)$ der normalen Strom-

---

[1]) N. Hehl, Diss., Erlangen 1901; Phys. Zeitschr. 3. S. 40. 1902.

[2]) C. A. Skinner, Phys. Rev. 5. S. 483. 1915; W. L. Cheney, ebenda 7. S. 241. 1916; W. Neuswanger, ebenda 7. S. 253. 1916.

[3]) Vgl. den zusammenfassenden Bericht von R. Seeliger, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 19. S. 222. 1922.

dichte j vom Gasdruck p an ebenen Kathoden Proportionalität mit p^2, für Zylinderkathoden Proportionalität mit p.

Wie anschließend an diese experimentellen Ergebnisse und ihnen zum Teil vorgreifend theoretische Überlegungen gezeigt haben[1]), kommt der normalen Stromdichte nicht nur neben dem normalen Kathodenfall als einer zweiten für die kathodischen Vorgänge charakteristischen Konstante der Glimmentladung Bedeutung zu, sondern sie scheint sogar in erster Linie von Wichtigkeit zu sein, da sie primär die Vorgänge im Ionisationsgebiet vor der Kathode regelt, von denen erst sekundär aus Stabilitätsgründen die Einstellung des Kathodenfalls auf den normalen Wert sich ableitet. Die von **Holm** aufgestellten und neuerdings weiter entwickelten[2]) potentialtheoretischen sog. Ähnlichkeitsgesetze haben in ihrer Anwendung auf die kathodischen Entladungsteile zudem auch bezüglich der normalen Stromdichte zu Ergebnissen geführt, die der weiteren experimentellen Untersuchung als fruchtbare Grundlage dienen können.

Deshalb schienen uns neben den bereits vorliegenden Untersuchungen an ebenen und zylindrischen Kathoden Messungen der normalen Stromdichte an kugelförmigen Kathoden wichtig zu sein, da sich an diesen die experimentellen Bedingungen besonders einfach und sauber wählen lassen wegen des Wegfalls aller störenden Randeffekte.

2. *Versuchsanordnung.* Als Entladungsgefäß diente eine Glaskugel, in deren Mitte die ebenfalls kugelförmige Kathode angebracht war. Die Gefäßkugel wurde mit einem Durchmesser von 20 cm möglichst groß gewählt, um alle Störungen der kathodischen Entladungsteile durch Wandladungen u. dgl. nach Möglichkeit zu vermeiden; da die benutzten Kathoden höchstens einen Durchmesser von 3 cm hatten und aus später genannten Gründen die Gasdrucke nicht zu tief gewählt werden konnten, erfüllte das negative Glimmlicht stets nur einen kleinen Teil der Entladungskugel, reichte also längst nicht bis an die Gefäßwände. Die Kathoden bestanden aus massiven Kugeln

---

[1]) **R. Holm**, Phys. Zeitschr. **16**. S. 20. 1915. **19**. S. 548. 1918; **R. Seeliger**, a. a. O.

[2]) Wiss. Veröfftlg. des Siemenskonzerns, Bd. III, Heft 1, S. 153.

(aus Al, Fe, Cu und Sn), die auf der Drehbank sorgfältig hergestellt und mit Schmirgel ohne Öl poliert, vor dem Einsetzen mit Alkohol und Filtrierpapier gereinigt waren. Sie konnten durch einen Schliff eingeführt werden und hingen an einem dünnen Draht, der bis zur Kugeloberfläche von einem dünnen Glasrohr umgeben war. Die Kugelradien betrugen 1,5, 1,25, 0,84 und 0,50 cm. Von der Kugeloberfläche waren durch den Glasschutz der Kathodenzuleitung abgedeckt bei der 1,50 cm-Kugel 0,25 $^0/_0$, bei der 0,5 cm-Kugel 2 $^0/_0$; eine geringe Störung der zentrischen Symmetrie der Kathoden ist dadurch allerdings gegeben und naturgemäß wohl in keiner Anordnung zu vermeiden. Irgendeine Störung in der allseitig gleichmäßigen Ausbildung der Entladungserscheinungen, so z. B. eine Aufwulstung des Glimmlichts u. dgl. konnte jedoch, wie besonders erwähnt sei, nicht wahrgenommen werden. Als Anode diente eine Aluminiumscheibe, die von unten in einem Ansatz eingesiegelt war. Außerdem enthielt die Entladungskugel (Fig. 1) noch eine Sonde, die mit Hilfe einer Vakuumschraube radial in der üblichen Weise verschoben werden konnte; die Sonde war hergestellt nach den von **Rottgardt** für Kathodenfallmessungen angegebenen Vorschriften und bestand aus einem Platindraht, der 0,1 mm aus einem dünnen Glasschutz hervorragte. Von den drei an der Entladungskugel angebrachten Ansätzen führte Ansatz 1 durch einen Kühlsack zu einer rotierenden Gädepumpe, Ansatz 2 ebenfalls durch einen Kühlsack zu dem Manometer, und Ansatz 3 (ebenfalls durch einen Kühlsack) zur Gaszuführung. Im einzelnen ist dazu noch folgendes zu bemerken. Die Druckmessung wurde vorgenommen für die tieferen Drucke mit Hilfe eines durch Auswiegen geeichten Mc Leods, für die höheren Drucke mit Hilfe eines verkürzten Schenkelmanometers, das mit einem Kathetometer abgelesen wurde, und dessen Angaben noch an das Mc Leod angeschlossen

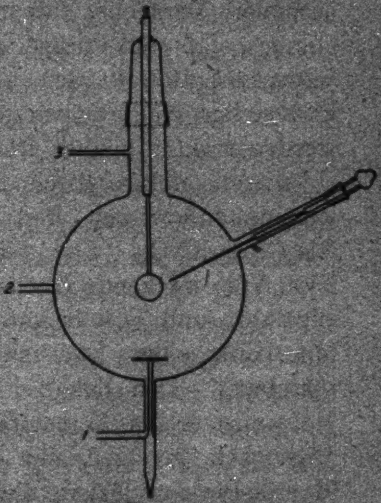


Fig. 1.

werden konnten. Die Gaszuführung erfolgte anfangs durch eine Kapillare aus einem Vorratsgefäß nach der Wienschen Strömungsmethode; später wurde darauf verzichtet und einfach die Entladungskugel auf den gewünschten Druck aufgefüllt, da sich zeigte, daß ein Vorteil mit der Durchströmungsmethode nicht verbunden war und da die Dauer des einzelnen Versuchs im Verlauf der Arbeit durch Übung wesentlich vermindert werden konnte; in Rücksicht auf eine zuverlässige Messung des statischen Gasdruckes war der Verzicht auf die Durchströmungsmethode an sich von Vorteil. Ebenso ergaben besondere Versuche, daß mit und ohne Kühlung zwischen Entladungsgefäß und Pumpe bzw. Manometer genau dieselben Resultate erhalten wurden, so daß wir unbedenklich auf die sehr kostspielige Kühlung verzichten konnten. Die benutzten Gase wurden sorgfältig über Phosphorpentoxyd getrocknet. H_2 und O_2 waren elektrolytisch hergestellt, Luft aus dem Arbeitszimmer entnommen und N_2 entwickelt nach Travers aus $NH_4Cl + KNO_2$. Die benötigte Spannung lieferte eine bis 3500 Volt reichende Hochspannungsdynamo; der Strom wurde zugeführt und jeweils auf den gewünschten Wert einreguliert mit Hilfe eines Flüssigkeitswiderstandes mit Schnurlaufverschiebung. Den hohen hier zu stellenden Anforderungen an Konstanz dieses Widerstandes konnten wir nach vielfachen Versuchen genügen mit der von Schering[1] angegebenen Mannit-Borsäurelösung und Einschluß des ganzen Widerstandes in ein Wasserbad. Die Entladungsstromstärke wurde gemessen teils mit einem Zeigermillivoltmeter von Hartmann und Braun (0,5 M.A./Sktl.), teils mit einem Nadirmilliampèremeter der Deuta-Werke (0,15 M.A./Sktl.), die noch 0,1 Skalenteile zu schätzen erlaubten. Das Potential der Sonde gegen die Kathode wurde gemessen mit einem Lutzschen Saitenelektroskop in idiostatischer Schaltung (vorteilhaft wegen seiner kleinen Kapazität), dessen Saitenspannung auf eine Empfindlichkeit von 9 Volt/Sktl. eingestellt wurde, so daß im Okularmikrometer noch 1 Volt geschätzt werden konnte. Als wichtig erwies sich sorgfältiger Schutz der Zuleitung von der Sonde zum Elektroskop, der in bekannter Weise durch Einschluß in ein Metallrohr bewirkt wurde; um die Kapazität des ganzen Systems möglichst klein zu halten, war das Instrument dicht an der Ausführung aus dem Entladungsgefäß aufgestellt und das Schutzrohr etwa 2 cm weit gewählt. Es wurde so erreicht, daß das Saitenpotential jeder Bewegung der Sonde ohne merkbare Verzögerung folgte.

---

[1] Schering, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 31. S. 158. 1911.

3. *Methode der Messung.* Eine Bestimmung der normalen Stromdichte erfordert die Kenntnis der Entladungsstromstärke und des von der Entladung bedeckten Oberflächenteils der Kathode. Die erstere ist der Messung unmittelbar zugänglich, der letztere ist jedoch exakt nur in speziellen Fällen, z. B. an einer Drahtkathode, zu ermitteln. Ein Ausweg ist nun dadurch gegeben, daß man die Stromstärke so lange steigert, bis eben die ganze Kathode bedeckt ist, so daß also die Stromdichte gleich ist (Stromstärke):(Kathodenoberfläche). Die Schwierigkeit der Messung besteht dann darin, den Zustand der eben vollständigen Bedeckung zu ermitteln. Abgesehen davon, daß dies durch subjektive Beobachtung der kathodischen Entladungserscheinungen nur sehr ungenau, wenn überhaupt, möglich ist, zeigt die Bedeckung nach unseren unten noch näher beschriebenen Beobachtungen (vgl. Nr. 4) störende Trägheitserscheinungen. Eine objektive Fixierung des gesuchten Zustandes der Entladung wird jedoch ermöglicht durch die Messung des Kathodenfalls mit Hilfe der Sonde. Steigert man die Entladungsstromstärke und mißt gleichzeitig den Kathodenfall, so erhält man Stromstärke-Potentialkurven von der in

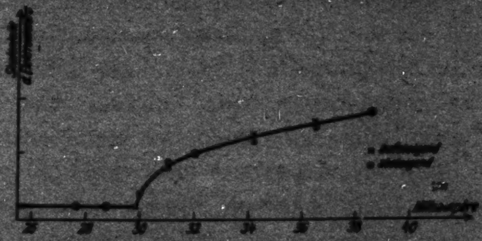


Fig. 2.

Fig. 2 in einem Beispiel gezeichneten Form. Zunächst ist der Kathodenfall konstant gleich dem normalen Wert und steigt dann bei einer bestimmten kritischen Stromstärke rasch in das anomale Gebiet an. Als die normale Stromdichte wird man nun diejenige Stromstärke, dividiert durch die Oberfläche der Kathode, definieren, für welche die Strom-Potentialkurve den typischen Anstiegsknick zeigt. In der tatsächlichen Ausführung erfordert diese Methode lediglich einige Übung und führt zu vorzüglich reproduzierbaren Werten für die gesuchte Stromdichte; die Abweichungen der einzelnen Messungen voneinander betrugen dann auch nicht mehr als etwa 5 %, bis zu welcher Genauigkeit wir unsere Stromdichtewerte für richtig halten. Günstig ist natürlich, daß es sich bei der Festlegung der Potentialwerte nur um Relativmessungen handelt und eine vorzügliche Kontrolle stets in der Übereinstimmung des auf- und absteigenden Astes (vgl. Fig. 2) gegeben ist. Ein erstes Erfordernis ist dazu, daß die Sonde stets auf entsprechende Stellen der Entladung eingestellt wird, am besten auf den Glimmsaum. Dies zu erreichen, ist bei Kugeln und namentlich bei den kleinsten der benutzten Kugeln schwieriger als bei ebenen Kathoden und erfordert längere Übung; zur Erleichterung diente eine festmontierte Lupe von schwacher Vergrößerung, durch welche die Sondenspitze betrachtet wurde. Ferner beschränkten wir uns der Genauigkeit dieser Einstellung wegen auf den Druckbereich von etwa 0,5—5,0 mm Hg; bei kleineren Drucken wird der Glimmsaum zu unscharf, bei größeren die Dunkelraumdicke bzw. Glimmlichtlänge zu gering.

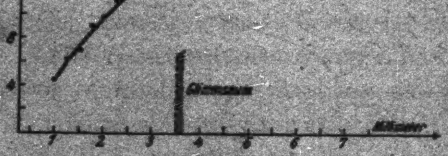


Fig. 3.

Über die zu erstrebende Genauigkeit orientiert die Fig. 3, die an einem Beispiel den Potentialverlauf in der Umgebung des Glimmsaumes angibt; dabei ist wesentlich, daß die Kurvensteigung von der Stromstärke, d. h. davon, ob der Fall normal oder anomal ist, nur sehr wenig abhängt, und daß in der Strom-Potentialkurve die Tangente im kritischen Punkt nahezu vertikal liegt. Eine weitere Fehlerquelle ist gegeben durch Irregularitäten in der Wirksamkeit der Sonde, die sich darin äußern, daß der auf- und absteigende Ast der Strom-Potentialkurve nicht immer zusammenfallen, wie die Fig. 4 an dem deutlichsten von uns beobachteten Beispiel zeigt. Meist lag in solchen Fällen der aufsteigende Ast unter dem absteigenden. Wir vermuten Doppelschichtbildungen auf der Sonde oder Bestäubung des Glasschutzes mit einer Metallschicht und fanden als sicheres Mittel dagegen nur eine sorgfältige Reinigung der Sonde.

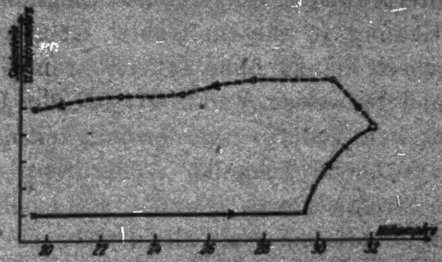


Fig. 4.

4. *Trägheit des Glimmlichtes.* Bei der Aufnahme fast aller Strom-Potentialkurven konnten wir merkwürdige Trägheitserscheinungen im Aussehen der Entladung beobachten, auf die hier nur hingewiesen sei, da sie in einer folgenden Arbeit eingehender untersucht werden sollen. Hier sind sie hauptsächlich deshalb von Interesse, weil sie auf gewisse Komplikationen hindeuten, die eine eindeutige Festlegung der normalen Stromdichte in anderer als der oben angegebenen Form (nämlich als die zum Grenzpunkt zwischen normalem und anomalem Fall gehörende Stromdichte) sehr erschweren dürften. Steigert man die Stromstärke, von einem Zustand nicht vollständiger Bedeckung ausgehend, allmählich, so schließt sich die Glimmlichthülle bei einer gewissen Stromstärke i_1, so daß die Kathode von da ab ganz bedeckt erscheint; der Kathodenfall bleibt jedoch bis zu einer höheren Stromstärke $i_2 > i_1$ nach Ausweis der Sondenmessung normal und beginnt erst bei i_2 von dem konstanten Normalwert in der oben beschriebenen Art plötz-

lich aufzusteigen. Geht man mit der Stromstärke nun wieder zurück, so wird der Kathodenfall bei demselben Wert i_2 wieder normal, die Glimmlichthülle reißt aber erst bei einem Stromwert $i_0 < i_1 < i_2$ und dann sogleich über einen verhältnismäßig großen Oberflächenteil der Kathode (bis zu etwa 80 % der Fläche) auf. Es hat also den Anschein, als ob kurz vor dem Übergang des anomalen in den normalen Kathodenfall ein Gebiet mit unternormaler Stromdichte möglich sei; der Zustand der Entladung in diesem Gebiet ist sehr instabil, die Bedeckung wechselt häufig ohne erkennbaren Grund zwischen vollständiger und teilweiser, und die Größe des Gebietes hängt ab von der zeitlichen Änderungsgeschwindigkeit des Entladungsstromes. Bei genügend schneller Änderung der Stromstärke lassen sich die Stromwerte i_0, i_1 und i_2 stets beliebig nahe zusammenbringen; in diesem Fall allein wäre es möglich, auch aus der geometrisch vollständigen Bedeckung eine befriedigende Definition der normalen Stromdichte abzuleiten.

Fe-Kugel in H_2 $p = 5{,}2$ mm, $r = 1{,}5$ cm	$i_0 = 16$	$i_1 = 27$	$i_2 = 30{,}5$	Mill.-Amp.
Al-Kugel in H_2 $p = 7{,}1$ mm, $r = 1{,}25$ cm	$i_0 = 7{,}5$	$i_1 = 9{,}5$	$i_2 = 14{,}5$	„
Al-Kugel in Luft $p = 2{,}9$ mm, $r = 1{,}25$ cm	$i_0 = 13{,}2$	—	$i_2 = 30{,}5$	„

5. *Ergebnisse der Messungen.* Die normale Stromdichte hängt ab von der chemischen Natur der Kathode und des Gases, vom Gasdruck und vom Kugelradius. Von diesen Abhängigkeiten sind am einfachsten und quantitativ zu fassen die beiden letzteren und sollen deshalb zunächst auf Grund unserer Messungen besprochen werden.

a) Kugelradius. Aus der vollständigsten Meßreihe an Eisenkugeln (Radius 1,5; 1,25; 0,84; 0,5 cm) in Wasserstoff von 0,5—3,5 mm Druck ergibt sich das folgende Bild für die Abhängigkeit der normalen Stromdichte vom Kugelradius, dem sich die weniger vollständigen Reihen in anderen Gasen und mit anderen Kathodenmaterialien qualitativ einordnen: Die Stromdichte nimmt mit zunehmendem Kugelradius bei konstantem Druck ab und strebt einem konstanten von der Krümmung unabhängigem Endwert zu; sie ist also unter sonst denselben Verhältnissen um so größer, je kleiner der Krümmungsradius der Kathodenoberfläche ist (Fig. 5). Absolut genommen ist die Zunahme der Stromdichte mit zunehmender Oberflächenkrümmung um so größer, je höher der Gasdruck ist, und erreicht, wie die Figur zeigt, recht erhebliche Werte. Über die Zunahme bei verschiedenen Drucken unterrichtet jedoch besser als Fig. 5 die aus dieser durch Umrechnung erhaltene Fig. 6,

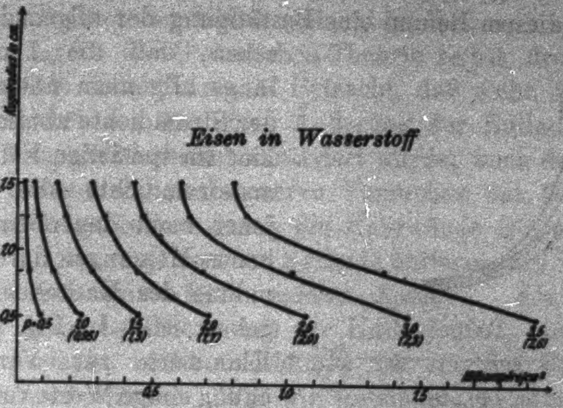


Fig. 5.

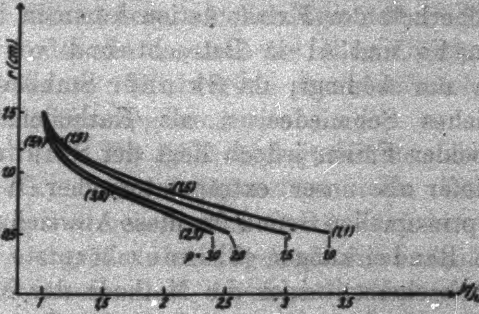


Fig. 6.

die als Funktion des Kugelradius die prozentuale Änderung der Stromdichte enthält. Es geht aus ihr hervor, daß diese um so größer ist, je tiefer der Druck ist, ein Ergebnis, das theoretisch zu erwarten war und darauf hindeutet, daß eine maßgebende Variable das Verhältnis der Dunkelraumlänge zum Kugelradius ist. Zur Orientierung haben wir einige direkte Messungen der Dunkelraumlänge vorgenommen, indem wir die Sonde auf die Kathodenoberfläche und auf den Glimmsaum einstellten. Die Ergebnisse sind in Fig. 7 gezeichnet und zeigen deutlich, daß die Dunkelraumlänge vom Kathodenradius abhängt und zwar mit diesem etwas abnimmt. Man kann in diesem Befund eine Bestätigung der allgemeinen Regel sehen, daß die Dunkelraumlänge allgemein mit zunehmender Stromdichte abnimmt, wobei hier im speziellen Fall der Normalstromdichte die Zunahme jener nach den oben beschriebenen Messungen durch die Abnahme des Kathodenradius gegeben ist. In Fig. 6 sind in Klammern zur Veranschaulichung einige Werte von $r:d$ nach Fig. 7 eingetragen, welche zeigen, daß die Stromdichte recht empfindlich ist gegen eine Krümmung der Kathodenoberfläche. Ein Vergleich unserer Messungen, extrapoliert auf $r = \infty$, mit den Messungen von Skinner an ebenen Kathoden ist nur sehr beschränkt möglich. Abgesehen von der Unsicherheit der Extrapolation kommen hier nur die Messungen an Fe und Al in Betracht und von diesen die ersteren auch nur bedingt, da Skinner Stahlkathoden, wir hingegen weiches Schmiedeeisen als Kathodenmaterial benutzten. In beiden Fällen jedoch liegt der Skinnersche Wert etwa 20 % tiefer als unser extrapolatorischer Wert, woraus wir auf einen prinzipiellen Grund für diese Abweichung schließen möchten. Ob Randwirkungen (Skinner benutzte Kathoden in Form von Kreisscheiben) oder die Methode der Messung eine Rolle spielen, muß unentschieden bleiben. Bemerkt sei nur, daß die Temperatur der Kathode und der angrenzenden Gasschicht, wie es nach den im nächsten Abschnitt zu besprechenden Messungen scheint, kaum dafür verantwortlich gemacht werden kann.

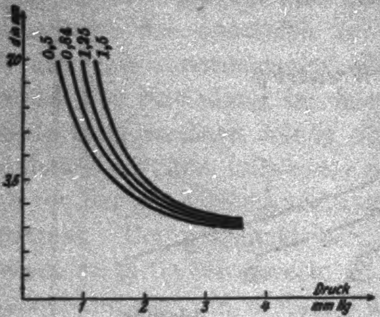


Fig. 7.

Die Fig. 5 gibt ferner die Möglichkeit, unsere Messungen in Beziehung zu setzen zu einem von Holm abgeleiteten Gesetz, nach welchem bei a-facher Vergrößerung aller Dimensionen des Entladungsrohres und a-facher Verkleinerung des

Druckes bei konstantem Kathodenfall die Stromdichte sich umgekehrt proportional mit a^2 ändern sollte. Man überzeugt sich leicht, daß unsere Messungen auch nicht angenähert mit diesem Gesetz in Einklang zu bringen sind (vgl. den Abschnitt 6). Für diese Diskrepanz ließen sich, abgesehen von event. Unvollkommenheiten der Holmschen Theorie selbst, drei Gründe anführen. Als erster käme in Betracht, daß nicht, wie Holm voraussetzt, bei der ähnlichen Änderung der Entladung auch das Entladungsgefäß ähnlich verändert wurde; nach dem S. 250 gesagten konnte sich bei unseren Versuchen das Glimmlicht jedoch stets ungehindert durch die Rohrwände frei ausbreiten und diese waren soweit von der Kathode entfernt, daß Störungen durch dieselben keine Rolle spielen konnten. Ein weiterer Grund ist darin zu sehen, daß der Kathodenfall, obwohl hier stets der normale, nicht unabhängig ist von der Krümmung der Kathodenoberfläche. Wie wir feststellen konnten, wächst nämlich der normale Kathodenfall etwas mit zunehmendem Kugelradius. Die Zunahme ist jedoch stets nur klein, nämlich bei einer Zunahme des Kugelradius von 0,5 auf 1,5 cm etwa 6 Volt, so daß sie für die genannte Diskrepanz ebenfalls nicht verantwortlich zu machen ist. Von Bedeutung könnte hingegen ein weiterer Grund sein, nämlich der, daß die Temperatur der Kathode und des Gases nicht bei allen Drucken und Kugelgrößen dieselbe sei. Wir werden darauf im nächsten Abschnitt noch ausführlicher eingehen.

b) Gasdruck. Die Abhängigkeit der normalen Stromdichte vom Gasdruck tritt im allgemeinen darin hervor, daß die Stromdichte mit zunehmendem Druck zunimmt und zwar um so schneller, je größer der Kugelradius ist. Quantitativ lassen sich die Verhältnisse am übersichtlichsten darstellen, wenn man als Abszissen den Gasdruck, als Ordinaten die auf gleichen Wert für $p = 1$ mm Hg reduzierten Stromdichten aufträgt und den Kugelradius als Parameter benutzt, wie dies in Fig. 8 für die Messungen an Fe in H_2 geschehen ist. Für die größte Kugel ist der Anstieg der Stromdichte innerhalb der Fehlergrenzen ein quadratischer (die Proportionalität mit p^2 ist durch kleine Kreise bezeichnet eingetragen) und weicht mit abnehmendem Kugelradius dann im Sinne eines langsameren Anstieges ab. Zu bemerken ist dazu, daß Skinner für ebene Kathoden ebenfalls quadratischen Anstieg gefunden hatte, so daß also bezüglich der Druckabhängigkeit der Stromdichte sich die 1,5 cm Kugel von einer Ebene praktisch bereits nicht mehr unterscheidet. Nach einem Vergleich mit Fig. 6, in welcher z. B. die Tangente an die ($p = 1$)-Kurve im Punkte $r = 1{,}5$ noch erheblich von der Vertikalen abweicht, zeigen die Messungen, daß die Druckabhängigkeit weniger empfindlich ist gegen eine Krümmung der Kathodenoberfläche als die Größe der Stromdichte.

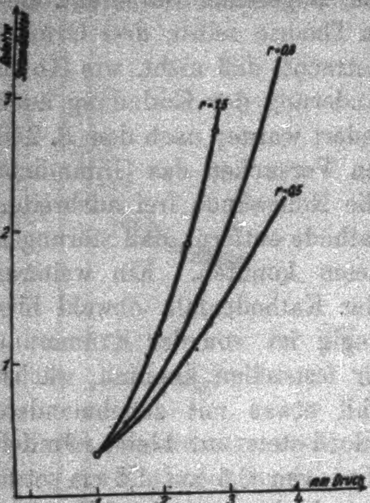


Fig. 8.

c) Abhängigkeit vom Gas und Kathodenmaterial. Bezüglich der Abhängigkeit der Stromdichte von der chemischen Natur des Gases und der Kathode reichen unsere Beobachtungen noch nicht wesentlich weiter als die von Skinner. (Eine Verfeinerung der Messungen mit sorgfältigst gereinigten Gasen ist bereits in Vorbereitung.) Als Vergleichsgröße zwischen den verschiedenen Kathodenmaterialien und Gasen scheint die Größe des normalen Kathodenfalls in Betracht zu kommen. Deshalb werden bei einem solchen Vergleich nun alle Fehler in der bekanntlich recht schwierigen Bestimmung der Absolutwerte des Kathodenfalls und alle Umstände eine Rolle spielen, welche den normalen Fall beeinflussen. In erster Linie dürften für die Stromdichte gewisse Verunreinigungen des Gases von Bedeutung sein, weniger scheint die Beschaffenheit der Kathodenoberfläche eine Rolle zu spielen. Wenigstens fanden wir in einigen orientierenden Versuchen denselben Wert für die Stromdichte, gleichgültig, ob wir eine polierte Kathode benutzten oder eine, die durch längere Zerstäubung matt geworden war; sogar ein leichtes oberflächliches Anschmelzen der Kugel durch eine kurzdauernde Entladung bei hohem Strom scheint den Stromdichtewert innerhalb der Meßfehler nicht zu vermindern.

Aus den Messungen von **Skinner** läßt sich entnehmen[1]), daß in demselben Gas an verschiedenen Kathoden die normale Stromdichte um so kleiner ist, je größer der normale Kathodenfall ist, und daß an derselben Kathode in verschiedenen Gasen die Stromdichte mit wachsendem Kathodenfall steigt, wie die folgende Tabelle zeigt.

	Stromdichte		Kathodenfall	
	H_2	O_2	H_2	O_2
Al	0,65	3,8	171	229
Zn	0,56	2,68	184	277
Ni	0,54	—	198	—
Fe	0,53	2,86	211	263
Pt	0,46	—	276	—

Es findet sich aber bei **Skinner** auch bereits ein Beispiel, das mit dieser Regel nicht übereinstimmt, nämlich Pt in H_2 mit einer Stromdichte = 0,46 und einem Kathodenfall = 276 und Pt in N_2 mit einer Stromdichte = 1,12 und einem Kathodenfall = 216. Ebenso fanden wir auch in großen Zügen die obige Regel bestätigt, zugleich aber gewisse Ausnahmen davon. Benutzen wir als Beispiel die Messungen an Kugeln von 1,25 cm Radius bei einem Gasdruck von 2 mm Hg (bei allen anderen Kugelgrößen und Gasdrucken bleiben sämtliche Reihenfolgen erhalten), so ergibt sich nach Ausschaltung der Zinnkugel, deren Material eine spätere chemische Analyse als stark verunreinigt durch Pb, Fe, (Spuren Sb) erwies, folgendes: (Stromdichte in Mill. Amp./cm^2, Kathodenfall in Volt nach **Rottgardt**).

		Al	Fe	Cu
H_2	Stromdichte	0,62	0,32	0,26
	Kathodenfall	171	198	214
N_2	Stromdichte	0,89	0,40	0,36
	Kathodenfall	179	215	208

Also mit Ausnahme von Cu in N_2 der erwähnte Zusammenhang bei verschiedenen Kathoden in demselben Gas. Andererseits bestätigt die Tabelle, wiederum mit Ausnahme von Cu in N_2, den oben genannten Zusammenhang an derselben Kathode in verschiedenen Gasen, wofür noch die folgenden Zahlen für Al sprechen:

---

[1]) Vergl. R. **Seeliger**, a. a. O. S. 240.

	H_2	N_2	Luft	O_2
Stromdichte	0,62	0,89	1,15	1,45
Kathodenfall	171	179	229	(311)

Ob die bisher vorliegenden Ausnahmen reelle Grundlage haben oder auf Fehlern in der Kathodenfallbestimmung beruhen, können erst weitere Versuche zeigen. Vorläufig jedenfalls kann von einer Bestätigung der genannten Regeln in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle gesprochen werden.

6. *Die Temperatur der Kathode.* Die bisher mitgeteilten Ergebnisse beziehen sich stets auf die tatsächlich in der Entladung herrschenden Verhältnisse; insbesondere beziehen sie sich auf den Zusammenhang zwischen der Stromdichte und dem manometrisch gemessenen Gasdruck im Entladungsgefäß, berücksichtigen aber nicht die lokale Änderung der Gasdichte in der Umgebung der durch die Entladung erwärmten Kathode; denn die Gasdichte vor der Kathode ist nicht einfach proportional dem manometrisch gemessenen Druck im Entladungsgefäß, sondern hängt ab von der Stromdichte und dem Kathodenfall, deren Produkt angenähert die an der Kathodenoberfläche sekundlich erzeugte Wärmemenge mißt. Da in unseren Versuchen der Kathodenfall praktisch konstant gleich dem normalen Kathodenfall ist, sollte man erwarten, daß die Temperatur der Kathode abhängt von der normalen Stromdichte, d. h. daß sie nicht nur mit steigendem Druck, sondern auch mit abnehmendem Kathodenradius zunimmt. Daß umgekehrt unter sonst gleichen Verhältnissen die normale Stromdichte von der Temperatur der Kathode tatsächlich abhängt, zeigte bereits ein orientierender Versuch mit einer aus Messing gedrückten und dann verzinnten Hohlkathode, die innen mit Hilfe einer doppelten Rohrleitung durch Wasser gekühlt werden konnte; die Anordnung war so getroffen, daß Leitungswasser (von 10° C Temperatur) durch zwei konzentrische Röhrchen durch die Kathodenkugel strömen konnte. Die Messungen mit und ohne Kühlung ergaben, daß ganz in dem zu erwartenden Sinn die

normale Stromdichte bei gleichem manometrischen Druck an der gekühlten Kathode höher lag (um etwa 20%) als an der ungekühlten. Wir haben auf Grund dieses Befundes an den Eisenkugeln unmittelbare Messungen der Kathodentemperaturen vorgenommen und zwar mit Hilfe eines Thermoelementes, das in einer dünnen Bohrung der Kathodenkugel versenkt war; als die eine Komponente des Elementes diente jeweils die eiserne Kathode selbst, als die andere ein dünner Kupferdraht, der isoliert eingeführt und innen durch ein Körnchen Lot mit dem Kugelmetall verbunden war. Die Eichung erfolgte im Paraffinbad, für Isolation und einwandfreie Messung der Thermokraft war gesorgt.

Die Einstellzeiten der stationären Endtemperaturen waren verhältnismäßig groß, nämlich bei den kleinsten (0,5 cm) Kugeln 10—15 Min., bei den größten (1,5 cm) Kugeln 40—60 Min. Die Ergebnisse sind in Fig. 9 aufgetragen und zeigen überraschenderweise, daß die Temperatur zwar, wie zu erwarten, mit dem Druck ansteigt (sehr angenähert linear), daß sie aber unabhängig ist vom Kugelradius, obwohl, wie oben bereits betont wurde, die Stromdichte stark mit abnehmendem Kugelradius zunimmt und der Kathodenfall praktisch unabhängig davon ist. Zur Kontrolle wiederholten wir die Messungen mit einem Quecksilberthermometer, das in einer Bohrung der Kugeln versenkt war. Die Ergebisse stimmten mit denen mit Thermoelement erhaltenen vollkommen überein. Eine befriedigende theoretische Begründung dieser Unabhängigkeit der Kathodentemperatur vom Kathodenradius vermögen wir noch nicht zu geben. Dagegen läßt sich ein anderer theoretisch wichtiger Schluß nun ziehen. Wir hatten S. 259 bemerkt, daß das Holmsche Ähnlichkeitsgesetzt durch unsere Messungen

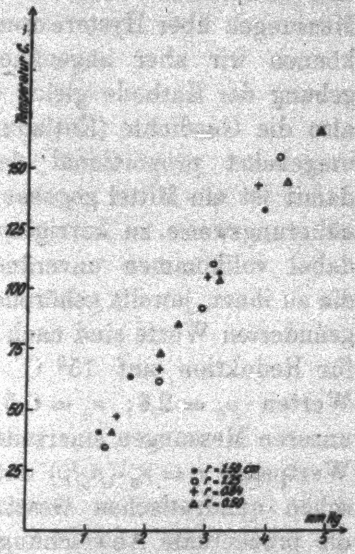


Fig. 9.

nicht bestätigt wird und als Möglichkeit einer Erklärung dieser Diskrepanz die verschiedenen Temperaturen der Kathode offen gelassen. Um die Korrektion unserer Messungen im Sinne der **Holm**schen Theorie vornehmen zu können, ist zunächst die Kenntnis des Zusammenhanges zwischen Kathodentemperatur und Gastemperatur (und damit Gasdichte) notwendig. Die Theorie dieses Zusammenhangs, die a. a. O. mitgeteilt werden wird, ist sehr verwickelt und nur unter gewissen vereinfachenden Annahmen durchzuführen. Gestützt auf anderweitige Messungen über Hysteresiserscheinungen der Glimmentladung[1]) können wir aber angenähert die Gastemperatur in der Umgebung der Kathode gleich der Kathodentemperatur und damit also die Gasdichte (Entladungskugel $\gg$ Dunkelraum) cet. par. umgekehrt proportional der Kathodentemperatur ansetzen; damit ist ein Mittel gegeben, die Fig. 5 auf gleiche Temperatur näherungsweise zu korrigieren. Die einzelnen Kurven bleiben dabei vollkommen unverändert erhalten, es ändern sich nur die zu ihnen jeweils gehörenden Parameter(Druck-)werte. Diese geänderten Werte sind nach Fig. 9 in Klammern beigeschrieben für Reduktion auf 15° C. Gehen wir dann aus von den Werten $p_0 = 2{,}6$; $r_0 = 0{,}5$; $j_0 = 1{,}93$, so erhalten wir aus unseren Messungen einerseits die zu einem Druck p gehörenden Wertpaare $r = r_0 \cdot (p_0/p)$ und j, andererseits nach dem **Holm**schen quadratischen Gesetz $j = j_0 \cdot (p/p_0)^2$. Die Tabelle gibt die prozentuale Abweichung $100 \cdot (j_{Th} - j) : j_{Th}$.

p_0/p	1	1,5	2	2,5
% Fehler	0	30	52	70

Ohne die Temperaturkorrektion werden die Verhältnisse nicht wesentlich andere; die prozentualen Fehler liegen für $p_0/p < 2$ etwas unterhalb, für $p_0/p > 2$ etwas oberhalb der in der Tabelle angegebenen Werte. Wir finden also keine auch nur angenäherte Bestätigung des von **Holm** theoretisch abgeleiteten Satzes.

---

[1]) **R. Seeliger** u. **G. Sommer**, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 20. Heft 4. 1923.

In einem zweiten folgenden Teil werden wir Messungen an zylindrischen Kathoden sowie Ergänzungen zu vorstehender Arbeit mitteilen und dann auf Grund des gesamten Versuchsmaterials auf die theoretische Seite der hier behandelten Fragen eingehen. Der Notgemeinschaft der deutschen Wissenschaft und der Helmholtzgesellschaft danken wir für Unterstützung bei der Durchführung der vorliegenden Arbeit.

Greifswald, Oktober 1923.

10. *Beobachtungen über den Dopplereffekt an Linien und Bandenspektren der Kanalstrahlen*[1];

von H. Rau.

Die neue im nachstehenden angewendete Methode besteht in folgendem:

Von einem Kanalstrahlbündel wird durch eine Linse ein verkleinertes Bild auf dem zum Strahl parallelen Spalt eines Spektrographen entworfen. Es gelangt also nur senkrecht zum Strahl emittiertes Licht durch die Linse auf den Spalt und man bekommt uur die ruhende Linie. Bringt man zwischen Kanalstrahlen und Linse möglichst nahe dem Kanalstrahl ein kreiszylindrisches Glasstäbchen an, dessen Achse senkrecht zu der durch den Spalt und den Kanalstrahl gelegten Ebene steht, so bildet sich die Begrenzung des Stäbchens ebenfalls einigermaßen scharf auf dem Spalt ab. Aus der Mitte des Stäbchens gelangt dann auf den Spalt wie ohne Stäbchen nur ruhendes Licht. Aus der unteren und oberen Hälfte des Stäbchens dagegen kommt infolge der zweimaligen Brechung im Stäbchen Strahlung auf den Spalt, die eine Komponente in der Bewegungsrichtung der Kanalstrahlen besitzt. Diese Komponente ist um so größer, je näher die Austrittsstelle den Stäbchenrändern liegt. Sie hat für das aus der oberen bzw. unteren Hälfte des Stäbchens austretende Licht entgegengesetztes Vorzeichen. Man bekommt bei einheitlicher Geschwindigkeit der Kanalstrahlen eine schräge Linie, deren Mitte am Ort der unverschobenen Linie liegt, also zwei aus der Mitte nach den Rändern des Stäbchens hin an Breite wachsende Dopplerstreifen, deren einer nach Rot und deren anderer nach Violett verläuft. Wird längs der Bahn der Kanalstrahlen auch ruhendes Licht emittiert, so trifft neben dem bewegten auch ruhendes Licht aus dem Stäbchen auf alle Teile des Spaltes und man erhält so für alle ruhend *und* bewegt emittierten Linien (hinter der Kathode) die normale Linie mit einer schrägen, an den Enden etwas auswärts gekrümmten Linie durch ihre Mitte. Ist schließlich — wie meistens — die Geschwindigkeit der bewegten Teilchen keine einheitliche, so erscheinen die Winkelräume zwischen ruhender und bewegter Linie ebenfalls mehr oder weniger geschwärzt. Dabei markiert sich das bekanntlich häufig zwischen ruhender und bewegter Intensität auftretende Intensitätsminimum durch einen schmalen Streifen kleinerer Schwärzung längs der Endstücke der ruhenden Linie. Die ausnutzbare Komponente der Geschwindigkeit und damit die Breite des Streifens ist um so größer, je näher man das Stäbchen an den Kanalstrahl heranbringt. Das ist hinter der Kathode ohne weiteres möglich, während man für Beobachtungen vor der Kathode die Stäbchen außerhalb des Rohrs anbringen muß, dieses selbst also zweckmäßig möglichst eng wählt.

---

[1] Ein *Teil* der im folgenden mitgeteilten Resultate wurde 1921 auf der Phys. Vers. in Jena vorgetragen aber noch nicht veröffentlicht.

Der Nachteil dieser Methode gegenüber der bisherigen ist, daß bei der komplizierten Intensitätsverteilung die Feststellung der Schwärzungsverteilung auf verschiedene Geschwindigkeiten durch Photometrieren der Schwärzung nicht möglich ist. Immerhin sind ausgesprochen verschiedene Geschwindigkeitsintervalle, wie sie z. B. bei der Balmerserie des Wasserstoffs, den als Atomen bzw. Molekülen beschleunigten Kanalstrahlenteilchen entsprechen, auch hier deutlich erkennbar.

Die Vorteile der neuen Methode gegenüber der bisherigen sind folgende:

1. Die Feststellung einer Dopplerverschiebung wird sehr erleichtert. Sie wird insbesondere auch ermöglicht bei engbeisammenstehenden Linien und kleiner bewegter Intensität, sowie in Fällen, wo nur bewegte Intensität auftritt; man kommt dabei in jedem Fall mit *einer* Aufnahme aus, statt der früher oft notwendigen longitudinalen und transversalen Aufnahmen.

2. Man kann leicht gleichzeitig das Leuchten in verschiedenen Teilen des Kanalstrahls z. B. vor und hinter der Kathode oder an verschiedenen Stellen vor der Kathode getrennt analysieren. Dazu ist nur nötig, eine Reihe von Stäbchen übereinander aufzustellen Die Zuordnung bestimmter Horizontalschnitte des Dopplerstreifens zu bestimmten Teilen des Strahls ist eine durchaus genügende; man überzeugt

sich leicht davon, indem man an die Stelle des Kanalstrahls einen von rückwärts beleuchteten Maßstab mit durchsichtigen Skalenteilen (z. B. in Silber eingeritzt) bringt und die Trennung der einzelnen Teilstriche beobachtet.

Die verwendeten Stäbchen hatten meist etwa 4 mm Durchmesser. Der Spektrograph besaß drei große Flintprismen von Steinheil und ein Zeißtriplet 1:5 $f = 50$ cm als Kameraobjektiv.

1. *Beobachtungen an Sauerstoff.* Die Leistungsfähigkeit der Methode wurde zunächst an der Frage des von Stark konstatierten, von Wilsar angezweifelten Dopplereffekts der O-Serienlinien erprobt. Der sehr kleine und lichtschwache Effekt konnte bei den Linien 4368 und 3947 trotz ihrer sehr großen ruhenden Intensität sicher beobachtet werden. — Weiter ergab sich bei O, besonders wenn er nur als Verunreinigung in H oder N vorhanden war, daß die dem O^+ angehörenden Funkenlinien vor der Kathode in beträchtlicher Stärke auch einen dem normalen Dopplereffekt entgegen verlaufenden Streifen zeigen, dessen maximale Breite dieselbe ist wie bei diesem. Diese von J. J. Thomson durch Ablenkungsversuche nachgewiesenen rücklaufenden Teilchen müssen also hier zum Teil den ganzen Kathodenfall mit negativer Ladung durchlaufen und dann die zur Emission der O^+-Linien zuviel vorhandenen zwei Elektronen verloren haben.

2. *Beobachtungen an Stickstoff.* Sie wurden unternommen, um die noch nicht gelöste Frage des Auftretens von Dopplereffekt bei Bandenspektren zu klären. Es ergab sich:

a) Alle „negativen“ Banden des Beobachtungsbereichs zwischen 5000 und 3900 Å.-E. zeigen in dem untersuchten Spannungsintervall von 3000 bis 35000 V. vor der Kathode den Dopplereffekt. Dabei überwiegt die bewegte Intensität weitaus die ruhende, die nur unmittelbar an der Kathode beträchtlicher wird. Ein Intensitätsminimum ist hier nicht vorhanden, soweit wenigstens als es die Dispersion des Spektrographen (bei der Bande 3914: 7 Å.-E. pro Millimeter) zu beurteilen erlaubt; es überwiegen sogar die kleinsten Geschwindigkeiten in direktem Gegensatz zu dem Verhalten der N- und O-Funkenlinien.

b) Hinter der Kathode ist der Dopplereffekt an den negativen Banden erst bei höheren Spannungen (> etwa 9000 V.) einigermaßen lichtstark zu erhalten; seine Intensität ist hier weit kleiner als vor der Kathode und tritt neben der ruhenden Intensität ganz zurück. Mit steigender Spannung bzw. mit Abnahme des Druckes nimmt sie zu.

c) Die der Geschwindigkeit proportionale Größe $\Delta \lambda_m / \lambda$ steht bei meinen Versuchsbedingungen in einem mittleren Spannungsintervall von etwa 10000 bis 20000 V. zu derselben Größe bei den Funkenlinien angenähert im Verhältnis $1 : \sqrt{2}$; bei sehr hohen Spannungen (> 30000 V.) war $\Delta \lambda_m / \lambda$ (hinter der Kathode gemessen) für Banden und Funkenlinien nahezu gleich; bei niedrigen Spannungen (3000 bis 5000 V.) und entsprechend hohen Drucken bleiben die Dopplereffekte der Banden, die nun nur noch vor der Kathode beobachtbar waren, immer mehr hinter denen der Funkenlinie zurück.

Aus dem Gesagten ist mit großer Wahrscheinlichkeit zu schließen, daß der Träger der negativen N-Banden das positiv geladene N-Molekül (N_2^+) ist. Diese schon früher von Stark ausgesprochene Annahme wurde durch die Ablenkungsversuche von W. Wien[1]) inzwischen definitiv bewiesen. Daß bei hohen Spannungen die maximalen Geschwindigkeiten der Träger von Banden und Funkenlinien gleich sind, beruht mit großer Wahrscheinlichkeit darauf, daß dann der Dopplereffekt der Funkenlinien nur von den langsamen als Moleküle beschleunigten N^+-Atomen herrührte. Das wird dadurch bestätigt, daß auch die N-Bogenlinien 4110 in diesem Falle das gleiche $\Delta \lambda_m / \lambda$ zeigt, entsprechend der Bildung ihres Trägers N aus $N_2^+ = N^+ + \dot{N}$.

Bei mittleren Spannungen sind im Dopplereffekt von 4110 hinter der Kathode zwei Geschwindigkeitsintervalle zu unterscheiden, von denen das kleinere ungefähr mit dem der Banden, das größere mit dem der Funkenlinien übereinstimmt. Das ist im Einklang mit der Zuordnung der Bogenlinien zum neutralen N-Atom (vgl. W. Wien, a. a. O.).

Die Schwierigkeit den Bandendopplereffekt bei höheren Drucken bzw. kleinen Spannungen hinter der Kathode zu erhalten, hängt wohl mit der durch die größere Zahl der

---

[1]) W. Wien, Ann. d. Phys. 69. S. 325. 1922.

Zusammenstöße bedingten größeren Zerfallswahrscheinlichkeit des N_2^+ sowie mit der anderswertigen Anregung (Fehlen der Elektronenanregung hinter der Kathode) zusammen.

An den sogenannten positiven Banden konnte ein Dopplereffekt nicht nachgewiesen werden. Ihre Zugehörigkeit zum neutralen N_2 steht nach W. Wien, a. a. O. außer Zweifel. Die Rückbildung von als N_2^+ (oder N^+) beschleunigten Teilchen zu N_2 verfolgt aber offenbar, wenigstens bei meinen Versuchsbedingungen, zu selten, um eine merkliche bewegte Intensität zu liefern.

Rücklaufende N-Kanalstrahlen konnten im Gegensatz zu O (und H) auch bei den längsten Expositionen (etwa 100 Std.) nicht beobachtet werden.

3. *Beobachtungen an Wasserstoff.* Bei Wasserstoff war es trotz vieler Bemühungen bisher nicht gelungen, am sogenannten Viellinienspektrum den Dopplereffekt nachzuweisen. Auch mit der neuen Methode verliefen die Versuche, bei denen sowohl mit reinstem H als auch mit abgestuften Zusätzen von O und Hg gearbeitet wurde[1]), zunächst ergebnislos. Die Hauptschwierigkeit für die Auffindung des offenbar höchst schwachen Effektes bildet das kontinuierliche Spektrum des H, das bei langfristigen Expositionen den etwaigen Dopplereffekt vollkommen verdeckt. Durch Variierung der Bedingungen (besonders auch der Stromstärke) gelang es schließlich, den Dopplereffekt an einer Anzahl der stärksten Linien hinter der Kathode nachzuweisen. Es sind dies 4723, 4634, 4573, 4568, 4213, 4177, 4171,5, 4063. Bei den Aufnahmen befanden sich auch vor der Kathode Stäbchen, doch zeigt dort keine Platte einen Dopplereffekt.

Die Aufnahmen erlauben folgendes auszusagen:

a) Die Schwärzung im Dopplereffekt ist auch bei sehr großer Intensität der ruhenden Linie äußerst klein;

b) die Breite des Dopplereffekts ist im Verhältnis zu dem der Serienlinien etwas (10 bis höchstens 20 Proz.) kleiner als $1:\sqrt{2}$.

Daraus folgt eine Bestätigung der durch viele andere Gründe geforderten Zuordnung des Viellinienspektrums zum neutralen H-Molekül. Die Rückbildung von H_2^+ oder H^+ zu neutralem H_2, die notwendig ist, um überhaupt bewegte Intensität zu erhalten, erfolgt sehr selten, aber häufiger als die des geladenen N im neutralen N_2.

---

[1]) Vgl. J. Stark, z. B. Jahrb. d. Rad. u. El. XIV. S. 182.

Die Bedingungen, unter denen dieser Vorgang begünstigt wird, sind wohl besser mit Hilfe der elektromagnetischen Analyse zu ermitteln. Jedenfalls darf man nicht mit G. P. Thomson[1]) aus der relativ großen Helligkeit des Viellinienspektrums unter bestimmten Bedingungen schon schließen, daß diese Umstände für die Beobachtung des Dopplereffekts besonders günstig seien. Weit mehr als 99 Proz. dieser Helligkeit rühren von ruhenden Teilchen her. Hier sei nur angeführt, daß der Dopplereffekt im wesentlichen zwischen 3000 > 6000 V., unter nicht näher geklärten Umständen aber auch einmal bei wesentlich höherer Spannung erhalten wurde.

4. *Beobachtungen an Helium.* Beim He war wesentlich das Verhalten der Linien 4686 des He^+ von Interesse, über deren Dopplereffekt noch keine Angaben vorliegen. Es gelang 4686 bei Spannungen von 25000 bis 35000 V. genügend lichtstark hinter der Kathode zu erhalten. Die ziemlich beträchtliche ruhende Intensität ist dann von einem relativ schwachen Dopplereffekt begleitet. Seine *viel* größere Breite und vor allem die größere Neigung gegenüber der ruhenden Linie unterscheiden ihn sehr charakteristisch von den Linien des neutralen Heliums. Die größeren Geschwindigkeiten überwiegen dabei gegenüber den gewöhnlichen He-Linien ganz analog wie beim Dopplereffekt der N-Funkenlinien gegenüber dem der N-Bogenlinien.

Vor der Kathode zeigen die Aufnahmen auffallenderweise zwar ruhende Intensität, aber keinen Dopplereffekt; da aber auch erstere durch die Zerstäubung etwas geschwächt war, sollen weitere Aufnahmen gemacht werden. Jedenfalls muß man aus dem Auftreten ruhender Intensität *vor* der Kathode schließen, daß ihre Anregung durch *denselben* (Elektronen-)Stoß erfolgt, der die Ionisierung bewirkt. Für eine etwaige Verweilzeit ergibt sich daraus bei meiner Anordnung eine obere Grenze von etwa 10^{-8} sec, also keine engere Eingrenzung als die bisherigen Befunde an anderen Linien.

Darmstadt, Physikal. Inst. der Technischen Hochschule.

---

[1]) G. P. Thomson, Phil. Mag. **44**. August 1920; L. Vegard, Phil. Mag. **44**. S. 558. 1921.

11. *Über die Natur der Wärmestrahlung;*
von Max Planck.

Bekanntlich hat zuerst W. Wien ein tieferes Verständnis für die charakteristischen Eigenschaften der Wärmestrahlung dadurch angebahnt, daß er den Begriff der strahlenden Entropie einführte[1]), und auf Grund der besonderen Form des Strahlungsgesetzes hat dann A. Einstein, ausgehend von dem durch L. Boltzmann aufgedeckten Zusammenhang zwischen Entropie und Wahrscheinlichkeit, die Größe der Schwankungen der in einem bestimmten Raumvolumen enthaltenen strahlenden Energie von bestimmter Schwingungszahl und Temperatur berechnet[2]) — ein Ausdruck, der später von M. v. Laue durch eine rein statistische, die Benutzung des Temperaturbegriffs ganz vermeidende Betrachtung auf ein stationär schwingendes Gebilde von bestimmter Schwingungszahl mit beliebig vielen Freiheitsgraden verallgemeinert wurde.[3])

Demnach ist, wenn E die Energie des Gebildes zu irgendeiner Zeit, $\bar{E}$ ihren zeitlichen Mittelwert, ν die Schwingungszahl, h das Wirkungsquantum, N die Anzahl der Freiheitsgrade bezeichnet, der Mittelwert des Quadrats der Energieschwankungen:

$$Q = \overline{(E - \bar{E})^2} = \overline{E^2} - \bar{E}^2 = h\nu \cdot \bar{E} + \frac{\bar{E}^2}{N}. \tag{1}$$

Für einen linearen Oszillator ist $N = 1$, für ein geradlinig polarisiertes paralleles Strahlenbündel vom Öffnungswinkel $\Delta\Omega$, dem Querschnitt f, der Länge l und der Spektralbreite $\Delta\nu$ ist

$$N = \frac{\nu^2 \cdot \Delta\nu}{c^2} \cdot \Delta\Omega \cdot f \cdot l, \tag{2}$$

für eine Hohlraumstrahlung vom Volumen V ist

$$N = \frac{8\pi\nu^2\Delta\nu}{c^3} \cdot V. \tag{3}$$

---

[1]) W. Wien, Wied. Ann. 52. S. 132. 1894.

[2]) A. Einstein, Phys. Zeitschr. 10. S. 185, 817. 1909.

[3]) M. v. Laue, Verhandl. d. Deutschen Phys. Ges. 17. S. 198. 1915.

An das durch (1) ausgedrückte Energieschwankungsgesetz hat A. Einstein a. a. O. die Folgerung geknüpft, daß die klassische Undulationstheorie des Lichtes mit ihm unvereinbar sei, weil jene Theorie nur das zweite, in bezug auf $\bar{E}$ quadratische, nicht aber das erste, lineare Glied jener Formel darzustellen vermöge. Diese Schlußweise erhielt noch eine Bekräftigung durch eine Untersuchung von H. A. Lorentz, welcher für eine in einem bestimmten Volumen enthaltene Hohlraumstrahlung die durch die Interferenzen aller einzelnen periodischen Wellenzüge bedingten Energieschwankungen direkt berechnete und für das Schwankungsquadrat Q genau den Ausdruck E^2/N, mit dem Werte (3) von N, fand.[1] Dadurch wurde die Ansicht von der Unverträglichkeit der klassischen Theorie der Lichtausbreitung mit den Forderungen der Quantentheorie noch erheblich gestützt und ist gegenwärtig jedenfalls ziemlich weit verbreitet.

Dennoch halte ich diese Frage noch keineswegs für endgültig entschieden. Was zunächst die Lorentzsche Rechnung betrifft, so steht und fällt ihr Resultat mit der Voraussetzung, daß die einzelnen periodischen Wellenzüge, aus denen man die Hohlraumstrahlung als zusammengesetzt ansehen kann, voneinander im statistischen Sinne unabhängig sind. In Erkenntnis der Bedeutung dieser Voraussetzung hat daher A. Einstein den Satz aufgestellt und begründet[2], daß nach der Wellentheorie die Koeffizienten einer Fourierschen Reihe, welche eine Komponente des Strahlungsvektors einer stationären natürlichen Strahlung darstellt, statistisch voneinander unabhängig seien. Hieraus hat sich eine Diskussion mit M. v. Laue entsponnen[3], welcher eine abweichende Ansicht vertrat. Eine vollständige Klärung der Frage ist nach meiner Meinung bisher noch nicht erzielt worden. Insbesondere scheint mir die von A. Einstein beim Beweise seines Satzes gemachte Voraussetzung, daß nach der klassischen Wellentheorie die stationäre monochromatische Wärmestrahlung durch Superposition *unendlich* vieler voneinander unabhängig erzeugter Strahlungen entstanden gedacht werden kann, noch einer näheren Prüfung zu bedürfen.

---

[1] H. A. Lorentz, Les Théories statistiques en Thermodynamique. S. 114. Teubner, Leipzig 1916.

[2] A. Einstein u. L. Hopf, Ann. d. Phys. **33.** S. 1096. 1910; A. Einstein, Ann. d. Phys. **47.** S. 879. 1915.

[3] M. v. Laue, Ann. d. Phys. **47.** S. 853. 1915; **48.** S. 668. 1915.

Ohne indes hier auf diesen Punkt näher einzugehen, möchte ich mich im vorliegenden Aufsatz darauf beschränken, für den speziellen Fall eines einzigen Freiheitsgrades $N = 1$ erstens das statistische Bildungsgesetz abzuleiten, welches die erwähnten Fourierkoeffizienten erfüllen müssen, wenn die Größe des mittleren Quadrats der Energieschwankungen den Forderungen der Quantentheorie genügen soll, ganz abgesehen von der Frage nach dem physikalischen Ursprung der Strahlung, und zweitens eine diesem Bildungsgesetz gehorchende Fourierreihe wirklich anzugeben.

I.

Die Fourierreihe des Strahlungsvektors einer stationären natürlichen monochromatischen Strahlung von einem einzigen Freiheitsgrad (man denke z. B. an die Schwingungen eines linearen Oszillators von bestimmter Eigenperiode), gültig in dem Zeitintervall $0 < t < \mathfrak{T}$, läßt sich in der Form schreiben:

$$\mathfrak{E} = \sum_n \left(A_n \cos \frac{2\pi n t}{\mathfrak{T}} + B_n \sin \frac{2\pi n t}{\mathfrak{T}} \right) \tag{4}$$

oder auch:

$$\mathfrak{E} = \sum_n C_n \cos \left(\frac{2\pi n t}{\mathfrak{T}} + \vartheta_n \right), \tag{5}$$

wenn

$$A_n = C_n \cos \vartheta_n, \quad B_n = - C_n \sin \vartheta_n, \quad C_n > 0. \tag{5a}$$

Hierbei bedeutet $\mathfrak{T}$ eine beliebig auszuwählende ungeheuer große Zeit, und dementsprechend sind die Ordnungszahlen n ungeheuer groß. Doch sind die Koeffizienten C_n nur für solche Ordnungszahlen n merklich von Null verschieden, welche der Bedingung

$$\left| \frac{n - n_0}{n_0} \right| < 1 \tag{6}$$

genügen, wenn

$$\frac{n_0}{\mathfrak{T}} = \nu \tag{7}$$

die Schwingungszahl der monochromatischen Strahlung bezeichnet.

Die Energie E der Strahlung, als eine „langsam veränderliche“ Funktion der Zeit t, wird erhalten, wenn man den Mittelwert von $\mathfrak{E}^2$ bildet für ein Zeitintervall, welches groß ist gegen die Zeit einer Schwingung, aber klein gegen die Zeit einer Schwankung[1]), und diese Größe mit einer geeigneten Konstanten K multipliziert. Dies ergibt:

$$E = K \cdot \frac{a_0}{2} + K \cdot \sum_m \left(a_m \cos \frac{2\pi m t}{\mathfrak{T}} + b_m \sin \frac{2\pi m t}{\mathfrak{T}} \right), \tag{8}$$

wenn

$$a_0 = \sum_n C_n^2 = \sum_n (A_n^2 + B_n^2), \tag{9}$$

und

$$\left\{ \begin{aligned} a_m &= \sum_n C_{n+m} C_n \cos(\vartheta_{n+m} - \vartheta_n) \\ &= \sum_n (A_{n+m} A_n + B_{n+m} B_n), \\ b_m &= - \sum_n C_{n+m} C_n \sin(\vartheta_{n+m} - \vartheta_n) \\ &= - \sum_n (A_{n+m} B_n - A_n B_{n+m}). \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Die Ordnungszahlen m sind positiv, und zwar ist für alle bei der Summation merklich in Betracht kommenden Glieder:

$$1 \ll m \ll n. \tag{11}$$

Die erste Ungleichung gilt, weil die Strahlung stationär ist, die zweite, weil die Schwankungen der Energie E langsam erfolgen gegen die Schwingungen des Vektors $\mathfrak{E}$.

Aus (8) und (9) ergibt sich sogleich der zeitliche Mittelwert, zwischen $t = 0$ und $t = \mathfrak{T}$, von E als:

$$\bar{E} = K \cdot \frac{a_0}{2} = \frac{K}{2} \cdot \sum_n C_n^2, \tag{12}$$

und aus (8) das mittlere Energieschwankungsquadrat:

$$Q = \overline{(E - \bar{E})^2} = \frac{K^2}{2} \cdot \sum_m (a_m^2 + b_m^2), \tag{13}$$

---

[1]) M. **Planck**, Ann. d. Phys. 1. S. 81. 1900. Gleichung (8) oder Ann. d. Phys. 7. S. 395. 1902.

wobei nach (10)

$$(14)\quad \begin{cases} a_m^2 + b_m^2 = \sum\limits_n C_{n+m}^2 C_n^2 + 2 \sum\limits_{n'} \sum\limits_n C_{n'+m} C_{n'} C_{n+m} C_n \\ \qquad\qquad \cos(\vartheta_{n'+m} - \vartheta_{n'} - \vartheta_{n+m} + \vartheta_n), \end{cases}$$

wenn $n' > n$.

Setzen wir also:

$$(15)\qquad n' - n = q > 1,$$

so ist:

$$(16)\quad \begin{cases} a_m^2 + b_m^2 = \sum\limits_n C_{n+m}^2 C_n^2 + 2 \sum\limits_q \sum\limits_n C_{n+q+m} C_{n+q} C_{n+m} C_n \\ \qquad\qquad \cos(\vartheta_{n+q+m} - \vartheta_{n+q} - \vartheta_{n+m} + \vartheta_n). \end{cases}$$

Dies in (13) eingesetzt ergibt für das Schwankungsquadrat Q einen Ausdruck von der Form:

$$(16\text{a})\qquad Q = Q_1 + Q_2,$$

wo Q_1 von der einfachen Summe über n, Q_2 von der Doppelsumme über n und q herrühren möge. Für das erste Glied Q_1 erhalten wir aus (13) und (16)

$$Q_1 = \frac{K^2}{2} \cdot \sum_m \sum_n C_{n+m}^2 C_n^2$$

und, wenn wir setzen: $n + m = n_1$,

$$Q_1 = \frac{K^2}{2} \cdot \sum_{n_1} \sum_n C_{n_1}^2 C_n^2.$$

In dieser Doppelsumme kommen alle Kombinationen der Ordnungszahlen n_1 und n vor, für welche $n_1 > n$. Heben wir diese Beschränkung auf, so ergibt die Summation, da sie nun vollkommen symmetrisch in bezug auf n_1 und n vorzunehmen ist, den doppelten Wert, und wir erhalten:

$$Q_1 = \frac{K^2}{4} \cdot \sum_{n_1} \sum_n C_{n_1}^2 C_n^2 = \frac{K^2}{4} \cdot \sum_{n_1} C_{n_1}^2 \cdot \sum_n C_n^2$$

und nach (12):

$$(17)\qquad Q_1 = E^2.$$

Der Vergleich mit (1) zeigt, da hier $N = 1$ ist, daß Q_1 den von der klassischen Statistik gelieferten Ausdruck des Schwankungsquadrats darstellt. Daraus folgt, daß der zweite Summand Q_2 die von der Quantentheorie geforderte Ergänzung darstellt, also:

$$Q_2 = h\nu \cdot \bar{E}, \tag{18}$$

oder, wenn wir den Wert von Q_2 aus (13) und (16), und den von $\bar{E}$ aus (12) einsetzen:

$$\tag{19} \left\{ \begin{aligned} & K \cdot \sum_m \sum_q \sum_n C_{n+q+m}\, C_{n+q}\, C_{n+m}\, C_n \\ & \times \cos(\vartheta_{n+q+m} - \vartheta_{n+q} - \vartheta_{n+m} + \vartheta_n) = \frac{h\nu}{2} \sum_n C_n^2. \end{aligned} \right.$$

Dies ist also die gesuchte Bedingung, welche die Koeffizienten C_n und ϑ_n, bzw. A_n und B_n, erfüllen müssen, wenn die Fourierreihe (4), bzw. (5), den Strahlungsvektor einer natürlichen stationären monochromatischen Strahlung von einem einzigen Freiheitsgrad darstellen soll. Man kann ihr eine etwas abweichende Form geben, die darauf beruht, daß man nicht die verschiedenen Ordnungszahlen bei einer einzigen Strahlung (einem einzigen Oszillator), sondern eine ganz bestimmte, beliebig herausgegriffene Ordnungszahl n bei einer großen Anzahl derartiger voneinander unabhängiger Strahlungen (Oszillatoren) betrachtet und den Mittelwert über alle Strahlungen (Oszillatoren) bildet. Dann lautet das Gesetz:

$$\tag{19a} \left\{ \begin{aligned} & K \cdot \sum_m \sum_q \overline{C_{n+m+q}\, C_{n+q}\, C_{n+m}\, C_n} \\ & \overline{\times \cos(\vartheta_{n+m+q} - \vartheta_{n+q} - \vartheta_{n+m} + \vartheta_n)} = \frac{h\nu}{2}\, \overline{C_n^2}. \end{aligned} \right.$$

II.

Jetzt soll ein Ausdruck für den Strahlungsvektor $\mathfrak{E}$ als Funktion der Zeit t $(0 < t < \mathfrak{T})$ angegeben werden, welcher den Bedingungen der natürlichen stationären monochromatischen Strahlung eines einzigen Freiheitsgrades von der Schwingungszahl $\nu = \frac{n_0}{\mathfrak{T}}$ wirklich Genüge leistet. Zu dem Zwecke nehmen wir $\mathfrak{E}$ als zusammengesetzt an durch Superposition einer großen Anzahl P von Systemen reiner Sinusschwingungen von der nämlichen Amplitude C und den merklich verschiedenen Ordnungszahlen $n_1, n_2, \ldots n_P$, indem jedes System zu einem bestimmten Zeitpunkte $t_1, t_2, \ldots t_P$ plötzlich einsetzt und nach Ablauf eines für alle Systeme gleichen Zeitintervalls τ ebenso plötzlich erlischt. Dabei sollen sowohl die Zahlen $n_1, n_2, \ldots$ als auch die Zeitpunkte $t_1, t_2, \ldots$ ganz unabhängig voneinander sein. Doch sollen die ersteren, obwohl ihre Differenzen große Zahlen sind, wegen der Monochromasie der Strahlung der Ungleichung (6) genügen, während die Zeitpunkte $t_1, t_2, \ldots$ gänzlich regellos mit einer bestimmten mittleren Häufigkeit auf das Zeitintervall von 0 bis $\mathfrak{T}$ verteilt sind. Wir denken sie uns so geordnet, daß

$$0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_P < \mathfrak{T}\,. \tag{20}$$

Das Verhältnis

$$\frac{P}{\mathfrak{T}} = \varphi \tag{20a}$$

bezeichnet die mittlere Zahl der in der Zeiteinheit einsetzenden Schwingungssysteme. Das Zeitintervall τ, oder die Dauer eines einzelnen Wellensystems, soll groß sein gegen die Zeit einer Schwingung, aber klein gegen $\mathfrak{T}$, so daß

$$\frac{\mathfrak{T}}{n_0} \ll \frac{n_i - n_0}{n_0}\tau \ll \tau \ll \mathfrak{T}\,. \tag{21}$$

Nach diesen Festsetzungen läßt sich der Ausdruck des Strahlungsvektors als Funktion der Zeit t schreiben:

$$\mathfrak{E} = \sum_{i=1}^{P} C \sin \frac{2\pi n_i}{\mathfrak{T}}(t - t_i) \cdot [t_i, t_i + \tau], \tag{22}$$

wenn das Symbol $[t_i, t_i + \tau]$ diejenige unstetige Funktion von t bezeichnet, welche für alle Werte $0 < t < t_i$ und $t_i + \tau < t < \mathfrak{T}$ verschwindet, und für alle Werte $t_i < t < t_i + \tau$ gleich 1 ist. Der Fall, daß $t_i + \tau > \mathfrak{T}$, ist hier unwesentlich und bedarf keiner besonderen Behandlung. Dann ergibt sich für die Energie E der Schwingung, als einer langsam veränderlichen Zeitfunktion, wie im vorigen Abschnitt:

$$\left\{\begin{aligned} E = K\sum_{i=1}^{P}\frac{C^2}{2}[t_i, t_i + \tau] + K\sum_{i=1}^{P}\sum_{k=1}^{P} C^2 \cos\frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \\ \cdot\{(n_k - n_i)t - n_k t_k + n_i t_i\}\cdot[t_i, t_i + \tau]\cdot[t_k, t_k + \tau], \end{aligned}\right. \tag{23}$$

wobei $i < k$, also nach (20): $t_i < t_k$.

Falls $t_i + \tau < t_k$, so greifen die Schwingungssysteme i und k nicht ineinander über. Dann ist also für alle Zeiten t das letzte Produkt in (23) gleich Null. Falls dagegen $t_i + \tau > t_k$, so greifen die beiden Wellenzüge ineinander über, und es wird für alle Zeiten t:

$$[t_i, t_i + \tau] \cdot [t_k, t_k + \tau] = [t_k, t_i + \tau]. \tag{24}$$

Setzt man daher

$$t_k - t_i = t' > 0, \tag{25}$$

so kann man allgemein schreiben:

$$\left\{\begin{aligned} E = \frac{K}{2} \cdot C^2 \cdot \sum_{i=1}^{P} [t_i, t_i + \tau] + K C^2 \cdot \sum_{i=1}^{P} \sum_{t'=0}^{\tau} \cos \frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \\ \cdot \{(n_k - n_i) t - n_k t_k + n_i t_i\} \cdot [t_i + t', t_i + \tau]. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Hieraus ergibt sich für den Mittelwert von E durch Integration nach t von 0 bis $\mathfrak{T}$ und Division durch $\mathfrak{T}$, da:

$$\int_0^{\mathfrak{T}} [t_i, t_i + \tau] \, dt = \tau, \tag{27}$$

während das zweite Glied von (26) wegen der in (21) festgesetzten Größenordnung von $n_k - n_i$ keinen merklichen Wert liefert:

$$\bar{E} = \frac{K}{2} C^2 \cdot P \cdot \frac{\tau}{\mathfrak{T}} = \frac{K}{2} \tau \varphi C^2, \tag{28}$$

was dadurch leicht verständlich ist, daß die Energie eines einzelnen Wellensystems $\frac{K}{2} C^2$ beträgt, und daß im Mittel $\varphi \tau$ Wellensysteme sich gleichzeitig superponieren. Ihre Interferenzen, deren Einfluß durch das zweite Glied von (26) dargestellt wird, ändern nichts an dem Mittelwert von E.

Zur Bildung des Energieschwankungsquadrats Q wollen wir hier nach (1) so verfahren, daß wir aus (26) den Mittelwert von E^2 berechnen und davon das Quadrat von E subtrahieren. Hierfür haben wir also den Ausdruck (26) zu quadrieren, und erhalten dann, auf Grund einer ähnlichen Überlegung wie oben:

$$\begin{aligned} \overline{E^2} = \frac{K^2}{4} C^4 \left\{ \sum_{i=1}^{P} [t_i, t_i + \tau] + 2 \sum_{i=1}^{P} \sum_{t'=0}^{\tau} [t_i + t', t_i + \tau] \right\} \\ + K^2 C^4 \sum_{i=1}^{P} \sum_{t'=0}^{\tau} \cos^2 \frac{2\pi}{\mathfrak{T}} \{(n_k - n_i) t - n_k t_k + n_i t_i\} \\ \cdot [t_i + t', t_i + \tau] + \cdots, \end{aligned}$$

wo die durch Punkte bezeichneten weggelassenen Glieder nur die ersten Potenzen der cos enthalten und daher später bei der Mittelwertsbildung fortfallen. Durch Integration nach t von 0 bis $\mathfrak{T}$ und nachfolgender Division mit $\mathfrak{T}$ ergibt sich, wie in (27):

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} \overline{E^2} &= \frac{K^2}{4} C^4 \left\{ \frac{\tau}{\mathfrak{T}} \cdot P + 2 \sum_{i=1}^{P} \sum_{t'=0}^{\tau} \frac{\tau - t'}{\mathfrak{T}} \right\} \\ &\qquad + \frac{K^2}{2} C^4 \sum_{i=1}^{P} \sum_{t'=0}^{\tau} \frac{\tau - t'}{\mathfrak{T}} \,. \end{aligned}\right.$$

Um die hier auftretende Doppelsumme zu berechnen, vertauschen wir die Reihenfolge der beiden Summationen und fragen zunächst nach der Anzahl derjenigen Kombinationen je zweier Wellensysteme, deren zeitlicher Abstand zwischen t' und $t' + \Delta t'$ liegt. Für irgendein Wellensystem ist die Anzahl der Wellensysteme, die in dem bezeichneten Zeitabstand darauf folgen, im Mittel gleich $\varphi \cdot \Delta t'$, unabhängig von t', da $t' < \mathfrak{T}$. Folglich ist diese Anzahl für alle P Wellensysteme:

$$P \cdot \varphi \cdot \Delta t' = \varphi^2 \mathfrak{T} \cdot \Delta t',$$

und wir erhalten:

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_{t'=0}^{\tau} \sum_{i=1}^{P} \frac{\tau - t'}{\mathfrak{T}} &= \sum_{t'=0}^{\tau} \varphi^2 (\tau - t') \cdot \Delta t' \\ &= \varphi^2 \int_0^{\tau} (\tau - t')\, dt' = \varphi^2 \frac{\tau^2}{2} \,. \end{aligned}\right.$$

Daher:

$$(31)\quad \overline{E^2} = \frac{K^2}{4} C^4 \{\varphi \tau + \varphi^2 \tau^2\} + \frac{K^2}{4} C^4 \varphi^2 \tau^2 .$$

Hieraus nach (28):

$$(32)\quad Q = \overline{E^2} - \overline{E}^2 = \frac{K^2}{4} C^4 \varphi \tau + \frac{K^2}{4} C^4 \varphi^2 \tau^2 ,$$

und mit Einführung von $\overline{E}$ statt φ:

$$(33)\quad Q = \frac{K}{2} C^2 \cdot \overline{E} + \overline{E}^2 .$$

Der Vergleich mit (1) ergibt volle Übereinstimmung mit den Forderungen der Quantenstatistik, wenn gesetzt wird:

$$(34)\quad \frac{K}{2} C^2 = h \nu .$$

d. h. wenn die Energie einer einzelnen Schwingung gleich einem Energiequantum angenommen wird. Unter dieser Voraussetzung ergibt sich für das Produkt der Größen φ und τ die Beziehung:

$$\varphi\tau = \frac{E}{h\nu} = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\,. \tag{35}$$

Es ist dies die mittlere Zahl der in der Strahlung gleichzeitig vorhandenen Schwingungen. Dieselbe besitzt also einen bestimmten meßbaren Wert, der von vornherein durch keinerlei Grenzen beschränkt ist. Eine Trennung der beiden Faktoren φ und τ voneinander ist aber hier nicht möglich, d. h. das Resultat bleibt ganz ungeändert, wenn man die Häufigkeit φ der unabhängig voneinander einsetzenden Wellensysteme beliebig steigert und zugleich die Dauer τ eines einzelnen Wellensystems in demselben Verhältnis herabsetzt, natürlich innerhalb der durch die Größenbeziehungen (21) vorgeschriebenen Grenzen.

III.

Es bleibt jetzt noch die formale Aufgabe übrig, die in dem vorigen Abschnitt betrachtete Strahlung durch eine einzige **Fouriersche** Reihe darzustellen und deren Verträglichkeit mit dem Schwankungsgesetz (1) nachzuweisen. Zu diesem Zwecke entwickeln wir eine der in (22) enthaltenen Einzelschwingungen für $0 < t < \mathfrak{T}$ in eine Fourierreihe:

$$\left\{\begin{aligned} & C \cdot \sin \frac{2\pi n_i}{\mathfrak{T}}(t - t_i) \cdot [t_i,\, t_i + \tau] \\ & \qquad = \frac{C}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \lambda (n - n_i)}{n - n_i} \sin \left\{ \frac{2\pi n}{\mathfrak{T}} (t - t_i) - \lambda (n - n_i) \right\}, \end{aligned}\right. \tag{36}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist:

$$\frac{\pi\tau}{\mathfrak{T}} = \lambda \ll 1\,, \tag{37}$$

und erhalten dann aus (22) für den Schwingungsvektor $\mathfrak{E}$ die Fourierreihe (4) mit den Koeffizienten:

$$\left\{\begin{aligned} A_n &= - \frac{C}{\pi} \sum_{i=1}^{P} \frac{\sin \lambda (n - n_i)}{n - n_i} \cdot \sin \left\{ \frac{2\pi n t_i}{\mathfrak{T}} + \lambda (n - n_i) \right\}, \\ B_n &= \frac{C}{\pi} \sum_{i=1}^{P} \frac{\sin \lambda (n - n_i)}{n - n_i} \cdot \cos \left\{ \frac{2\pi n t_i}{\mathfrak{T}} + \lambda (n - n_i) \right\}. \end{aligned}\right. \tag{38}$$

Dies ergibt für die Energie E die Fouriersche Reihe (8), wobei nach (9):

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} a_0 &= \sum_{n=1}^{\infty}(A_n^2+B_n^2) \\ &= \frac{C^2}{\pi^2}\sum_n\sum_i\frac{\sin^2\lambda(n-n_i)}{(n-n_i)^2}+\frac{2C^2}{\pi^2}\sum_n\sum_i\sum_k\frac{\sin\lambda(n-n_i)}{n-n_i} \\ &\qquad\cdot\frac{\sin\lambda(n-n_k)}{n-n_k}\cdot\cos\left\{\frac{2\pi n t'}{\mathfrak{T}}-\lambda(n_k-n_i)\right\}, \end{aligned}\right.$$

wenn $k > i$ genommen wird und t' wieder durch (25) definiert ist.

Nun ist einerseits nach (56), da $\lambda \ll 1$:

$$(40)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\lambda(n-n_i)}{(n-n_i)^2}=\sum_{n'=-\infty}^{n'=+\infty}\frac{\sin^2\lambda n'}{n'^2}=\pi\lambda,$$

andererseits, wenn die (positive oder negative) große ganze Zahl $n_k - n_i = \varDelta$ und $n - n_k = n'$ gesetzt wird:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\lambda(n-n_i)}{n-n_i}\cdot\frac{\sin\lambda(n-n_k)}{n-n_k}\cdot\cos\left\{\frac{2\pi n t'}{\mathfrak{T}}-\lambda(n_k-n_i)\right\}$$

$$=\sum_{n'=-\infty}^{n'=+\infty}\frac{\sin\lambda n'}{n'}\cdot\frac{\sin\lambda(n'+\varDelta)}{n'+\varDelta}\cdot\cos\left\{\frac{2\pi n' t'}{\mathfrak{T}}-\lambda\varDelta+\frac{2\pi n_k t'}{\mathfrak{T}}\right\}$$

und nach (55):

$$=\frac{\pi}{\varDelta}\sin\varDelta\left(\lambda-\frac{\pi t'}{\mathfrak{T}}\right)\cdot\cos\left\{\frac{\pi t'}{\mathfrak{T}}(n_i+n_k)-\lambda\varDelta\right\}\cdot[0,\tau],$$

wo das Symbol $[0, \tau]$ diejenige Funktion von t' bedeutet, die für $0 < t' < t$ gleich 1 ist, für alle übrigen Werte von t' aber verschwindet.

Daraus folgt:

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} a_0 = \frac{C^2}{\pi^2}\sum_i\pi\lambda &+ \frac{2C^2}{\pi^2}\sum_i\sum_{t'=0}^{\tau}\frac{\pi}{\varDelta}\sin\frac{\pi\varDelta}{\mathfrak{T}}(\tau-t') \\ &\cdot\cos\left\{\frac{\pi t'}{\mathfrak{T}}(n_i+n_k)-\lambda\varDelta\right\}. \end{aligned}\right.$$

Bedenkt man, daß die Glieder der Doppelsumme wechselnde Vorzeichen haben, und daß der Nenner $\varDelta$ nach (21) einen sogar gegen $1/\lambda$ großen Wert besitzt, so erhellt, daß die Doppelsumme gegen die erste Summe verschwindet, und man erhält:

$$(42)\qquad a_0=\frac{C^2}{\pi}P\lambda=C^2\varphi\tau$$

und nach (12):

$$\bar{E} = \frac{K}{2} C^2 \varphi \tau .$$

in Übereinstimmung mit (28).

Ferner ist nach (10) und (38):

$$(43)\left\{\begin{aligned} a_m &= \sum_n (A_{n+m} A_n + B_{n+m} B_n) = \\ &= \frac{C^2}{\pi^2} \sum_n \sum_i \frac{\sin \lambda (n - n_i)}{n - n_i} \cdot \frac{\sin \lambda (n + m - n_i)}{n + m - n_i} \\ &\qquad \cdot \cos m \left(\frac{2 \pi t_i}{\mathfrak{T}} + \lambda\right) \\ &+ \frac{C^2}{\pi^2} \sum_n \sum_i \sum_k \frac{\sin \lambda (n - n_i)}{n - n_i} \cdot \frac{\sin \lambda (n + m - n_k)}{n + m - n_k} \\ &\qquad \cdot \cos \left\{\frac{2 \pi}{\mathfrak{T}} (n t' + m t_k) + \lambda (m - \varDelta)\right\} . \end{aligned}\right.$$

In diesem Ausdruck von a_m berechnen wir die beiden Glieder, die wir a_m' und a_m'' nennen wollen, einzeln. Das erste Glied a_m' lautet:

$$(44)\left\{\begin{aligned} a_m' &= \frac{C^2}{\pi^2} \sum_i \cos m \left(\frac{2 \pi t_i}{\mathfrak{T}} + \lambda\right) \cdot \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \lambda n'}{n'} \cdot \frac{\sin \lambda (n' + m)}{n' + m} \\ &= \frac{C^2}{\pi^2} \sum_i \cos m \left(\frac{2 \pi t_i}{\mathfrak{T}} + \lambda\right) \cdot \pi \cdot \frac{\sin \lambda m}{m} \\ &= \frac{C^2}{\pi} \frac{\sin \lambda m}{m} \sum_i \cos m \left(\frac{2 \pi t_i}{\mathfrak{T}} + \lambda\right) . \end{aligned}\right.$$

Das andere Glied a_m'' zerlegen wir in die beiden Teile, welche den Kombinationen $i \lesseqgtr k$ entsprechen. Wenn wir in dem zweiten Teil $(i > k)$ die Buchstaben i und k überall vertauschen, so ergibt sich für a_m'':

$$\begin{aligned} a_m'' = &\frac{C^2}{\pi^2} \sum_n \sum_i \sum_k \frac{\sin \lambda (n - n_i)}{n - n_i} \cdot \frac{\sin \lambda (n + m - n_k)}{n + m - n_k} \\ &\qquad \cdot \cos \left\{\frac{2 \pi}{\mathfrak{T}} (n t' + m t_k) + \lambda (m - \varDelta)\right\} \\ + &\frac{C^2}{\pi^2} \sum_n \sum_i \sum_k \frac{\sin \lambda (n - n_k)}{n - n_k} \cdot \frac{\sin \lambda (n + m - n_i)}{n + m - n_i} \\ &\qquad \cdot \cos \left\{\frac{2 \pi}{\mathfrak{T}} (- n t' + m t_i) + \lambda (m + \varDelta)\right\} , \end{aligned}$$

wo nun überall $i < k$.

Hierfür können wir auch schreiben:

$$\left.\begin{aligned}
a_m'' = & \frac{C^2}{\pi^2}\sum_i \sum_k \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\lambda n'}{n'} \cdot \frac{\sin\lambda(n'+m-\Delta)}{n'+m-\Delta} \\
& \qquad \cdot \cos\left\{\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}(n't'+n_i t'+m t_k)+\lambda(m-\Delta)\right\} \\
& + \frac{C^2}{\pi^2}\sum_i \sum_k \sum_{n'=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\lambda n'}{n'} \cdot \frac{\sin\lambda(n'+m+\Delta)}{n'+m+\Delta} \\
& \qquad \cdot \cos\left\{\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}(n't'+n_k t'-m t_i)-\lambda(m+\Delta)\right\} \\
= & \frac{C^2}{\pi^2}\sum_i \sum_k \frac{\pi}{m-\Delta} \sin\frac{\pi}{\mathfrak{T}}(m-\Delta)(\tau-t') \\
& \qquad \cdot \cos\left\{\frac{\pi}{\mathfrak{T}}(m-\Delta)(\tau+t_i+t_k)\right. \\
& \qquad\qquad \left. + \frac{2\pi}{\mathfrak{T}}(n_k t_k - n_i t_i)\right\} \cdot [0, \tau] \\
& + \frac{C^2}{\pi^2}\sum_i \sum_k \frac{\pi}{m+\Delta} \sin\frac{\pi}{\mathfrak{T}}(m+\Delta)(\tau-t') \\
& \qquad \cdot \cos\left\{\frac{\pi}{\mathfrak{T}}(m+\Delta)(\tau+t_i+t_k)\right. \\
& \qquad\qquad \left. - \frac{2\pi}{\mathfrak{T}}(n_k t_k - n_i t_i)\right\} \cdot [0, \tau] \\
= & \frac{C^2}{\pi}\sum_{i=1}^{P} \sum_{t'=0}^{\tau} \\
& \qquad \left[\frac{1}{m-\Delta}\sin\frac{\pi}{\mathfrak{T}}(m-\Delta)(\tau-t')\right. \\
& \qquad \cdot \cos\left\{\frac{\pi}{\mathfrak{T}}(m-\Delta)(\tau+t_i+t_k)+\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}(n_k t_k - n_i t_i)\right\} \\
& \qquad + \frac{1}{m+\Delta}\sin\frac{\pi}{\mathfrak{T}}(m+\Delta)(\tau-t') \\
& \qquad \left. \cdot \cos\left\{\frac{\pi}{\mathfrak{T}}(m+\Delta)(\tau+t_i+t_k)-\frac{2\pi}{\mathfrak{T}}(n_k t_k - n_i t_i)\right\}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Hiernach ist

$$a_m = a_m' + a_m''. \tag{46}$$

Ganz auf die nämliche Weise berechnet sich der Koeffizient b_m aus (10) und (38). Auch b_m wird dargestellt durch eine Summe von zwei Gliedern:

$$b_m = b_m' + b_m'', \tag{47}$$

wobei analog (44):

$$b_m' = \frac{C^2}{\pi} \frac{\sin \lambda m}{m} \sum_i \sin m \left(\frac{2 \pi t_i}{\mathfrak{T}} + \lambda \right) \tag{48}$$

und analog (45):

$$\left\{ \begin{aligned} b_m'' = \frac{C^2}{\pi} \sum_{i=1}^{P} \sum_{t'=0}^{\tau} & \Big[\frac{1}{m - \varDelta} \sin \frac{\pi}{\mathfrak{T}} (m - \varDelta)(\tau - t') \\ & \cdot \sin \left\{ \frac{\pi}{\mathfrak{T}} (m - \varDelta)(\tau + t_i + t_k) + \frac{2\pi}{\mathfrak{T}} (n_k t_k - n_i t_i) \right\} \\ & - \frac{1}{m + \varDelta} \sin \frac{\pi}{\mathfrak{T}} (m + \varDelta)(\tau - t') \\ & \cdot \sin \left\{ \frac{\pi}{\mathfrak{T}} (m + \varDelta)(\tau + t_i + t_k) - \frac{2\pi}{\mathfrak{T}} (n_k t_k - n_i t_i) \right\} \Big] ; \end{aligned} \right. \tag{49}$$

Für das Energieschwankungsquadrat Q ergibt sich schließlich nach (13) aus (46) und (47):

$$\left\{ \begin{aligned} Q &= \frac{K^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_m'^2 + b_m'^2) + \frac{K^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (a_m''^2 + b_m''^2) \\ &= Q' + Q'', \end{aligned} \right. \tag{50}$$

indem wir berücksichtigen, daß die Summationen über die Produkte $a_m' a_m''$ und $b_m' b_m''$ wegen der wechselnden Vorzeichen und wegen der großen Werte der Nenner $m(m - \varDelta)$ und $m(m + \varDelta)$ keine merklichen Beträge ergeben.

Das erste Glied Q' berechnet sich nach (44) und (48) zu:

$$\left\{ \begin{aligned} Q' &= \frac{K^2}{2} \cdot \frac{C^4}{\pi^2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda m}{m^2} \cdot P + \frac{K^2}{2} \cdot \frac{C^4}{\pi^2} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda m}{m^2} \\ & \qquad \cdot 2 \sum_{i} \mathop{\sum}_{<} \sum_{k} \cos \frac{2 \pi m t'}{\mathfrak{T}} \\ &= \frac{K^2}{2} \frac{C^4}{\pi^2} \cdot P \cdot \frac{\pi \lambda}{2} + \frac{K^2 C^4}{\pi^2} \sum_{i} \mathop{\sum}_{<} \sum_{k} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda m}{m^2} \\ & \qquad \cdot \cos \frac{2 \pi m t'}{\mathfrak{T}} . \end{aligned} \right. \tag{51}$$

Nun ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda m}{m^2} \cdot \cos \frac{2\pi m t'}{\mathfrak{T}} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda m}{m^2} \cos \frac{2\pi m t'}{\mathfrak{T}} - \lambda^2 \right\}$$

und nach (56) und (37)

$$= \frac{1}{2} \left\{ \pi \left(\lambda - \frac{\pi t'}{\mathfrak{T}} \right) [0, \tau] - \lambda^2 \right\} = \frac{\pi^2}{2} \left\{ \frac{\tau - t'}{\mathfrak{T}} [0, \tau] - \frac{\tau^2}{\mathfrak{T}^2} \right\}; \tag{52}$$

folglich

$$\sum_i \sum_k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 \lambda m}{m^2} \cdot \cos \frac{2\pi m t'}{\mathfrak{T}} = \frac{\pi^2}{2} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{t'=0}^{\tau} \frac{\tau - t'}{\mathfrak{T}} - \frac{P^2}{2} \frac{\tau^2}{\mathfrak{T}^2} \right\},$$

welcher Ausdruck nach (30) gleich Null ist. Daher bleibt von dem Ausdruck (51) nur der erste Teil übrig:

$$Q' = \frac{K^2}{4} \frac{C^4}{\pi} P \lambda = \frac{K^2}{4} C^4 \varphi \tau. \tag{53}$$

Das zweite Glied Q'' besitzt nach (45) und (49) den Wert:

$$Q'' = \frac{K^2}{2} \frac{C^4}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{P} \sum_{t'=0}^{\tau}$$

$$\left\{ \frac{\sin^2 \frac{\pi}{\mathfrak{T}} (m - \Delta) \cdot (\tau - t')}{(m - \Delta)^2} + \frac{\sin^2 \frac{\pi}{\mathfrak{T}} (m + \Delta) \cdot (\tau - t')}{(m + \Delta)^2} \right\}$$

$$= \frac{K^2}{2} \frac{C^4}{\pi^2} \sum_{i=1}^{P} \sum_{t'=0}^{\tau} \sum_{m'=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{\pi}{\mathfrak{T}} m' (\tau - t')}{m'^2}$$

$$= \frac{K^2 C^4}{2\pi^2} \sum_{i=1}^{P} \sum_{t'=0}^{\tau} \frac{\pi^2 (\tau - t')}{\mathfrak{T}}$$

und nach (30):

$$Q'' = \frac{K^2 C^4}{4} \varphi^2 \tau^2. \tag{54}$$

Somit ergibt sich für das Energieschwankungsquadrat Q aus (50) wieder der frühere Wert (32) oder (33), womit der Nachweis erbracht ist, daß die **Fouriersche** Reihe (4) für die elektrische Feldstärke mit den Werten (38) der Koeffizienten tatsächlich das mittlere Quadrat der bei einer monochromatischen Temperaturstrahlung stattfindenden Energieschwankungen richtig wiedergibt.

Anmerkung: In den vorstehenden Rechnungen ist wiederholt Gebrauch gemacht von der folgenden Identität. Wenn $0 < \lambda < \frac{\pi}{2}$, so ist:

$$(55)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \lambda n}{n} \cdot \frac{\sin \lambda (n+p)}{n+p} \cdot \cos(\alpha n + \beta) \\ = \frac{\pi}{p} \sin p \left(\lambda - \frac{|\alpha|}{2}\right) \cdot \cos\left(\beta - \frac{\alpha p}{2}\right) \\ \text{oder } = 0, \end{aligned}\right.$$

je nachdem $|\alpha|$ zwischen 0 und 2λ oder zwischen 2λ und π liegt. Dabei ist das Glied $\left(\frac{\sin \lambda n}{n}\right)_{n=0} = \lambda$ zu setzen.

Speziell für $p = 0$ wird daraus:

$$(56)\quad \left\{\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda n}{n^2} \cos(\alpha n + \beta) = \pi \left(\lambda - \frac{|\alpha|}{2}\right) \cos \beta \\ \text{bzw. } = 0. \end{aligned}\right.$$

Man beweist diesen Satz am einfachsten, indem man diejenige Funktion von α, welche die Periode 2π besitzt und in dem Intervall von $-\pi$ bis $+\pi$ die vorstehend auf der rechten Gleichungsseite angegebenen Werte annimmt, in eine Fouriersche Reihe entwickelt.

IV.

Trotz der hier nachgewiesenen Übereinstimmung des Ausdrucks (22) für den Strahlungsvektor mit dem Quantengesetz (1) für die Energieschwankungen entspricht derselbe doch bei weitem noch nicht den bei der natürlichen Wärmestrahlung herrschenden Verhältnissen, etwa der elektrischen Feldstärke in einem monochromatischen unendlich schmalen geradlinig polarisierten Strahlenbündel, und zwar aus einem doppelten Grunde. Erstens bezieht sich die Übereinstimmung mit den Forderungen der Quantentheorie nur auf den Mittelwert des Quadrats der Energieschwankungen, nicht auf die Statistik der einzelnen Energieschwankungen, und zweitens besitzt ein Strahlenbündel, auf welches die Quantenstatistik anwendbar ist, nicht einen einzigen, sondern eine große Anzahl von Freiheitsgraden. Dies geht schon daraus hervor, daß die

Gleichungen (2) und (3) nur dann einen Sinn haben, wenn sich daraus für N eine große Zahl ergibt. Denn die Variabeln auf den rechten Gleichungsseiten sind stetig veränderlich, während N ganzzahlig ist.

Um den natürlichen Verhältnissen näherzukommen, sind also einmal statt des mittleren Schwankungsquadrats die einzelnen Schwankungen in Betracht zu ziehen, und außerdem ist die Untersuchung auf eine große Anzahl von Freiheitsgraden zu erstrecken. Über beide Aufgaben hoffe ich in Bälde an anderem Orte einiges berichten zu können.

12. *Beschränkte Mischbarkeit von Materie oberhalb der kritischen Temperatur;*

von Th. Des Coudres.

Sämtliche Gase gelten als vollkommen miteinander mischbar. Man erwartet daher auch bei Flüssigkeiten den Eintritt unbegrenzter gegenseitiger Löslichkeit, bevor sie in den kritischen Zustand übergehen.1)

Nach kinetischer Auffassung brauchte dies nicht immer der Fall zu sein. Ja es wird sogar einigermaßen unwahrscheinlich, daß Ausnahmen von der Regel ganz ausgeschlossen sein sollten, falls man mit W. Wiens Gedanken im Jubelbande für H. A. Lorentz, über die elektromagnetische Begründung der Mechanik2), bei den Molekularwirkungen Ernst macht, wie dies in vielversprechender Weise jüngst von Debye mit seiner Zurückführung beider van der Waalsscher Grundkräfte auf elektrostatischen Ursprung unternommen ist.3)

Zur experimentellen Förderung der Frage schien sich eine Bombe für hohe Drucke und hohe Temperaturen zu eignen, welche vor 13 Jahren beschrieben worden ist4), und mit der seit einiger Zeit wieder gearbeitet wird.

Mittels Amagatscher Fenster mußte man Einblick in den Druckraum schaffen. Außerdem mußte die (angegebenenorts beschriebene) in das Druckwasser gesetzte elektrische Heizvorrichtung durchsichtig gestaltet werden.5) Der Ofen besteht nur aus Platin, Quarzglas und Wasser. Er gestattet die Untersuchung der Zweistoffsysteme in dem warmen, zugeschmolzenen Schenkel eines aufrechtstehenden Quarzglas-U-Rohres von 7 mm Weite, dessen anderer Schenkel durch Quecksilber abgeschlossen ist. Druck und Temperaturgrenzen sind 500 Atm. und 500° C.

---

1) V. Rothmund, Zeitschr. f. physik. Chem. S. 464. 1898.

2) W. Wien, Ann. d. Phys. 5. S. 504. 1901.

3) P. Debye, Physik. Zeitschr. 21. S. 178. 1920 u. 22, S. 301. 1921.

4) Th. Des Coudres, Ber. Sächs. Ges. d. Wissensch. 62. S. 296. 1910.

5) Wesentliche Verbesserungsvorschläge und die ganze Ausführung danke ich Hrn. Obermechanikermeister A. Dornfeld.

Die bisherigen vorläufigen Versuche scheinen mit der Annahme inhomogener Gleichgewichte oberhalb der kritischen Temperatur beider Phasen verträglich, ohne für solche beweisend zu sein. Über die Wahrscheinlichkeit einer anderen Erklärung wage ich einstweilen keinerlei Vermutungen zu äußern.

Zunächst wurde die Trennungsfläche von Wasser und Benzol unter 300 Atm. Druck beobachtet. Bei etwa 280° trat immer dichter werdende Trübung der gesamten Flüssigkeit ein, die sich aber bei 400° und darüber hinaus wieder lichtete. Es erschien dann bis 430° eine wagerechte, in brodelnder Bewegung begriffene, schwarze Grenze, die trotz ihrer Durchsetzung mit lotrechten, zitternden Strömungsschlieren überraschend scharf war.

Weiter wurden in ein Wassersäulchen von 6 mm Länge 5 cm Luft gepreßt. Bei 100 Atm. und Zimmertemperatur verschwand das Gas durch Absorption als zuletzt winziges Bläschen. Nach Steigerung des Druckes auf 300 Atm. begann die Heizung. Von 360° an bildeten sich wieder Bläschen, die bei 400° zu undurchsichtiger, flacher, brodelnder, aber scharfer Grenze zusammenflossen.

Drittens erwärmte ich das obere Ende einer unter 100 bis 300 Atm. stehenden, 6 cm hohen Säule rauchender Salzsäule bis auf 450° hinauf, und verfolgte die Vorgänge an diesem oberen U-Rohrende bei steigenden und fallenden Temperaturen. Es bewegten sich bei Druck und Temperaturänderungen mehrfach horizontale, brodelnde, schwarze Kügelchenschichten in ein oder anderer Richtung durch das vertikale unruhige Schlierengesichtsfeld des Fernrohres. Auch weit oberhalb der kritischen Temperatur des Wassers, welche nach den sorgfältigen Messungen von Holborn und Baumann1) zu 374° C sicher gestellt ist, in Übereinstimmung mit dem Versuche von Traube und Teichner.2) Die geringe Übersichtlichkeit der Erscheinungen beim Systeme HCl, H_2O läßt vielleicht an Mitwirkung des Ludwigschen Phänomens denken.

Leipzig, Januar 1924.

---

1) L. Holborn u. A. Baumann, Ann. d. Phys. 31. S. 966. 1910.
2) J. Traube u. G. Teichner, Ann. d. Phys. 13. S. 620. 1904.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

[illegible]
[illegible] [illegible]
[illegible] des Kanal-
[illegible] 328
[illegible] theorie . . 359
[illegible] der Schwere-
[illegible] . . 385
[illegible] in der Relativitäts-
[illegible] des Hrn. A. Wenzl . 397
[illegible] der Gleichung von
[illegible] . . . 403
[illegible] und den Druck
[illegible] Temperaturen . . 406
[illegible] des Wassers . . 409
[illegible] Wärmen, bei
[illegible] und ihres Dampfes 412
[illegible] druck . . . 416
[illegible] durch die
[illegible] . . . 426
[illegible] Methode zur Messung von
[illegible] Schwingungen . . . 427
[illegible] . . . 457
[illegible] des Viellinienspektrums des
[illegible] . . . 470
[illegible] zur Arbeit „Über die elektrische
[illegible] . . . 477

[illegible] von den umstehend genannten Herren [illegible] hat Herr Geh. Hofrat Prof. W. Wien [illegible] zu senden sind. Seine Adresse [illegible]

[illegible] druckfertig einzuliefern und in [illegible] den für sie verwendeten Raum nicht zu [illegible]

[illegible] besondere Bedingungen, [illegible]

[illegible] der Sonderabdrücke jeder Arbeit [illegible] werden, so muß dies [illegible] an die Druckerei auf deren [illegible] die Sonderabdrücke betreffen- [illegible] Verlagsbuchhandlung zu richten.

[illegible] die Annalen bestimmten Abhand- [illegible] der gesetzlichen Schutzfrist [illegible] und Verlagsbuchhandlung gestattet.

[illegible] sorgfältiger Ausführung den [illegible] beizulegen (nicht in das Manu- [illegible]). Da die Figuren fortan möglichst in den [illegible] ist die Stelle des Manuskriptes recht genau [illegible]

[illegible] auf den Seiten des Manuskriptes [illegible] und zwar möglichst in der in den „Fortschritten [illegible] mit Angabe des Namens und Vornamens, [illegible]

1924. № 5/6.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 73.

---

1. *Unendlichkeit des Raumes und allgemeine Relativitätstheorie;*

von Franz Selety.

Inhalt: I. Einsteins Einwände gegen die Unendlichkeit des Raumes. — 1. Einfachere Formulierbarkeit der Endlichkeit. — 2. Unwahrscheinlichkeit der mittleren Dichte Null. — 3. Das Machsche Prinzip. — II. Unendlichkeit des Raumes bei nichtquasistatischer Materieverteilung. — 1. Gründe für die Annahme nichtstatischer Materie. — 2. Ungleichmäßig quasieuklidische Räume. — 3. Nichtstatische, stabile molekularhierarchische Welten in ungleichmäßig quasiminkowskischen Mannigfaltigkeiten. — III. 1. Ein zentrisch-symmetrisches statisches Modell in einem ungleichmäßig quasieuklidischen Raum. — 2. Möglichkeit, darin die kleinen „Trägheitseffekte" zu summieren. — 3. Möglichkeit der Erfüllung des Machschen Prinzips in gewissem Sinne. — IV. Gründe für die Unendlichkeit des Raumes. — Zusammenfassung.

I. *Einsteins Einwände gegen die Unendlichkeit des Raumes.* — Am Ende der „Vier Vorlesungen"[1]) hat Einstein folgende Gründe gegen die räumliche Unendlichkeit der Welt und für ihre Endlichkeit geltend gemacht.

1. Vom Standpunkte der Relativitätstheorie ist die Bedingung der räumlichen Geschlossenheit viel einfacher als die der quasieuklidischen Struktur entsprechende Grenzbedingung im Unendlichen.

2. Der Gedanke Machs, daß die Trägheit auf Wechselwirkungen der Körper beruhe, ist in erster Näherung in den Gleichungen der Relativitätstheorie enthalten; aus ihnen folgt nämlich, daß die Trägheit mindestens zum Teil auf Wechselwirkung der Massen beruht. Es gewinnt dadurch der Machsche Gedanke sehr an Wahrscheinlichkeit, da die Annahme unbefriedigend ist, daß die Trägheit zum Teil auf Wechselwirkung, zum Teil auf selbständigen Qualitäten des Raumes beruhe. Dem Machschen Gedanken entspricht aber nur eine räumlich-geschlossene (endliche) Welt, nicht eine quasieuklidische, unendliche. Überhaupt ist es erkenntnistheoretisch befriedigender, wenn die mechanischen und metrischen Eigenschaften des Raumes vollständig durch die Materie bestimmt werden, was nur im Falle einer räumlich geschlossenen Welt der Fall ist.

---

1) A. Einstein, Vier Vorlesungen über Relativitätstheorie. Braunschweig 1922. S. 69f.

3. Eine unendliche Welt ist nur möglich, wenn die mittlere Dichte der Materie in der Welt verschwindet. Eine solche Annahme ist zwar logisch möglich, aber weniger wahrscheinlich als die Annahme, daß es eine endliche mittlere Dichte der Materie in der Welt gebe."[1])

Wir wollen nach dem ersten zunächst den dritten Punkt besprechen und den im Sinne **Einsteins** sicherlich wichtigsten, das **Machsche** Prinzip betreffenden, auf zuletzt lassen.

1. *Einfachere Formulierbarkeit der Endlichkeit.* — Bekanntlich hat die Raumzeitwelt nach der allgemeinen Relativitätstheorie genau genommen keine einfache Struktur. Die Aussage über ihre Beschaffenheit im großen ist eine Approximation, ähnlich wie die Darstellung der Erdoberfläche durch das Geoid. Beim Vergleich der größeren oder geringeren Einfachheit verschiedener Annahmen über die Welt im großen muß man nun natürlich *Gleiches mit Gleichem* vergleichen, also entweder in beiden Fällen die tatsächlich angenommenen „gerunzelten" Mannigfaltigkeiten oder in beiden die Approximationen heranziehen. Handelt es sich um den Vergleich der größeren oder geringeren Einfachheit der mathematischen Darstellung zweier verschiedener Annahmen, dann muß auch jede der beiden Darstellungen ihr System mit gleicher Vollständigkeit und auf gleiche Weise (sei es allgemein kovariant oder anders) bestimmen.

Wenn man nun zunächst die idealen Approximationen miteinander vergleicht und fragt, ob eine exakte Minkowskiwelt oder eine „Zylinderwelt" eine geometrisch einfachere Mannigfaltigkeit sei, so kann es kein Zweifel sein, daß es die erstere ist. Oder, wenn wir bloß die dreidimensionalen Räume vergleichen, dann ist sicherlich ein euklidischer Raum einfacher als einer mit positivem Krümmungsmaß. Was nun aber für die „glatten" Mannigfaltigkeiten gilt, das gilt auch, wenn man an ihre Stelle die entsprechenden „gerunzelten" setzt. Eine etwas gerunzelte Ebene ist ebenfalls einfacher als eine gerunzelte Kugelfläche und ebenso ist ein quasieuklidischer Raum einfacher als ein quasisphärischer oder quasielliptischer.

Ja, es besteht hier sogar der folgende Unterschied. Wenn man die Mannigfaltigkeiten *mit* ihren „Runzeln" betrachtet, dann ist jedenfalls (abgesehen von den Unterschieden der entsprechenden regelmäßigen Mannigfaltigkeiten) jene die einfachere, die im ganzen von der zu ihr gehörigen *regelmäßigen weniger* abweicht. Nun sind aber im quasieuklidischen Raum alle „Runzeln“ unendlich klein im Verhältnis zur Größe der Gesamtmannigfaltigkeit, im quasisphärischen stehen sie zu dieser im endlichen Verhältnis. Es besteht also schon deshalb größere Einfachheit des quasieuklidischen Raumes, weil er seinem einfachen idealen Vorbilde im ganzen näher steht als der quasisphärische dem seinigen. Dazu kommt dann noch, wie erwähnt, daß das euklidische Vorbild selbst einfacher ist als das sphärische.

---

[1]) Früher (S. 69) erklärte dies **Einstein** für „unwahrscheinlich".

Einstein sagt, daß in der Sprache der allgemeinen Relativitätstheorie die Formulierung der Quasieuklidizität weniger einfach sei als die der räumlichen Geschlossenheit. Bei der ersten müssen die Komponenten des Riemannschen Tensors vierten Ranges R_{iklm} im Unendlichen gleich Null gesetzt werden, was 20 unabhängige Bedingungen erfordert, während die „Geschlossenheitsbedingung“ viel einfacher sei.[1]

Dabei wird aber nicht Gleiches mit Gleichem verglichen. Natürlich kann es nicht weniger Bedingungen erfordern und einfacher sein, die Metrik einer exakten Zylinderwelt als die einer exakten Minkowskiwelt in *allgemein kovarianter Form vollständig* zu formulieren. Für das erste muß der Tensor R_{iklm} überall Null gesetzt werden, für das zweite wäre eine noch weniger einfache *allgemein kovariante* Darstellung notwendig. Wenn die mathematische Darstellung der Zylinderwelt einfacher *scheint*, so rührt dies daher, weil dabei eine Zerlegung in Raum und Zeit zugrunde gelegt wird. Auf Grund dieser *nicht allgemein kovarianten* Darstellung und mit Hinzufügung von $g_{4i} = 0$ $(i = 1,2,3)$ ist die Zylinderwelt (abgesehen von den Zusammenhangsverhältnissen) durch die *zehn* Bedingungen bestimmt:

$$R_{ik} = \text{const}\ (i, k = 1, 2, 3) \quad R_{\mu 4} = 0\ (\mu = 1, 2, 3, 4).$$

Ebenso ist aber *dann* die Minkowskiwelt durch die zehn Bedingungen $R_{\mu\nu} = 0$ dargestellt.

Beim Vergleich *gleichartiger* Darstellungen kann also die exakte Zylinderwelt nicht einfacher mathematisch zu beschreiben sein als die exakte Minkowskiwelt. Nur wenn man bei der einen eine allgemein kovariante Formulierung anwendet, bei der anderen aber von den Vorteilen einer bestimmten Darstellung Gebrauch macht, kann sich ein scheinbarer Vorzug der Zylinderwelt ergeben.

---

[1] A. Einstein, Vier Vorlesungen, S. 64, 67.

Was nun aber die *approximative* Darstellung der tatsächlich angenommenen Mannigfaltigkeiten anlangt, so hat Einstein in den „Vier Vorlesungen“ ebenso wie in ähnlicher Weise schon früher[1]) auf das Unbequeme der „Grenzbedingungen“ im unendlichen Raume hingewiesen. Diese bedeuten aber für den unendlichen Raum im wesentlichen dasselbe wie die approximative Darstellung für den endlichen. Wenn der Raum durch Grenzbedingungen als „im Unendlichen euklidisch“ (nämlich gleichmäßig, vgl. Abschnitt II 2) dargestellt wird, so heißt dies vor allem, daß der gesamte Raum *approximativ* euklidisch ist. Wie schon erwähnt, ist er dies dann freilich mit unendlich größerer Annäherung als der sphärische approximativ sphärisch ist. Für die mathematische Darstellung ist es aber sogar einfacher, die approximative Struktur des wirklichen Raumes durch Grenzbedingungen festzulegen als zuerst eine schematische Mannigfaltigkeit mathematisch zu formulieren und dann erst mit Worten hinzuzufügen, daß dies bloß eine Approximation sei.

Überdies kommt noch hinzu, daß wir zur vollständigen Bestimmung der Zylinderwelt oder auch der approximativen Zylinderwelt wissen müssen, ob der dreidimensionale geschlossene Raum den *Zusammenhangsverhältnissen* nach sphärisch oder elliptisch sei. Dies läßt sich aber durch die Tensoren überhaupt nicht formulieren. Es läßt sich also nicht bloß die Welt mit geschlossenem Raume durch die charakteristischen mathemathischen Hilfsmittel der allgemeinen Relativitätstheorie nicht einfacher formulieren als die Minkowskiwelt, sondern ein wichtiger Grundzug jener läßt sich durch diese Hilfsmittel *überhaupt nicht* ausdrücken.

Wenn man also stets Gleiches mit Gleichem vergleicht, allgemein kovariante Darstellung mit allgemein kovarianter Darstellung, vollständige Beschreibung mit vollständiger Beschreibung, Darstellung des idealen Schemas oder der im kleinen nicht regelmäßigen Mannigfaltigkeit mit der Darstellung des *analogen* Gebildes auf der anderen Seite: dann gilt gewiß für die mathematische Formulierung dasselbe wie für die unmittelbare Beurteilung: *eine exakte oder approximative Minkowskiwelt ist einfacher als eine exakte oder approximative Zylinderwelt.*

---

[1]) A. Einstein, Vier Vorlesungen, S. 67. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie, Berliner Ber. S. 147. 1917.

2. *Unwahrscheinlichkeit der mittleren Dichte Null.* — Einstein erklärte es für unwahrscheinlich, daß die mittlere Dichte im unendlichen Raume Null sei. Wenn ihr Vorhandensein zur Folge hätte, daß die Gesamtmasse im unendlichen Raume endlich sei, so würde der Verf. ohne weiteres zustimmen. Zu einem unendlichen Raume paßt gewissermaßen nicht eine endliche Gesamtmasse. Mittlere Dichte Null und unendliche Masse sind aber vereinbar. Wenn es ferner notwendig wäre, daß bei mittlerer Dichte Null unendliche Gebiete des Raumes absolut leer seien, so wäre dies auch ein erwägenswertes Bedenken. Nun ist es aber mit der mittleren Dichte Null vereinbar, daß der Raum kontinuierlich mit Materie erfüllt ist, derart, daß in jedem Punkte eine bestimmte endliche Dichte herrscht. Wenn schließlich bei mittlerer Dichte Null ein ausgezeichnetes Mittelgebiet der unendlichen Welt vorhanden sein müßte, so ließe sich dies auch nach Ansicht des Verf.s als Einwand geltend machen. Nun ist aber die „molekularhierarchische" Welt nicht bloß unendlich an Masse und nicht kugelsymmetrisch (was offenbar ist), sondern es muß in ihr, wie Verf. bewiesen hat, auch im strengsten Sinne kein ausgezeichnetes Mittelgebiet vorhanden sein.[1]) Dann ist aber die mittlere Dichte Null nicht mehr unwahrscheinlich.

Im Gegenteil, es scheint dem Verf., daß eine mittlere endliche Dichte mit im Mittel konstanter Größe der Sternabstände zu einem euklidischen Raume und der Relativität der Größe in ihm schon aus allgemeinen Gründen weniger gut paßt als die mittlere Dichte Null. Denn anderenfalls liegt ja hier eine Auszeichnung einer absoluten Längenkonstante vor.

Insbesondere der molekularhierarchische Aufbau paßt zu der Größenrelativität des euklidischen Raumes. Das molekularhierarchische System, in dem die mittlere Dichte unbedingt Null sein *muß*, empfiehlt sich u. E. derart, daß für eine unendliche Welt ein anderes nicht in Betracht kommt. Einerseits ist es im Grunde genommen von größter Einfachheit und Harmonie, andererseits findet es starke empirische Stützen (so starke, wie eine Hypothese über die Beschaffenheit einer unendlichen Welt überhaupt finden kann) in den empirisch bekannten Stufen der Materiegliederung.

---

[1]) F. Selety, Beiträge zum kosmologischen Problem. Ann. d. Phys. 68. S. 308—312. 1922.

Schon aus allgemeinen theoretischen und empirischen Gründen scheint uns also das *molekularhierarchische System mit der mittleren Dichte Null* allein zu einem unendlichen Raum zu passen. Dazu kommt, daß auch schon vor der Relativitätstheorie die Olbersschen und Seeligerschen Schwierigkeiten wegen Licht und Gravitation die mittlere Dichte Null nahe legten. Das Bedenken gegen diese einfache Folgerung und das Suchen nach anderen Auswegen entstammte den Meinungen, daß dadurch die Existenz absolut leerer Räume oder (wie oft zu lesen ist) Endlichkeit der Gesamtmasse oder doch wenigstens kugelsymmetrisch abnehmende Dichte und Auszeichnung eines Mittelpunktes der Welt gefordert werde.[1]) Es ist also wohl, selbst abgesehen von der allgemeinen Relativitätstheorie, kaum daran zu zweifeln, daß, falls die Welt unendlich ist, ihre mittlere Dichte Null ist. Wenn man also nicht als petitio principii die Unendlichkeit des Raumes für unwahrscheinlich hält (ohne sie ist die mittlere Dichte Null natürlich unmöglich), so ist kein Grund, warum die mittlere Dichte Null an sich unwahrscheinlich sein und dadurch die Unendlichkeit des Raumes unwahrscheinlich machen sollte.

Übrigens schrieb Einstein in den Bemerkungen zu meiner Arbeit „Beiträge zum kosmologischen Problem“, daß „die Hypothese vom molekularhierarchischen Charakter des Aufbaues der Sternenwelt vom Standpunkte der Newtonschen Theorie manches für sich hat“[2]), woraus vielleicht zu schließen ist, daß er die mittlere Dichte Null nicht mehr als einen selbständigen Gegengrund gegen die Unendlichkeit des Raumes betrachtet.

---

1) Im Sinne der letzteren Annahme schrieb Einstein, daß die materielle Welt nach der Newtonschen Theorie jedenfalls endlich sei, wenn auch ihre Gesamtmasse unendlich sein kann. Berliner Berichte S. 143. 1917.

2) A. Einstein, Ann. d. Phys. **69**. S. 436. 1922.

3. *Das Machsche Prinzip.* — Wir kommen nun zu dem Haupteinwand **Einsteins** gegen die Unendlichkeit des Raumes: das „**Machsche** Prinzip“. Wir wollen gleich von Anfang an zugestehen, daß die in diesem Zusammenhange angeführten Gründe **Einsteins** in der Tat in summa zeigen, daß die Hypothese des endlichen Raumes vom Standpunkte der allgemeinen Relativitätstheorie einige Vorzüge besitzt. Es fragt sich jedoch, ob man diese als entscheidend ansehen muß.

Einstein hat das „**Machsche** Prinzip“ dahin formuliert, daß das G-Feld (der durch den Fundamentaltensor bestimmte Raumzustand) restlos durch die Massen der Körper (d. h. durch den $T_{\mu\nu}$-Tensor) bestimmt sei.[1] Neuestens hat **Einstein** von dem **Machschen** Postulat gesprochen, daß die Trägheitswirkung des einzelnen Körpers durch die Gesamtheit der übrigen im gleichen Sinne bestimmt sein soll wie seine Gravitationskraft.[2]

Der Verf. hat früher ausgeführt[3], daß selbst weniger weitgehende Auffassungen der **Machschen** Gedanken nichts erkenntnistheoretisch Notwendiges enthalten, daß sich *erkenntnistheoretisch* (im üblichen Sinne) nicht einmal gegen die richtig verstandene klassische Mechanik etwas einwenden läßt. A fortiori kommt also dem **Machschen** Prinzip **Einsteins** keine erkenntnistheoretische Notwendigkeit zu.[4] Es handelt sich jedenfalls beim „**Machschen** Prinzip um eine nicht zwingende *Hypothese.*

Daß in einer unendlichen Welt das G-Feld nicht durch den $T_{\mu\nu}$-Tensor bestimmt sein kann, ist sicher. Aber es fragt sich eben, ob man an dieser Hypothese wirklich festhalten muß. Einstein weist besonders auf gewisse, aus seiner Theorie folgende Gravitationseffekte hin, die sich als Analoga der Trägheit auffassen lassen. Aber auch wenn man in der unendlichen Welt die Trägheit im engeren Sinne der Gravitation im engeren Sinne gegenüberstellt, sind diese Effekte nichts Unbegreifliches.

---

[1] A. **Einstein**, Ann. d. Phys. **55.** S. 241. 1918.

[2] A. **Einstein**, Ann. d. Phys. **69.** S. 437. 1922.

[3] F. **Selety**, Ann. d. Phys. **68.** S. 313ff. 1922. Vgl. **72.** S. 62. 1923.

[4] Es scheint freilich, daß **Einstein** den Ausdruck „erkenntnistheoretisch“ in einem anderen Sinne als dem gewöhnlichen versteht. Verf. will hier nicht näher darauf eingehen, daß wohl mehrfach dort, wo **Einstein** von „erkenntnistheoretisch“ spricht, andere Ausdrücke, wie „naturphilosophisch“ oder „nach allgemeinen hypothetischen Überlegungen“ usw. besser passen würden. Dies führt vielfach zu Mißverständnissen. Daß **Einstein** selbst bei etwas „Erkenntnistheoretischem“ nicht etwas Zwingendes (a priori Gewisses) im Auge hat, sieht man daraus, daß er z. B. von „erkenntnistheoretisch befriedigender“ spricht (Vier Vorlesungen, S. 70).

Am wenigsten Gewicht ist u. E. auf das „Wachsen" der trägen Masse bei Benachbartheit von großen Massen zu legen. Da die Energiedichte die Dimension $m\,l^{-1}\,t^{-2}$ hat, so folgt einfach aus ihrer Invarianz die Abhängigkeit gewissermaßen unserer Massenkoordinate von den gewählten Raum- und Zeitkoordinaten. Vom Standpunkte der allgemeinen Relativitätstheorie liegt dabei eigentlich ebensowenig eine Änderung der natürlichen Massengröße wie der natürlichen Raum- und Zeitgrößen vor. Nur im *Koordinatensystem* entsprechen den natürlichen Einheiten jetzt nicht immer Einheitsdifferenzen der Raum- und Zeitkoordinate und der (im übertragenen Sinne) „Massenkoordinate". Mehr muß man darin nicht suchen.

Daß die Größe des Normalwertes der trägen Masse (die einer bestimmten Menge von Materie bzw. Energie dort zukommt, wo die Koordinateneinheiten mit den natürlichen Maßstabs- und Uhreneinheiten übereinstimmen) durch die Massen der Welt bestimmt werde, hat keinen Sinn, weil keine denkbare Vergleichsmöglichkeit vorliegt, daß derselben Menge Energie in verschiedenen Welten ein mehr oder weniger großer Normalwert der trägen Masse zukommen könnte. Es gibt ja kein anderes Maß für den Normalwert der trägen Masse als die Menge der Materie oder Energie, denn mißt man die träge Masse durch die Energie, die notwendig ist, um einem Körper eine bestimmte Geschwindigkeit zu erteilen, so wird ja wieder das gewählte Einheitsmaß für jene Energie zugrunde gelegt. Darum scheint es dem Verf., daß eine Bestimmung der *Größe* der trägen Masse durch die Massen der Gesamtwelt, in analoger Weise wie die jener Abweichungen durch lokale Massen, auch in der endlichen Welt etwas Undenkbares ist. Es scheint ihm daher, daß jenes „Wachsen" der trägen Masse durch benachbarte Massen nicht geeignet ist, zu einem Vergleiche herangezogen zu werden.¹)

---

¹) Als natürliche Einheit für die Menge der Energie und den Normalwert der trägen Masse empfiehlt sich besonders jene, die durch Einsetzen

Daß ferner Beschleunigungen und Rotationen in der Nähe befindlicher Massen Beschleunigungs- und Rotationsfelder erzeugen, ist auch dann nichts Unbegreifliches, wenn man im unendlichen Raume das Trägheitsfeld doch als etwas suis generis ansieht. Jene Effekte wären dann eben als besondere Art von *Gravitationseffekten* aufzufassen; man ist durch die vorliegenden *Analogien nicht gezwungen*, sie mit der Trägheit im engeren Sinne in Parallele zu setzen (wenn auch wegen des Äquivalenzprinzips der *lokale* Beobachter diese wie andere Gravitationsfelder von dem kosmischen Trägheitsfeld nicht unterscheiden kann). Es gibt ja auch *elektromagnetische* Effekte, mit denen sich jene Gravitationseffekte in mancher Hinsicht vergleichen lassen.[1] |

Einstein wendet sich gegen die „dualistische Auffassung" von der Bestimmung der physikalischen Eigenschaften des Raumes.[2] Ein gewisser Dualismus in dieser Hinsicht, bzw. von „Trägheit" und „Gravitation" wäre in der unendlichen, quasieuklidischen Welt allerdings vorhanden, aber in gewissem (wenn auch nicht ganz dem gleichen) Sinne auch in einem endlichen Raume. Auch in diesem läßt sich in der Abstraktion das durch die *durchschnittliche* Materieverteilung erzeugte Feld von den durch die tatsächlichen *Ungleichmäßigkeiten* bewirkten Modifikationen trennen und das erstere als „Trägheitsfeld", die Abweichungen davon als „Gravitationsfeld" bezeichnen. In der unendlichen Welt würde ein *Teil* der einem Körper (in einem bestimmten Koordinatensysteme) zugeschriebenen „trägen Masse" seine eigentliche „träge Masse" sein, ein anderer würde

---

des $\varkappa$ der **Einsteinschen** Feldgleichungen gewonnen wird. Man denkt sich nun bisweilen, daß die Größe der Masse in der endlichen Welt insofern durch die Massen der Gesamtwelt bestimmt werde, als die Gravitationskonstante in Abhängigkeit von der Gesamtmenge der Materie und der mittleren Dichte stehe. **Eddington** findet dies „bewildering" (A. S. **Eddington**, Space, Time and Gravitation, S. 163); u. E. mit Recht. Jedenfalls zeigt sich bei einer solchen „Bestimmung" der Massengröße durch die Masse der Gesamtwelt keine Analogie zu der oben besprochenen Beeinflussung der trägen Massen durch lokale Massenanhäufungen.

[1] Z. B. die Rotation einer Metallplatte, die durch einen parallel zu ihr rotierenden Magneten veranlaßt wird. Der Verf. verkennt natürlich nicht den (wegen des Äquivalenzprinzips) bei dem Gravitationseffekt vorliegenden Unterschied.

[2] A. **Einstein**, Vier Vorlesungen, S. 64.

von den umgebenden Massen abhängen und es bestünde kein allgemeines Gesetz über das Verhältnis der Größen der beiden Bestandteile. Ebenso wäre es aber auch in der endlichen Welt, auch hier würde ein Körper in der Nähe von Massenanhäufungen (in unserem Koordinatensystem) einen Überschuß von träger Masse zeigen und es bestünde kein allgemeines Gesetz, welcher Bruchteil der beobachteten Masse in jedem Einzelfall dem Normalwert und welcher der Abweichung zuzuschreiben wäre. *In gewissem Sinne* würde auch hier ein Dualismus vorliegen.

Darauf läßt sich erwidern, daß hier der „Dualismus" zwischen „Trägheit und Gravitation" doch einen anderen Sinn habe, weil auch das Trägheitsfeld durch die Materie bestimmt sei, während dies in der unendlichen Welt nicht der Fall sei. (Eine Bestimmung der trägen Masse der *Größe* nach, hat, wie wir sahen, auch in der endlichen Welt keinen Sinn.) Aber bis zu einem gewissen Grade ist doch eine *Zuordnung* zwischen dem Trägheitsfeld und der Materieverteilung in der unendlichen Welt möglich, wenn auch jenes durch diese sicherlich nicht vollständig bestimmt ist. Es ist dann jedoch die Frage, ob man nicht eine solche *Zuordnung* als *ausreichend* ansehen kann.

Es wäre auch nach Ansicht des Verfassers sehr *unbefriedigend* (wenn auch nicht erkenntnistheoretisch unmöglich), wenn die Gesamtmaterie der Welt gegenüber den Inertialsystemen (bzw. ihren Analogen in der quasiminkowskischen Welt) im Durchschnitt eine *Rotation* hätte. Wenn dies *tatsächlich nicht* der Fall ist, dann fällt u. E. ein Hauptbedenken fort. Mach selbst hat sich ja auch im allgemeinen mit einer Hypothese begnügt, die jene Rotation ausschließt.

Einstein vermutete, bevor er zu der Annahme der Endlichkeit des Raumes gelangte, daß die träge Masse im Unendlichen verschwinden müsse. Steht man auf dem Standpunkte, daß die Trägheit irgendwie in einer Beziehung zur Materie und ihrer Verteilung steht, so könnte man es in der Tat unbefriedigend finden, wenn die Gesamtmasse der Welt endlich, das Trägheitsfeld im unendlichen Raume aber überall gleichartig wäre. Anders steht es aber damit auch bei mittlerer Dichte Null, wenn die Gesamtmasse *unendlich* ist. Dies gilt sogar bei kugelsymmetrischer Verteilung der Materie. Jeder

Punkt im Raume hat dann natürlich eine bestimmte endliche Entfernung von dem Mittelpunkte. Es ist nun zu beachten, daß, wie weit auch immer ein Punkt von dem Mittelpunkt entfernt ist, er im wesentlichen gleichartig von *unendlichen Massen konzentrisch umgeben* ist. Nehmen wir an, der Punkt P habe den Abstand r vom Mittelpunkt. Betrachten wir nun einen Radius R, der sehr groß gegen r ist, so liegt der Punkt in bezug auf die *unendliche*, außerhalb der Kugel mit dem Radius R befindliche Masse immer fast konzentrisch und in der „Nachbarschaft“ vom Mittelpunkt, wie groß auch immer das zuerst gewählte r ist. Wenn man dies beachtet, dann erscheint es sogar bei kugelsymmetrischer Materieverteilung nicht mehr paradox, wenn das Trägheitsfeld in der unendlichen Welt überall gleichartig ist. Alle Punkte haben ja in einer unendlichen Welt mit unendlicher Masse relativ zu den *unendlichen* Massen sogar bei kugelsymmetrischer und natürlich erst recht bei molekularhierarchischer Materieverteilung im wesentlichen die *gleiche* Lage und nur relativ zu *endlichen* Massen eine in Betracht kommende Weise verschiedene.

Analog wie nun in der endlichen Welt eine Zerlegung des G-Feldes in das durch die durchschnittliche, gleichmäßig verteilte Materie und in das durch lokale Ungleichmäßigkeiten bedingte möglich ist, so mag man sich vorstellen, daß in einer unendlichen Welt mit unendlicher Masse das *Trägheitsfeld der unendlichen Gesamtmasse mit der mittleren Dichte Null zugeordnet* ist.

Der Verfasser verkennt freilich nicht, daß hier ein Unterschied vorliegt. Die Auffassung, daß in der unendlichen Welt die unendliche Gesamtmasse (mit der mittleren Dichte Null) die Bedingung für das Vorhandensein des Trägheitsfeldes sei, wird durch die Gleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie nicht verlangt. Die Gleichungen lassen auch zu, daß im unendlichen Raume nur eine endliche Menge von Materie vorhanden sei, ja sogar, daß er vollkommen leer sei. Dagegen ist bekanntlich in der Zylinderwelt (auf das Problem der De Sitterschen Welt gehen wir hier nicht ein) das Dasein einer endlichen mittleren Materiedichte notwendig. Aber man kann sich doch folgende Vorstellung machen:

Wenn nur eine endliche Menge von Materie in der Welt vorhanden ist, dann ist der Raum endlich und die Materie ist mit endlicher Dichte verteilt, nur wenn die Gesamtmasse unendlich ist, ist auch der Raum unendlich. Die unendliche Masse (mit der mittleren Dichte Null) ist die Bedingung für das Vorhandensein des unendlichen Raumes und des in ihm vorhandenen Trägheitsfeldes. Man kann sich die zunächst endlich gedachte Gesamtmasse und den zu ihr gehörigen endlichen Raum immer mehr vergrößert denken. Dazu nimmt bekanntlich die mittlere Dichte wie $1/R^2$ (R der Krümmungsradius des Raumes) ab. Man denke sich nun den *Grenzübergang* zur unendlichen Masse und zum unendlichen Raum vollzogen, dann wird auch die mittlere Dichte Null. Natürlich sind dies alles Fiktionen, „die Welt ist nur einmal da", aber diese Fiktionen können dazu dienen, das eventuell tatsächliche Zusammenbestehen von unendlichem Raum und unendlicher Masse zu illustrieren und zu zeigen, daß zwar ein unendlicher Raum mit seinem Trägheitsfeld nicht zu einer endlichen Masse paßt, wohl aber zu einer unendlichen.

Mathematisch läßt sich diese Zuordnung ebenfalls einfach formulieren, indem man die Gleichungen für einen endlichen Raum mit endlicher Masse aufstellt und davor für irgendeinen Parameter p, der mit wachsendem Raum und Masse gegen ∞ oder 0 strebt, $\lim\limits_{p=\infty}$ oder $\lim\limits_{p=0}$ schreibt. (Vor die von Einstein jetzt aufgegebene Gleichung mit „λ-Glied" wäre also $\lim\limits_{\lambda=0}$ zu schreiben.) Damit ist in einfacher Weise zum Ausdruck gebracht, daß Raum und Masse in Zusammenhang miteinander unendlich sind und die mittlere Dichte Null ist. Krümmungsradius, Gesamtmasse und mittlere Dichte sind dann in analoger Weise wie in der endlichen Welt einander zugeordnet.

Ob alle diese Betrachtungen geeignet sind, mit der Annahme eines unendlichen Raumes auszusöhnen, mag von der individuellen Auffassung abhängen. Ich betone nochmals, daß ich nicht behaupten will, daß in der quasieuklidischen Welt das „Machsche Prinzip" im Sinne Einsteins erfüllt sei. Das G-Feld ist in der *unendlichen* Welt sicherlich *nicht* durch den $T_{\mu\nu}$-Tensor bestimmt und wenn man das letztere fordert und es überhaupt erfüllbar ist, dann muß man die Endlichkeit annehmen.

Es bleibt aber noch die Möglichkeit, daß jene Forderung auch in der endlichen Welt nicht erfüllt ist. Bei völlig gleichmäßiger Materieverteilung ist sie erfüllt, ob aber auch bei der tatsächlich vorhandenen oder bei jeder möglichen ungleichmäßigen ist fraglich. Dies gilt auch für die Feldgleichung mit λ-Glied.1) Für diese wäre aber die Erfüllung jener Forderung eher zu erwarten als für die ursprüngliche. Wie **Einstein** selbst gesagt hat, ist die Feldgleichung mit λ-Glied äquivalent der Annahme eines überall konstanten negativen Druckes von der Größe λ.2) Später kehrte **Einstein** zu der ursprünglichen Form der Feldgleichung ohne λ-Glied zurück und der nunmehr als etwas physikalisch Reales angenommene Unterdruck wird von ihm jetzt, wie es scheint, ebenso wie die Massendichte als örtlich variabel und nur im Mittel gleich p angesehen.3) Es ist nun klar, daß es bei völlig konstantem p viel wahrscheinlicher ist, daß das G-Feld durch den $T_{\mu\nu}$-Tensor bestimmt sei. Bei vollkommen ruhender Materie ist es dann für die räumlichen g_{ik}, wie schon elementar ersichtlich, ohne Zweifel der Fall, denn es ist dann einfach: $g_{ik} = T_{ik} \cdot \text{const.}$ Das konstante p oder λ in Verbindung mit den T_{ik} (der ursprünglichen Feldgleichung) spannt dann gewissermaßen ein starres Koordinatennetz mit Maßbestimmung aus.4)

Ob aber, wenn p ebenso wie die Dichte örtlich variabel ist, die $g_{\mu\nu}$ durch die $T_{\mu\nu}$ allein völlig bestimmt seien, ist viel fraglicher.5)

---

1) Vgl. W. **Pauli** jr., Enzyklopädie d. math. Wiss. 5. 2. Heft 4. S. 747. 1921.

2) A. **Einstein**, Physik. Zeitschr. 19. S. 166. 1918.

3) A. **Einstein**, Vier Vorlesungen, S. 68f. Vgl. auch E. **Schrödinger**, Physik. Zeitschr. 19. S. 20. 1918, der jedoch dem p eine andere physikalische Bedeutung gab.

4) Auch in der kürzlich erschienenen Arbeit **Laues** (M. v. **Laue**, Berliner Berichte phys.-math. Kl. S. 27, 1923), in der eine strenge Lösung für eine endliche Welt mit ungleichmäßig verteilter Masse mit leeren Hohlräumen gegeben wird, werden die Feldgleichungen mit konstantem λ zugrunde gelegt.

5) Falls man *mehr* Größen als die $T_{\mu\nu}$ zur Charakterisierung der Materie heranzieht, dann kann natürlich das G-Feld *jedenfalls* durch die „Materie“ bestimmt sein. Dies gilt dann auch für die *unendliche* Welt, da auch in dieser der Raum nirgends völlig leer zu sein braucht und, wenn man die Strahlungsenergie als kontinuierlich verteilt betrachtet, auch tatsächlich nirgends völlig leer sein wird. Wenn wir z. B. ruhende

Es ist sicherlich richtig, daß sich auf Grund der Einsteinschen Gravitationstheorie mannigfache Unterschiede zwischen der endlichen und unendlichen Welt ergeben. Wir haben einen von ihnen schon erwähnt, daß nämlich auf Grund der Feldgleichungen eine Minkowskiwelt, aber nicht eine Zylinderwelt ohne Materie denkmöglich ist. Aber, wie wir gesehen haben, kann man ohne Schwierigkeit ein Gesetz formulieren, aus dem folgt, daß der Raum ohne Materie überhaupt nicht vorhanden, bei endlicher Gesamtmasse endlich und nur bei unendlicher unendlich ist. Es bleibt auch dann *jedenfalls* der physikalische Unterschied zwischen der unendlichen und endlichen Welt bestehen, daß sich in ersterer das G-Feld bei weitgehender Variation der Massenverteilung im ganzen recht *ähnlich* (völlig gleich natürlich nicht) bleiben kann, während dies in der endlichen Welt nicht der Fall ist.[1] Falls das Machsche Prinzip (in dem besprochenen Sinne der Bestimmung der $g_{\mu\nu}$ durch die $T_{\mu\nu}$) auch in der endlichen Welt mit ungleichmäßiger Dichte nicht erfüllt sein sollte, würde sich dann der Unterschied in dem Verhältnis des G-Feldes zum $T_{\mu\nu}$-Tensor auf den soeben genannten reduzieren. Ob diese Differenz ein entscheidendes Motiv für die Annahme der Endlichkeit der Welt wäre, bliebe Auffassungssache.

II. *Unendlichkeit des Raumes bei nichtquasistatischer Materieverteilung.* — In der endlichen Welt Einsteins herrscht eine quasistatische Materieverteilung. Wenn der Raum quasi-

---

Materie und für den $T_{\mu\nu}$-Tensor die Gestalt annehmen, den er nach Einstein für die endliche Welt hat, dann ist:

$$T_{ik} = -g_{ik}\,p \quad (i, k = 1, 2, 3); \quad T_{44} = g_{44}(\sigma - p).$$

Wenn wir dann etwa die *zwölf* Größen $T_{\mu\nu}$, σ, p als die „Materie" charakterisierend ansehen, dann sind damit die $g_{\mu\nu}$ an jeder Stelle schon in trivialer Weise und ohne Heranziehung der Feldgleichung „durch die Materie bestimmt" und zwar sowohl in einer unendlichen wie in einer endlichen Welt. Es ist dies freilich nicht das, was Einstein im Auge hatte, aber erkenntnistheoretisch oder überhaupt in einem allgemeinen Sinne betrachtet, ist es u. E. ebenfalls befriedigend. Auch dann stehen die räumlichen Beziehungen in Abhängigkeit vom materiellen Weltinhalt, in dem Sinne, in dem das letztere tatsächlich erkenntnistheoretisch notwendig ist.

1) In dieser Weise läßt sich der Sachverhalt vielleicht auch zum Ausdruck bringen, der mit „Unabhängigkeit der Trägheit von der Materieverteilung in der unendlichen Welt" bezeichnet wird.

euklidisch (im bisherigen Sinn), die Materie molekularhierarchisch verteilt ist und die einzelnen Systeme n-ter Ordnung sich durchschnittlich in dem nächsthöheren System im mechanischen Gleichgewicht befinden, dann verlangt die allgemeine Relativitätstheorie, daß auch eine solche unendliche Welt nicht völlig unstatisch sei. Vollkommen unstatische Materie in einer Minkowskischen oder quasiminkowskischen Welt erfordert, daß die mittlere Relativgeschwindigkeit aller Körper gleicher Größenordnung, etwa der Sterne der ganzen Welt, gleich c sei. Dies ist aber nur dann mit der Bedingung der mechanischen Stabilität der molekularhierarchischen Welt vereinbar, wenn die Potentialdifferenz gegen das Unendliche unendlich ist. Das letztere widerspricht jedoch nach der allgemeinen Relativitätstheorie der Definition des quasieuklidischen Raumes, denn nach dieser muß ein Koordiantensystem möglich sein, derart, daß die $g_{\mu\nu}$ überall nur wenig (oder jedenfalls nur um Beträge unterhalb eines bestimmten) von ihren Minkowskischen Normalwerten $\delta_{\mu\nu}$ abweichen.

Der Verf. hat ausgeführt, daß eine vollkommen unstatische, molekularhierarchische Welt denkmöglich und der Erfahrung nicht widersprechend ist. Er hat dargelegt, daß Unendlichkeit der Potentialdifferenz diesen Bedingungen genügt¹) und daß dies auch für mittlere Relativgeschwindigkeit aller Sterne der Welt gleich c gilt.²) Das erste ist nichts prinzipiell Unmögliches und widerspricht nicht der Kleinheit der beobachteten Sterngeschwindigkeiten, da Körper, die aus großen Entfernungen in ein endliches System eindringen, auch bei unendlicher Potentialdifferenz genügend selten auftreten können, wie sich besonders deutlich aus der Theorie der isothermen Gaskugel ergibt. Das zweite ist ebenfalls möglich, da es nicht im Widerspruche damit steht, daß die Relativgeschwindigkeit je zweier beliebiger Körper in jedem Einzelfall kleiner als c ist und daß die Relativgeschwindigkeit der Systeme n-ter Ordnung, die zu demselben System $n+1$-ter Ordnung gehören (z. B. der Sterne im Milchstraßensystem) klein gegen c sei.

---

1) **F. Selety**, Ann. d. Phys. **68.** S. 291—295. 1922.

2) **F. Selety**, a. a. O., S. 328—331. [Im darauf Folgenden, S. 331 f., sind der drittletzte (inkl. der Fußnote) und vorletzte Absatz der Abhandlung mehrfach mangelhaft und zu streichen.]

1. *Gründe für die Annahme nicht-statischer Materie.* — Der Verf. hat bereits früher zu begründen versucht, daß die Annahme einer nichtstatischen Materie besser zur speziellen Relativitätstheorie und zur Union von Raum und Zeit passe als die einer quasistatischen, da die letztere die Auszeichnung einer Zeit bedeutet.1) Der Verf. möchte nochmals seine Auffassung zu erläutern versuchen.

Es ist natürlich nicht undenkbar, daß es allerlei materielle Auszeichnungen im dreidimensionalen Raume gebe. Es könnte einen ausgezeichneten Punkt (Mittelpunkt) oder Quasipunkt (Mittelgebiet) geben. Es könnte eine ausgezeichnete Linie oder Richtung oder Fläche vorhanden sein. Das letztere ist in unserem Milchstraßensystem bekanntlich der Fall und es scheint (nach Shapley), daß die Auszeichnung der galaktischen Ebene sich auch über unser engeres Fixsternsystem hinaus erstreckt. Es wäre *nicht denkunmöglich*, daß eine solche ausgezeichnete *Ebene* auch in der Gesamtheit des unendlichen Raumes vorhanden sei, ebenso wie es nicht denkunmöglich ist, daß durch die Materie ein ausgezeichneter *Mittelpunkt* des unendlichen Raumes bestimmt werde. Aber das eine wie das andere ist eine *unbefriedigende* Annahme, da es zu der geometrischen Homogenität des Raumes nicht paßt.2)

Vom vierdimensional weltgeometrischen Standpunkte bestünde nun eine analoge Auszeichnung einer *Zeitrichtung*, wenn die Materie quasistatisch wäre. Von diesem Standpunkte aus erscheint daher das letztere in der Minkowskiwelt aus den gleichen Gründen unbefriedigend wie analoge Auszeichnungen im dreidimensionalen Raum. Einem Mittelpunkt des Raumes z. B. würde in der vierdimensionalen Welt eine ausgezeichnete

---

1) F. Selety, a. a. O., S. 325—327 und Ann. d. Phys. 72. S. 65ff. 1923.

2) Mit der Invarianz der mechanischen Gesetze für beliebig gerichtete und in einen beliebigen Punkt gelegte Koordinatensysteme hat dies natürlich nichts zu tun. Ebenso ist es für unsere Betrachtung gleichgültig, ob der ausgezeichnete Punkt oder die ausgezeichnete Ebene usw. exakt definierbar sind oder nicht. Die galaktische Ebene z. B. ist nicht exakt definiert, aber es ist doch klar, wie es zu verstehen ist, wenn man von einer ausgezeichneten Ebene in unserem Fixsternsystem spricht. Wenn eine solche Auszeichnung in der ganzen unendlichen Welt bestünde, dann könnte man in dem gleichen Sinne von der Auszeichnung einer Ebene im Raume sprechen.

Zeitlinie entsprechen. Eine ausgezeichnete *Zeitrichtung* ist in der Minkowskiwelt aus den gleichen Gründen unbefriedigend wie eine ausgezeichnete Zeit*linie*.

In der Zylinderwelt würde wenigstens keine materielle Auszeichnung bestehen, die nicht schon in der rein geometrischen Struktur vorliegt, das obige Argument läßt sich also gegen sie nicht ganz in dem gleichen Sinne vorbringen. Aber vom Standpunkt der Union von Raum und Zeit ist der unendliche „Zylinder“ überhaupt u. E. ein wenig befriedigendes Weltbild. Wenn man an die Zeit im alten Sinne glaubt, dann mag ein in der unendlichen Zeit unverändert bleibender endlicher Raum ebenso annehmbar scheinen wie ein unendlicher. Vom vierdimensionalen Standpunkte aus ist aber der in der Zeitdimension unendliche „Zylinder“ sozusagen ein unförmiges Gebilde.[1] Die vom vierdimensionalen Standpunkte im kleinen vorhandene Minkowskische Geometrie paßt nicht gut zu einer Welt im großen mit einer ausgezeichneten Zerlegung in Raum und Zeit. Oder anders ausgedrückt, die Erfahrungen, die zur speziellen Relativitätstheorie geführt haben, passen nicht gut dazu, daß es im großen doch eine in dem betrachteten Sinne ausgezeichnete Zeit gebe.

Wenn derartige Auszeichnungen in der *tatsächlichen kon-*

---

[1] Vom vierdimensionalen Standpunkte aus würde es bei Endlichkeit des Raumes naheliegen, auch in der Zeit Endlichkeit und Geschlossenheit anzunehmen. Die De Sittersche formal vierdimensional sphärische Welt ist bekanntlich in der Zeit nicht real endlich. Es wäre aber statt der Zylinderwelt eine *Ringwelt* möglich, die zweifach — im Raum und in der Zeit — zusammenhinge. Der Ausdruck „Ringwelt“ könnte allerdings insofern irreführend wirken, als die betrachtete Welt *metrisch* der „Zylinderwelt“ äquivalent wäre, während eine Ringfläche bekanntlich eine andere Metrik als eine Zylinderfläche hat. Man könnte jene Welt also deutlicher als „zeitlich geschlossene Zylinderwelt“ bezeichnen. Vom vierdimensionalen Standpunkte würde eine solche vorliegen, wenn das Weltgeschehen in einer räumlich endlichen Welt einaml *genau* zu dem Anfangszustand zurückführte. Vom Standpunkte der alten Zeitauffassung würde dies unendliche Wiederholung der gleichen Periode bedeuten, vom vierdimensionalen Standpunkte einfach zeitliche Endlichkeit und Geschlossenheit. Dies würde dann zur Endlichkeit des Raumes weit besser passen als zeitliche Unendlichkeit. Aber die in der zeitlich geschlossenen, ebenso wie in der offenen Zylinderwelt geometrisch vorgezeichnete Zerlegung in Raum und Zeit macht doch auch eine solche Welt weniger befriedigend als eine, in der keine derartige Zerlegung bestimmt ist.

kreten Welt auch nichts mit der Invarianz der gewöhnlichen, mechanischen und elektromagnetischen Gesetze für verschiedene Koordinatensysteme zu tun haben, so kann man doch in einem *gewissen Sinne* von einer Auszeichnung auch im *Naturgesetzlichen* sprechen, wenn solche Auszeichnungen für den *ganzen* Kosmos bestehen. Alle Naturgesetze bedeuten schließlich doch nichts anderes als gewisse abstrakt betrachtete Grundeigenschaften der tatsächlichen Welt. Alle Naturwissenschaft ist in diesem Sinne eigentlich *Kosmographie* und die Aufstellung von Naturgesetzen bedeutet eine Beschreibung gewisser sich an vielen Raumzeitstellen wiederholender *Eigenschaften der Welt.* Es verhält sich damit im Prinzip nicht anders, als wenn man bei der Beschreibung eines individuellen Tausendfüßers eine allgemeine Angabe über die Struktur eines seiner gleichartigen Füße macht. Sonach ist jede Angabe einer allgemeinen Eigenschaft der Welt die Angabe eines Naturgesetzes. Bestünde also irgendeine kosmische Auszeichnung durch die Materieverteilung, so würde in *diesem* Sinne ihre Feststellung doch etwas *Naturgesetzliches* aussagen.[1])

Wir wollen unter der *kosmologischen Erfüllung eines Relativitätsprinzips* den Tatbestand verstehen, daß unter allen nach dem betreffenden Prinzip gleichberechtigten Koordinatensystemen *keines für die Beschreibung der konkreten Gesamtwelt einen Vorzug besitzt.* In *diesem* Sinne ist also das Relativitätsprinzip der räumlichen Koordinatennullpunkte nur dann erfüllt, wenn durch die Materieverteilung kein ausgezeichneter Punkt bestimmt wird. Die kosmologische Erfüllung des speziellen Relativitätsprinzips verlangt außer dem eben Gesagten und der kosmologischen Gleichberechtigung aller räumlichen Richtungen auch noch vollkommen unstatische Materie bzw. keine Auszeichnung einer Zeitachse durch die Materie. Die kosmologische Erfüllung des Äquivalenzprinzips würde verlangen, daß tatsächlich jedes empirische Trägheitsfeld sich

---

1) Was dann die Bevorzugung von Koordinatensystemen für die Darstellung der Naturgesetze betrifft, so sagt **Einstein** selbst, daß, wenn es eine physikalisch bevorzugte Richtung im Raume gebe, es unzweckmäßig wäre, die Gesetze in bezüglich Drehungen des Koordinatensystems kovarianter Form darzustellen (A. **Einstein**, Vier Vorlesungen, S. 11, Anm.). Dies gilt dann natürlich auch mutatis mutandis für die vierdimensionale Welt.

bei Betrachtung eines umfassenderen Gebiets bloß als Stück eines Gravitationsfeldes erweist. (Darüber später mehr.)

Unsere „kosmologische Erfüllung" ist eine *dritte* Bedeutung, neben den von Einstein und Kretschmann festgesetzten, in der man ein Relativitätspostulat verstehen kann. Nach Einstein bedeutet die Erfüllung eines Relativitätspostulats durch ein hypothetisches Naturgesetz, daß die Darstellung des Gesetzes in einer für die betreffende Transformationsgruppe kovarianten Form eine einfache Gestalt habe. In diesem Sinne ist z. B. die allgemeine Relativität für das Einsteinsche, aber nicht für das Newtonsche Gravitationsgesetz erfüllt, obwohl sich auch dieses allgemein kovariant formulieren läßt.[1] Nach Kretschmann dagegen erfüllt „ein System physikalischer Gesetze dann und nur dann das Relativitätspostulat einer invarianten Transformationsgruppe G, wenn bei *jeder beliebigen Darstellung* (von mir hervorgehoben) aller Gesetze des Systems und nur dieser Gesetze die für die Darstellung aller Gesetze des Systems und nur dieser Gesetze physikalisch berechtigten .... Bezugssysteme unter allen nach den Gesetzen möglichen physikalischen Umständen eine so große Schar bilden, daß die Schar der sie verbindenden Transformationen die Gruppe G in irgendeiner Form als Teil enthält oder ihr gleich ist".[2] In Kretschmanns Sinn erfüllen die Gesetze der Einsteinschen Gravitationstheorie jedenfalls nicht das allgemeinste Relativitätspostulat. Unsere *dritte* Bedeutung der „kosmologischen Erfüllung" ist die engste; nach ihr ist durch Einsteins kosmologisches System sicherlich überhaupt kein Relativitätspostulat erfüllt. Faßt man den Begriff des „Naturgesetzes" in dem früher dargelegten weitesten Sinn, dann deckt sich die Erfüllung eines Relativitätspostulats im Sinne Kretschmanns für die Gesamtheit aller Naturgesetze mit unserer „kosmologischen Erfüllung".

In Anbetracht des früher Ausgeführten, daß einerseits alle Naturgesetze allgemeine Eigenschaften des Kosmos beschreiben und daß andererseits allen seinen allgemeinen Eigenschaften

---

[1] A. Einstein, Ann. d. Phys. 55. S. 241. 1918. Einstein gebraucht etwas andere Ausdrücke. Wir haben die Formulierung so gewählt, daß sie der Kretschmanns parallel ist.

[2] E. Kretschmann, Ann. d. Phys. 53. S. 584. 1917.

Naturgesetze entsprechen, scheint es nun dem Verf., daß der Sinn der „kosmologischen Erfüllung“ ein solcher ist, in welchem man nicht unangemessen die physikalische Relativität verstehen kann. (Dies ist natürlich nur eine terminologische Frage.) In *diesem* Sinne gibt es in der Einsteinschen Zylinderwelt und überhaupt bei quasistatischer Materie keine Relativität der Zeit oder, umgekehrt ausgedrückt, eine „absolute Zeit“.

Der Verf. hat gezeigt, daß vollkommene kosmologische Erfüllung des speziellen Relativitätsprinzips physikalisch möglich ist. Er hat einerseits bewiesen, daß in einer molekularhierarchischen Welt auch im strengsten Sinne kein Gebiet im Raume ausgezeichnet sein muß[1]) und daß andererseits in einer molekularhierarchischen Welt deren einzelne Systeme im mechanischen Gleichgewicht sind, dennoch alle Zeitrichtungen kosmologisch völlig gleichberechtigt sein können.[2]) Ein solches Weltbild besitzt viele Vorzüge, aber (wie hier schon gesagt wurde) nach der allgemeinen Relativitätstheorie ist nicht alles davon mit der Quasieuklidizität des Raumes (in dem definierten Sinne) vereinbar. Die nichtstatische Matreie besitzt aber nach dem Gesagten derartige Vorzüge, daß es jedenfalls erwägenswert ist, ob sie sich nicht doch mit der allgemeinen Relativitätstheorie in Einklang bringen läßt. Bei Endlichkeit des Raumes ist dies natürlich ausgeschlossen. Wie der Verf. schon früher gesagt hat, ist ganz unstatische Materie physikalisch nur bei Unendlichkeit der Welt möglich.[3]) Es bleibt also bloß die Möglichkeit, daß der Raum zwar unendlich, aber nicht in dem früher definierten Sinne quasieuklidisch ist. Wir werden zeigen, daß er es in einem etwas weiteren Sinne doch sein kann.

2. *Ungleichmäßig quasieuklidische Räume.* Unter einer *gleichmäßig quasieuklidischen* Riemannschen Mannigfaltigkeit wollen wir eine solche verstehen, in der ein Koordiantensystem möglich ist, so daß überall in der Mannigfaltigkeit — mit Ausnahme von Gebieten von der Art, daß für ein genügend großes Raumgebiet das Verhältnis des Gesamtvolumens (alle Volumina von der Dimensionszahl der Mannigfaltigkeit und

---

[1]) F. Selety, Ann. d. Phys. 68. S. 308–312. 1922.

[2]) F. Selety, a. a. O., S. 328–331.

[3]) F. Selety, a. a. O., S. 331.

im natürlichen Maße) der darin enthaltenen Ausnahmsgebiete zu dem des betrachteten Raumgebiets unter jede positive Größe sinkt — für jede positive Zahl ε $|g_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu}| < \varepsilon$.[1])

Unter einer *ungleichmäßig quasieuklidischen* Riemannschen Mannigfaltigkeit wollen wir eine solche verstehen, in der zwar die obige Bedingung nicht erfüllt ist, in der sich aber zu jedem Volumen V und zu jeder positiven Zahl ε überall in der Mannigfaltigkeit mit Ausnahmsgebieten von derselben Art wie oben ein Gebiet $V' > V$ finden läßt, in dem ein Koordinatensystem möglich ist, derart, daß überall in V' (oder höchstens mit relativ zu V' in summa beliebig kleinen Ausnahmegebieten)

$$|g_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu}| < \varepsilon.$$

Dieser Definition ist (mindestens für zwei- und dreidimensionale Mannigfaltigkeiten) die Festsetzung äquivalent, daß, bei Nichterfüllung der Bedingung der gleichmäßigen Quasieuklidizität, der geometrische Mittelwert des absoluten Betrags des Gaussschen Krümmungsmaßes für die ganze Mannigfaltigkeit Null ist.

Wir wollen zur Erläuterung ein einfaches Beispiel einer ungleichmäßig quasieuklidischen, zweidimensionalen Mannigfaltigkeit geben. Man denke sich eine Halbkugel (K_1), diese soll auf einer viel größeren sich befinden usw. in infinitum mit unbegrenzt wachsender Halbkugel K_n. Man stelle sich etwa eine nach unten unbegrenzte Reihe von immer größeren, einander tragenden Kuppeln vor. Die unendliche Oberfläche des so entstehenden Körpers ist sicherlich nicht gleichmäßig quasi-eben, aber sie ist nach unserer Definition ungleichmäßig quasi-eben. Das mittlere Krümmungsmaß sinkt bei Betrachtung immer größerer endlicher Gebiete unter jeden beliebigen Betrag. (Die Unstetigkeitsstellen der Krümmung kann man sich irgendwie abgerundet denken.) Das mittlere Krümmungsmaß der Gesamtfläche ist Null.

Statt daß sich auf jeder Halbkugel K_n nur *eine* kleinere K_{n-1} befindet, können die K_{n-1} auch zahlreich sein. Wenn sie nur viel kleiner als K_n sind und von diesen den überwiegenden Teil der Oberfläche frei lassen, so ist die unendliche Gesamtfläche sicherlich ebenfalls quasi-eben (vgl. Fig. 1).

---

[1] Die Forderung, daß „im Unendlichen“ $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ sei, kann bei molekularhierarchischer Materieverteilung nicht ganz im strengen Sinne aufrecht erhalten werden, weil man dann in noch so großer Entfernung immer wieder auf Gebiete trifft, in denen die $g_{\mu\nu}$ sich um ebensoviel von den $\delta_{\mu\nu}$ unterscheiden, wie in unserer Umgebung (bei dem gewählten Koordinatensystem).

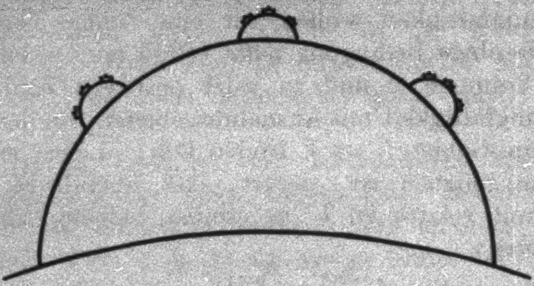


Fig. 1.

Man könnte fragen, mit welchem Rechte man solche Flächen, wenn auch in einem weiteren Sinne, quasi-*eben* nennen könnte. Es rührt dies daher, weil sich beliebig große endliche Gebiete auf ihnen finden lassen, in denen die Geometrie nur beliebig wenig von der der Ebene abweicht und der Teil der Gesamtfläche auf dem für jeden Einzelfall (der gewählten Gebietsgröße und der gewählten Annäherung an die Ebenheit) die Bedingung erfüllbar ist, immer die ganze unendliche Fläche mit Ausnahme eines endlichen Teils ist. Nur für die *ganze* Fläche läßt sich nicht ein *einziges* Koordinatensystem angeben, so daß die g_{ik} überall annähernd δ_{ik} bleiben. Wegen des Zusammenhanges dieser Verhältnisse mit der gleichmäßigen und ungleichmäßigen Konvergenz haben wir die Bezeichnung gleichmäßige und ungleichmäßige Quasieuklidizität gewählt.

3. *Nichtstatische, stabile molekularhierarchische Welten in ungleichmäßig quasiminkowskischen Mannigfaltigkeiten.* — In einer ungleichmäßig quasiminkowskischen Welt scheinen nun unsere früher genannten Postulate erfüllbar zu sein.

Die *geometrische* Möglichkeit einer ungleichmäßig quasiminkowskischen Welt ist ohne weiteres ersichtlich. Was die *physikalische* Möglichkeit auf Grund der allgemeinen Relativitätstheorie anlangt, so ergibt sich sofort aus dem Äquivalenzprinzip, daß eine nach *oben* unbegrenzte Hierarchie quasigalileischer Felder möglich ist, wie sie in der ungleichmäßig quasiminkowskischen Welt vorliegt. Wenn das betrachtete vierdimensionale Gebiet mit hinreichender Genauigkeit quasigalileisch ist, dann braucht man sich ja für entsprechend weitgehende Näherungsbetrachtungen um alles außerhalb desselben nicht zu kümmern. Was nun die Fortsetzung nach „unten“ anlangt (wir nehmen hier, wie bisher immer, an, daß die Zahl der Stufen ins kleine *endlich* ist), so ist die Sache etwas weniger einfach, denn, wie leicht zu sehen, sind dann in dem zu betrachtenden Gebiet, falls dieses höherer Ordnung ist, die felderregenden Massen trotz der kleinen Geschwindigkeit jedes Systems in bezug auf das nächst höhere, eigentlich nicht quasistatisch. Aber wenn wir räumliche Gebiete außerhalb eines Systems n-ter Ordnung betrachten, die innerhalb des das System umgebenden quasigalileischen Gebiets liegen, aber doch im Verhältnis zur Größe des Systems hinreichend weit genug von ihm entfernt sind, dann läßt sich das gesamte System n-ter Ordnung als ein räumlicher *Punkt* auffassen, in dem wir dem $T_{\mu\nu}$-Tensor gewisse Durchschnittswerte zuschreiben müssen. Wegen der sehr großen Zahl von Systemen nächst niederer Ordnung, also gar erster Ordnung, aus denen jedes System besteht, können wir nun annehmen, daß sich in einem Koordinatensystem, in dem der betrachtete „Punkt“ ruht, alle Komponenten des $T_{\mu\nu}$-Tensors, mit Ausnahme von T_{44}, statistisch ausgleichen. Damit ist nun das Problem auf das bekannte des zentrisch-symmetrischen statischen Feldes reduziert.

Der Verf. hat in seiner früheren Abhandlung ausgeführt, daß es für die molekularhierarchische Welt vor allem naheliegt, *dynamische Ähnlichkeit der Systeme verschiedener Größenordnung* anzunehmen, derart, daß in ihnen die *Massen, Lineardimensionen und Zeiten proportional*, die relativen Geschwindigkeiten also von gleicher Größenordnung sind.1) Während dieses System bei gleichmäßig quasiminkowskischer Welt nach der allgemeinen Relativitätstheorie nicht möglich ist, ist es dies bei ungleichmäßig quasiminkowskischer Metrik.

Da in diesem Weltbilde wegen der völlig unstatischen Materie für die ganze Welt keine „Spaltung in Raum und Zeit“ möglich ist (derart, daß die g_{4i} $(i \neq 4)$ überall annähernd verschwinden), so ist es besser, hier nicht von Raum und Zeit

---

1) F. Selety, a. a. O., S. 304, 322, 329ff.

für sich allein, sondern nur von der vierdimensionalen Mannigfaltigkeit zu sprechen.

In der dynamisch ähnlichen molekularhierarchischen Welt herrscht nach der allgemeinen Relativitätstheorie *„kosmologische Erfüllung“ des Äquivalenzprinzips.* Jedes empirische quasigalileische „Trägheitsfeld“ hat bloß lokale Bedeutung. Vom Standpunkte der allgemeinen Relativitätstheorie kann man dies nicht alseinen Nachteil, vielleicht eher als einen Vorteil dieses Weltbildes ansehen.[1])

III. 1. *Ein zentrisch-symmetrisch statisches Modell in einem ungleichmäßig quasieuklidischen Raum.* — Manche, wenn auch natürlich nicht alle Verhältnisse in dem vorhin betrachteten Weltbild lassen sich durch ein zentrisch-symmetrisches statisches System erläutern. Wir denken uns eine mit imkompressibler Flüssigkeit erfüllte Kugel K_1, deren Gravitationsradius sehr klein gegen ihren geometrischen Radius ist. Sie sei umgeben von einem konzentrischen Hohlraum H_1, der sehr viel größer als K_1 ist, dieser wieder von einer mit Ausnahme des Hohlraumes mit imkompressibler Flüssigkeit erfüllten konzentrischen Kugel K_2 mit sehr viel größerem Radius als H_1 usw. in infinitum. Die Dichten der Flüssigkeiten der Kugeln sollen derart mit der Größe derselben abnehmen, daß die Massen der Kugeln immer ihren Radien (im natürlichen Maße) proportional sind, die Gravitationsradien von K_n also immer klein gegenüber den Radien der Kugeln bleiben. Das Massenverhältnis

---

[1]) Ja, es fragt sich, wenn man die physikalische Relativität so weit als möglich führen will, ob man nicht gerade dies als einen derartigen Vorzug ansehen soll, daß die Nichterfüllung des „Machschen Prinzips“ dagegen zurücktritt. Der Verf. hat die Gründe ausgeführt, warum er die „kosmologische Erfüllung“ oder Nichterfüllung eines Relativitätsprinzips als ausschlaggebend dafür ansehen möchte, ob man eigentlich von dem Bestehen der betreffenden Relativität sprechen soll. In diesem gleichen Sinne herrscht nur dann *völlige* Äquivalenz von Trägheit und Gravitation, wenn jedes empirische Trägheitsfeld von einem höheren Standpunkte aus sich als ein kleines, quasigalileisch anzusehendes Stück eines eigentlich inhomogenen Gravitationsfeldes erweist, wenn also eine unendliche Hierarchie solcher quasigalileischer Felder existiert. Gerade dies entspricht der Spekulation Machs über die mögliche lokale Beschränkheit unseres empirischen Trägheitsfeldes. In der gleichmäßig quasieuklidischen Welt wird man dagegen schließlich auf ein einziges makrokosmisches Trägheitsfeld geführt und in analoger Weise gelangt man auch in der endlichen Welt auf das der durchschnittlichen Materieverteilung entsprechende makrokosmische Trägheitsfeld.

$$\frac{M_n}{M_{n+1}} = N$$

soll auch konstant sein.

Was die Möglichkeit dieses Systems betrifft, so läßt sich natürlich fragen, wodurch hier die Hohlräume erhalten bleiben. In v. Laues Beleuchtungen[1]), wo eine Kugel (oder mehrere nicht konzentrische Kugeln) von einem konzentrischen Hohlraum umgeben ist, hierauf aber sogleich statt unseres K_2 ein geschlossener sphärischer Raum folgt, ergibt sich diese Schwierigkeit nicht. In unserem System ist aber die Bedingung offenbar nicht erfüllt, daß an der Grenze von H_n und K_{n+1} der Druck Null ist. Aber wir können uns in unserem ohnehin bloß fiktiven System darüber hinwegsetzen. Wir führen ja dieses zentrisch symmetrische System bloß zur Vereinfachung der Betrachtung an Stelle der tatsächlich angenommenen molekularhierarchischen Materieverteilung ein.[2]) Wir führten in unserem Modell die Hohlräume ein, weil es dadurch den Verhältnissen in der molekularhierarchischen Welt ähnlicher wird. Wenn man aber statt dessen die Hohlräume wegläßt und auf jede Kugel K_n sogleich K_{n+1} folgen läßt, dann sind doch die metrischen Verhältnisse sehr ähnlich wie bei Vorhandensein der Hohlräume, wenn nur M_n/M_{n+1} genügend klein, also nach unseren Annahmen auch die Dichte der nächstfolgenden Kugel sehr viel kleiner ist. Es müssen auch dann Schalen mit positiver und negativer Raumkrümmung abwechseln und in einer Umgebung von K_n, die groß gegen dieses ist, ist dann die Metrik der Schwarzschildschen im leeren Raum sehr ähnlich.

Wir können für unser Modell keine strenge Lösung geben, aber Annäherungsbetrachtungen machen es u. E. sicher, daß ein solches System mit der allgemeinen Relativitätstheorie vereinbar ist. Jede Kugel K_n ist nach unseren Annahmen von einem derart großen Hohlraum umgeben, daß schon eine relativ dazu sehr kleine, aber relativ zu K_n sehr große Umgebung von K_n als angenähert euklidisch zu betrachten ist. Dann gilt in der Umgebung von K_n mit Annäherung die Schwarzschildsche Lösung für den leeren Raum. Diese muß sich dann stetig an die (hier wenigstens angenähert) sphärische Metrik von K_{n+1} anschließen. Trotz der Unmöglichkeit, derzeit genauer den Anschluß zu bestimmen, scheint die prinzipielle Möglichkeit sicher zu sein.

---

[1]) M. v. Laue, Berliner Sitzungsberichte, S. 27. 1923.

[2]) Man kann sich in unserem Modell entweder mit einem labilen Gleichgewicht zufrieden geben oder man kann sich denken, daß jeder Hohlraum H_n außen von einer unendlich dünnen, masselosen Kapsel abgeschlossen und daß diese Kapsel durch masselose starre Stangen konzentrisch festgehalten wird.

Untenstehende Figur gibt ein ungefähres Bild der „Meridiankurve" in diesem Raume.

Dieser Raum ist nach unserer Definition ein ungleichmäßig quasieuklidischer. Er hat aber die besondere Eigenschaft, die nicht allen solchen Räumen zukommt, daß in ihm für den Gesamtraum ein Koordinatensystem möglich ist, in dem die g_{ik} überall nicht um mehr als um einen maximalen geringen Betrag von den δ_{ik} abweichen. Ein solches Koordinatensystem ergibt sich offenbar durch vertikale Projektion auf den den Scheitel A tangierenden euklidischen Raum, dessen Meridiankurve durch aA dargestellt wird.

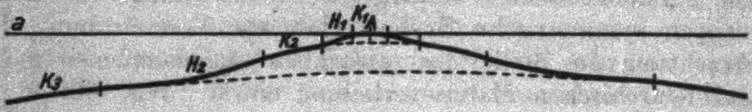


Fig. 2.

In dem betrachteten System ist die Potentialdifferenz gegenüber dem Unendlichen unendlich, wie sich sofort aus einer Dimensionsbetrachtung ergibt. Infolge der dynamischen Ähnlichkeit der Systeme mit Proportionalität von Längen, Zeiten, Massen ist die Arbeit, die notwendig ist, um einen Körper von einer Stelle in K_n oder H_n zur korrespondierenden in K_{n+1} oder H_{n+1} zu bringen, der n-te Teil derjenigen, die notwendig ist, um einen Körper von Nfacher Masse von der korrespondierenden Stelle in K_{n+1} oder H_{n+1} zur korrespondierenden in K_{n+2} oder H_{n+2} zu bringen. Um den ersten Körper aus K_{n+1} usw. dorthin zu bringen, ist also wieder die gleiche Energie notwendig. Für $r = \infty$ wird sie also unendlich und zwar bei dem betrachteten räumlichen Koordinatensystem wie $\ln r$.

g_{44} dagegen wird wie eine niedrige Potenz von r, bzw. der davon nicht sehr verschiedenen natürlichen Radiuslänge unendlich, da g_{44} für jede „Stufe“ in dem gleichen Verhältnis wächst.

Führt man statt des vorhin betrachteten räumlichen Koordinatensystems ein solches ein, daß $g = \text{const}$, dann müssen die räumlichen g_{ik} offenbar für $r = \infty$ gegen Null streben. Natürlich verschwindet dann der Koeffizient g_r eines radialen Koordinatendifferentialquadrats langsamer als $1/r^{2+a}$, $(a > 0)$ da ja unser Raum, also $\int \sqrt{g_r}\, d\, r$ unendlich ist.

Die Lichtgeschwindigkeit wird für $r = \infty$ in beiden betrachteten Koordinatensystemen unendlich.

Daß im Unendlichen $g_{ik} = 0$, $g_{44} = \infty$, hat Einstein einmal in Erwägung gezogen. Er lehnte es jedoch als mit den Erfahrungen über das Fixsternsystem nicht vereinbar ab.[1]) Unsere Darlegungen zeigen jedoch u. E., daß dieser Schluß nicht zwingend ist, da ein derartiger Verlauf der $g_{\mu\nu}$ nicht damit im Widerspruche steht, daß für die Beschreibung unseres Fixsternsystems der Raum mit völlig ausreichender Genauigkeit als „im Unendlichen“ euklidisch angenommen werden kann. Was die Vereinbarkeit mit den kleinen relativen Geschwindigkeiten im Fixsternsystem anlangt, so verweisen wir auf die frühere Arbeit[2]) und das hier im vorangegangenen daraus Angeführte. (Vgl. S. 305.)

Auch in dem betrachteten Modell herrscht kosmologische Erfüllung des Äquivalenzprinzips.

2. *Möglichkeit, die kleinen Trägheitseffekte im dargestellten Modell zu summieren.* — Wir wollen zeigen, wie sehr das lokale Galileische Feld (selbst abgesehen von aller Newtonschen Gravitation) in unserem Modell isoliert ist. Es sollen nun alle Kugeln von K_1 bis K_n zusammen eine gewisse gleiche Beschleunigung b, bezogen auf K_{n+1} oder das zu K_n gehörige Galileifeld erhalten. Wir behaupten nun, daß, wenn n nur groß genug ist, das lokale Galileifeld im Hohlraum H_1 die Beschleunigung *fast vollständig* mitmacht, daß es also möglich ist, daß durch die konzentrischen Kugeln der *Effekt des induzierten Beschleunigungsfeldes* trotz des relativ kleinen Gravitations-

---

[1]) A. Einstein, Kosmologische Betrachtungen, S. 145f.

[2]) F. Selety, a. a. O., S. 291—295.

radius der Kugeln bis zur fast vollständigen Mitführung des scheinbaren Trägheitsfeldes *summiert* wird.

Daß der Effekt in unserem Modell sich summieren kann, sieht man schon daraus, daß ja in erster Näherung jede der K_1 umgebenden Kugeln den gleichen Beitrag zum Potential gibt, so daß trotz der Kleinheit jedes Summanden sich doch eine merkliche Summe ergeben kann. Wir wollen einen einfachen Weg einschlagen, um zu einer größeren Genauigkeit zu gelangen.

Wir gehen von dem der Umgebung der Kugel K_n angepaßten Koordinatensystem aus, setzen also irgendwo im Hohlraum H_n in relativ zum Radius von K_n großer Entfernung $g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. K_n habe die Masse M_n. Im konzentrischen Hohlraum H_{n-1} herrscht kein Newtonsches Gravitationsfeld, das Gravitationsfeld beschränkt sich also (angenähert natürlich) auf das durch die von uns angenommene Beschleunigung b von K_n bewirkte. Seine Beschleunigung hat die Richtung von b und die Größe

$$b \cdot \frac{\varkappa}{2\pi} \frac{M_n}{r_n} \,.\, ^{1)}$$

Wir gehen jetzt zu dem Koordinatensystem über, das in diesem Felde zugrunde gelegt wird, wenn es als Galileifeld betrachtet wird. Der Einheitsmaßstab hat im Hohlraum H_{n-1} im ersten, zu K_n gehörigen Koordinatensystem die Länge

$$1 - \frac{\varkappa}{8\pi} \frac{M_n}{r_n},$$

das Intervall der Einheitsuhr die Zeitlänge

$$1 + \frac{\varkappa}{8\pi} \frac{M_n}{r_n}.$$

Im neuen Koordinatensystem ist also die Relativbeschleunigung von K_{n-1} gegen das Galileische Feld statt

$$b\left(1 - \frac{\varkappa}{2\pi} \frac{M_n}{r_n}\right)$$

nunmehr

$$\begin{aligned} b' &= b \cdot \left(1 - \frac{\varkappa}{2\pi} \frac{M_n}{r_n}\right)\left(1 + \frac{3\varkappa}{8\pi} \frac{M_n}{r_n}\right) \\ &= b \cdot \left(1 - \frac{\varkappa}{8\pi} \frac{M_n}{r_n}\right). \end{aligned}$$

---

1) Vgl. A. Einstein, Vier Vorlesungen, S. 66. (Ein dort weggefallenes π wurde hinzugefügt.)

Nun ist nach unseren Voraussetzungen über die konzentrischen Kugeln im neuen Koordinatensystem M_{n-1}/r_{n-1} gleich dem früheren Wert von M_n/r_n. Bei der weiteren Betrachtung des Feldes von K_{n-2} können wir uns nach dem Äquivalenzprinzip auf die Kugeln K_{n-1} und K_{n-2} und die durch sie erzeugten Wirkungen beschränken, denn sobald wir das Galileifeld um K_{n-1} als Trägheitsfeld ansehen, geht uns die äußere Welt nichts weiter an.

Es ist danach also die in einem dritten, zu K_{n-2} gehörigen Koordinatensystem bestehende Relativbeschleunigung von K_{n-2} gegen das umgebende Galileifeld:

$$b'' = b\left(1 - \frac{\varkappa}{8\pi}\,\frac{M_n}{r_n}\right)^2 .$$

Setzen wir dies fort, so gelangen wir zu einer gegen Null konvergierenden geometrischen Reihe und sehen, daß für genügend großes n auch bei noch so kleinem $\varkappa M_n/r_n$ die Kugel K_1 schließlich keine merkliche Beschleunigung mehr gegen das sie umgebende lokale Galileifeld hat.

Es braucht kaum gesagt zu werden, daß keine Möglichkeit besteht, ein Experiment zu machen, in dem man eine derartige Summierung beobachten könnte. Es ist aber von theoretischem Interesse, daß sich der Beschleunigungseffekt auch durch Massenkugeln, deren Gravitationsradius stets klein gegen ihren Radius ist, zu einer beträchtlichen Größe aufsummieren könnte. Das gleiche gilt offenbar für den Thirringschen Rotationseffekt.

3. *Möglichkeit der Erfüllung des Machschen Prinzips in gewissem Sinne.* Bei den bisherigen Betrachtungen der Molekularhierarchie bzw. der konzentrischen Kugeln nahmen wir an, daß der Gravitationsradius stets sehr klein gegen den Radius der betrachteten Kugel sei. Einsteins Machsches Prinzip ist natürlich in diesen Systemen nicht erfüllt. Wir wollen aber noch eine andere Denkmöglichkeit betrachten. M_n kann jedenfalls nur um *ganz wenig* schneller wachsen als wir bisher angenommen haben, wenn der Raum unendlich bleiben soll. Aber ein wenig schneller geht es noch.

Nehmen wir also an, daß bei den konzentrischen Kugeln das Verhältnis von Gravitationsradius und Radius nicht konstant bleibe, sondern mit wachsender Kugelgröße wachse, aber so, daß es doch nie zur Geschlossenheit des Raumes kommt. Die mit Materie erfüllten Gebiete sollen sich mit wachsendem n halben sphärischen oder elliptischen Räumen nähern. (Da es ohnehin niemals zur völligen Geschlossenheit des Raumes kommt, ist dies dasselbe.)

In einer solchen Welt würde trotz Unendlichkeit des Raumes eine beliebige *Annäherung* an die Erfüllung des Machschen Prinzips stattfinden (soweit es in einem geschlossenen Raume erfüllt ist) und man könnte vielleicht in gewissem Sinne sagen, daß es schließlich „im Unendlichen“ erfüllt ist.[1]) Die größeren „Kugeln“ K_n wären *beinahe* elliptische Räume, das in ihnen vorhandene Feld wäre fast vollständig ohne Betrachtung der übrigen Welt bestimmt. Aber zur völligen Geschlossenheit des Raumes würde es doch nie kommen; auf den beinahe halben sphärischen Raum K_n würde immer wieder der viel größere (angenähert als euklidisch zu betrachtende) Hohlraum H_n folgen.

Verf. möchte nicht behaupten, daß er eine solche Beschaffenheit der Welt annehme. Die dynamisch ähnliche Molekularhierarchie, in der $\varkappa \frac{M_n}{r_n}$ immer dieselbe Größe, klein gegen 1, behält, scheint ihm befriedigender. Es sollte bloß gezeigt werden, wie auch in einer unendlichen Welt eine Art von Erfüllung des „Machschen Prinzips“ in dem oben beschriebenen Sinne möglich ist.

IV. *Gründe für die Unendlichkeit des Raumes.* — Es ist *nicht* in erster Linie in dieser und der früheren Arbeit die Absicht des Verf.s, die *Unendlichkeit des Raumes* zu *behaupten*, sondern sie als *möglich* und die *Einwände* dagegen als *nicht zwingend* hinzustellen. Der Olberssche, der Seeligersche (bzw. der analoge der allgemeinen Relativitätstheorie) und der *Verödungseinwand* lassen sich jedenfalls in *völlig befriedigender Weise entkräften.* Die beiden ersten wurden über-

---

1) Wenn man auf die in der endlichen Welt bestehende Abhängigkeit der Gravitationskonstante von der Masse und mittleren Dichte der Welt Wert legt, so würde diese Abhängigkeit auch hier (durch einen Grenzprozeß) bestimmt sein. Dies würde dann zu der nach unseren Annahmen auch in der unendlichen Welt bestehenden wechselseitigen Zuordnung von Massengröße, Raumgröße und mittleren Dichte hinzukommen.

haupt nur deshalb in Betracht gezogen, weil man nicht die mittlere Dichte Null annehmen wollte, gegen die ein triftiges Bedenken nicht vorliegt. Der Verödungseinwand läßt sich nach der Newtonschen Theorie und dem speziellen Relativitätsprinzip auf die in meiner früheren Arbeit dargelegte Weise[1]), nach der allgemeinen in der ungleichmäßig quasiminkowskischen Welt entkräften. Was freilich die mit dem *Machschen Prinzip* zusammenhängenden Argumente Einsteins anlangt, so gibt Verf. zu, daß es *Auffassungssache* bleibt, wie man sich dazu stellt. *Außer* diesen gibt es aber sicherlich *keine physikalischen Argumente mehr, die für die Endlichkeit des Raumes geltend gemacht werden können.*

Es gibt viele, die aus allgemeinen philosophischen Gründen eine Vorliebe für die Annahme der endlichen Welt haben. Bei anderen besteht eine gerade entgegengesetzte Vorliebe und zu diesen gehört auch der Verfasser.[2]) Doch soll darüber hier nichts weiter gesagt werden. Einstein selbst beruft sich ja auch niemals darauf, daß die Annahme der Endlichkeit an sich einen Vorzug habe, sondern führt *besondere* Gründe dafür an. Wenn nun auch der Verf. die Unendlichkeit des Raumes nicht für sicher hinstellen will, so scheint ihm doch, daß sich solche besondere Gründe gerade zu ihren *Gunsten* anführen lassen.

1. Ein euklidischer Raum ist einfacher als jeder nichteuklidische. Ebenso wie nun aber auch eine gerunzelte Ebene eine einfachere Mannigfaltigkeit ist als eine gerunzelte Kugelfläche, so ist auch ein (gleichmäßig) *quasi*euklidischer Raum bzw. eine (gleichmäßig) quasiminkowskische Welt einfacher als ein elliptischer oder sphärischer Raum bzw. eine Zylinderwelt. Von der *ungleichmäßig* quasiminkowskischen Welt kann der Verf. freilich nicht sagen, daß sie rein geometrisch einfacher sei als eine Quasi-Zylinderwelt, so daß für sie dieser erste Punkt nicht gültig ist, aber wegen der folgenden Punkte 2, 3 scheint dem Verf. doch, daß das ungleichmäßig quasiminkowskische Weltbild vom Standpunkte der allgemeinen Relativitätstheorie

---

[1]) F. Selety, a. a. O., S. 289—295.

[2]) Über die Subjektivität derartiger Vorlieben vgl. die treffenden Darlegungen bei W. D. Mac Millan, Some postulates of cosmology, Scienta. S. 105. Februar 1922.

als ein besonders befriedigendes und harmonisches zu betrachten ist.

2. Ein besonderer Vorzug des euklidischen Raumes ist bekanntlich die Möglichkeit *ähnlicher* Figuren und die *Relativität der Größe* in diesem Sinne.[1]) Auch den gleichmäßig oder ungleichmäßig quasieuklidischen Mannigfaltigkeiten kommt dieser letztere Vorzug zu. Physikalisch kommt darin die *Relativität der Größe* vor allem in dem *molekularhierarchischen Materieaufbau zur Geltung.* Am vollkommensten besteht die Relativität der Größe in der *dynamisch ähnlichen Molekularhierarchie* (mit Proportionalität von Längen, Zeiten, Massen), die wir daher und aus den folgenden Gründen als das *befriedigendste kosmologische Weltbild* betrachten. Dasselbe hat auch noch die Vorzüge, daß in ihm (wegen Unendlichkeit des Potentials) keine Verödung ins Unendliche möglich ist und daß der nächste Punkt 3 (völlig unstatische Materie) erfüllt ist. Allerdings muß dann nach der allgemeinen Relativitätstheorie die Welt ungleichmäßig quasiminkowskisch sein. Wer sich aber einmal in den, im Grunde genommen, so einfachen Gedanken der Molekularhierarchie hineingefunden hat, der wird dann auch, falls er überhaupt eine nichteuklidische Geometrie anzunehmen geneigt ist, die mit der Molekularhierarchie eventuell verbundene ungleichmäßig quasiminkowskische Metrik nicht mehr unbefriedigend finden, die ja nichts anderes als eine Übertragung des hierarchischen oder größenrelativistischen Gedankens auf eine nichteuklidische Geometrie ist.

3. Nur in einer unendlichen Welt ist eine völlig unstatische Materie möglich, so daß das spezielle Relativitätsprinzip „kosmologisch erfüllt" ist, d. h. in der vierdimensionalen Welt durch die tatsächliche Materieverteilung keine Auszeichnung einer Zeitrichtung besteht.

4. In einer endlichen Welt wäre eine völlig gleichmäßige Materieverteilung möglich, *in der unendlichen Welt mit der mittleren Dichte Null ist Ungleichmäßigkeit der Materieverteilung notwendig.* Wenn außerdem *kein singuläres Mittelgebiet* vorhanden sein soll, dann ist wohl die *molekularhierarchische Materieverteilung notwendig.* Nun zeigt uns die *Erfahrung* die

---

1) Wir brauchen wohl kaum darauf hinzuweisen, daß hier von „Relativität der Größe" in ganz anderem Sinne die Rede ist als in der Weylschen und analogen verallgemeinerten Geometrien.

größte Ungleichmäßigkeit der Materieverteilung und von den Elektronen und Atomkernen bis zu den Milchstraßensystemen und vielleicht darüber hinaus dem System der sichtbaren Spiralnebel eine Reihe von molekularen Stufen.

Einstein lehnte die Annahme des unendlichen Raumes auch deshalb ab, weil darin homogene Dichte Null oder Nichtexistenz der Materie mit den Feldgleichungen vereinbar ist, während in der Zylinderwelt Materie vorhanden sein muß. Dagegen hat Eddington darauf hingewiesen, daß eine homogene endliche Dichte nicht minder unbefriedigend wäre.[1]) Fügt man aber zur Hypothese der Unendlichkeit des Raumes bloß die Postulate hinzu, daß überhaupt Materie vorhanden und daß kein singuläres Gebiet im Raume ausgezeichnet ist, dann folgt daraus Unendlichkeit der Masse und daß die Welt im ganzen so beschaffen ist, wie sie die Erfahrung zeigt.

Nach den Prinzipien der induktiven Naturforschung besitzt nun eine Hypothese einen gewissen Grad von Wahrscheinlichkeit, aus der sich mit Notwendigkeit empirisch bestätigte Folgerungen ergeben, für die ohne jene Hypothese kein Grund ersichtlich ist. Die Hypothese der *Unendlichkeit des Raumes*, aus der Ungleichmäßigkeit der Materieverteilung und (mit einer weiteren plausiblen Annahme) die molekularhierarchische Gliederung folgt, findet danach also eine *Stütze in der Erfahrung*.

Zusammenfassung.

I. 1. Eine Minkowskiwelt oder Quasi-Minkowskiwelt ist einfacher als eine Zylinderwelt oder Quasi-Zylinderwelt.

2. Mittlere Dichte Null ist nicht unwahrscheinlich, da sie mit völliger Raumerfüllung, unendlicher Gesamtmasse und Nichtvorhandensein eines singulären Mittelgebiets vereinbar ist.

3. Man kann auf Erfüllung von Einsteins „Machschem Prinzip" verzichten, besonders wenn die Gesamtmasse in geeigneten Koordinatensystemen im Durchschnitt nicht rotiert

---

[1]) „No doubt a world without matter, in which nothing could ever happen, would be very uninteresting; and some might deny its claim to be regarded as a world at all. But a world uniformly filled with matter would be equally dull and unprofitable; so there seems to be little object in denying the possibility of the former and leaving the latter possible." (A. S. Eddington, Space, Time and Gravitation, Cambridge 1921. S. 164.)

und unendlich ist. Es ist zweifelhaft, ob auch in der endlichen Welt bei der tatsächlich ungleichmäßigen Dichte das Machsche Prinzip, im Sinne von Bestimmtheit des G-Feldes allein durch die $T_{\mu\nu}$, erfüllt ist.

II. 1. Aus den gleichen Gründen wie die Auszeichnung eines Mittelgebiets im Raum oder einer Zeitlinie ist die einer Zeitrichtung unbefriedigend. Unter kosmologischer Erfüllung eines Relativitätspostulats ist zu verstehen, daß im konkreten Kosmos in der betrachteten Hinsicht keine Auszeichnung besteht. Es ist kosmologische Erfüllung des speziellen Relativitätsprinzips zu fordern.

2. Unter einer ungleichmäßig quasieuklidischen Riemannschen Mannigfaltigkeit wird eine solche verstanden, in der *kein* Koordinatensystem für die *ganze* Mannigfaltigkeit möglich ist, derart, daß überall — mit Ausnahme von Gebieten, deren Volumensumme dividiert durch das Volumen immer größerer umschließender Gebiete gegen Null strebt — für jedes ε $|g_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu}| < \varepsilon$; in der sich aber zu jedem (noch so großen) Volumen V und jeder (noch so kleinen) positiven Zahl ε überall in der Mannigfaltigkeit, mit Ausnahme von Gebieten der oben genannten Art, ein Gebiet $V' > V$ finden läßt, in dem ein Koordinatensystem möglich ist, derart, daß überall in V' (oder höchstens mit relativ zu V' in summa beliebig kleinen Ausnahmegebieten) $|g_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu}| < \varepsilon$.

3. In einer ungleichmäßig quasiminkowskischen Mannigfaltigkeit ist eine völlig unstatische, mechanisch stabile, molekularhierarchische Welt möglich. Besonders vorzuziehen ist die dynamisch ähnliche, in der Massen, Längen, Zeiten proportional sind.

III. 1. Manche physikalischen Verhältnisse in einem ungleichmäßig quasieuklidischen Raume lassen sich erläutern durch Betrachtung eines vereinfachten Modells eines zentrischsymmetrischen statischen Systems konzentrischer mit unkompressibler Flüssigkeit erfüllter Kugeln (K_n) und größerer Hohlräume (H_n), so daß jede folgende Voll- oder Hohlkugel viel größer als die vorangehende ist und für die Massen M_n der K_n $\frac{\varkappa M_n}{l_n} = \text{const}$ (klein gegen 1) und $\frac{M_n}{M_{n+1}} = \text{const}$ ist. Es gilt dann immer in einer gegen K_n großen Umgebung von K_n mit großer Annäherung die räumliche Metrik der Schwarzschildschen Lösung für den leeren Raum, innerhalb der erfüllten Räume die sphärische Geometrie mit für größere Kugeln immer größerem Krümmungsradius. g_{44} wird für $r = \infty$ unendlich. In einem Koordinatensystem mit $g =$ const ist also im Unendlichen $g_{ik} = 0$, $g_{44} = \infty$. Ebenso wie in der wirklich angenommenen, ungleichmäßig quasiminkowskischen Welt herrscht auch in diesem Modell kosmologische Erfüllung des Äquivalenzprinzips.

2. Diese geht so weit, daß bei Erteilung der gleichen Beschleunigung an alle Kugeln des Modells von der n-ten abwärts, bei genügend großem n K_1 gegenüber seinem lokalen Galileifeld keine merkliche Beschleunigung besitzt. Es lassen sich also in diesem Modell die sonst kleinen Effekte summieren.

3. Wenn wir M_n ein wenig stärker wachsen lassen und die K_1 sich immer mehr elliptischen oder halben sphärischen Räumen nähern, ohne daß es doch je zur Geschlossenheit kommt, dann besteht eine beliebig weitgehende Annäherung an die Erfüllung des Machschen Prinzips in dem Sinne, in dem es in der endlichen Welt erfüllt ist. Doch wird eine solche unendliche Welt vom Verf. nicht wirklich angenommen, der vielmehr das dynamisch ähnliche System vorzieht.

IV. Gegen die Unendlichkeit des Raumes läßt sich, außer etwa einige mit dem Machschen Prinzip zusammenhängende Argumente, deren Beurteilung Auffassungssache bleibt, nichts vorbringen.

Für die Unendlichkeit des Raumes spricht:

1. Größere Einfachheit des euklidischen Raumes bzw. der Minkowskiwelt als des endlichen Raumes bzw. der Zylinderwelt.
2. Möglichkeit der Relativität der Größe, die am vollkommensten in der dynamisch ähnlichen molekularhierarchischen Welt besteht.
3. Möglichkeit der „kosmologischen Erfüllung“ des speziellen Relativitätsprinzips.
4. Notwendigkeit ungleichmäßiger Dichte und — in Verbindung mit dem Ausschluß eines Mittelpunktes — einer Materieverteilung, wie sie die Erfahrung zeigt.

Wien, den 9. Juni 1923.

(Eingegangen 11. Juni 1923).

2. *Über die photographische Wirkung der Kanalstrahlen;*

von M. Jakobson.

Die photographische Platte wurde zum erstenmal von Königsberger und Kutschewski im Jahre 1910[1]) ins Innere eines Kanalstrahlenrohres eingeführt und der Einwirkung von Kanalstrahlen ausgesetzt. Seitdem haben Thomson[2]) und andere bei der Beobachtung von Parabeln, welche von Kanalstrahlen nach dem Durchgang durch ein magnetisches und elektrisches Feld geliefert werden, fast ausschließlich die photographischen Einwirkungen dieser Strahlen benutzt. Die Methode der Parabeln ermöglicht es, wie bekannt, die qualitative Analyse einer Gasmischung auszuführen. Wenn die Gesetze der photographischen Wirkung der Kanalstrahlen bekannt wären, d. h. die Abhängigkeit der von ihnen hervorgerufenen Schwärzung von der Anzahl und Art der Teilchen, ihrer Ladung, Geschwindigkeit usw., so könnte man daran denken, durch Messung der Schwärzung einzelner Parabeln die verhältnismäßige Anzahl der Partikelchen verschiedener Gattung, die sich in der Röhre befinden, festzustellen, d. h. man könnte nicht nur eine qualitative, sondern auch eine quantitative Analyse einer Gasmischung ausführen. Einige Gesetze der photographischen Wirkung von Kanalstrahlen sind von Königsberger und Kutschewski[3]) in ihrer Arbeit über den Durchgang von Kanalstrahlen durch Gase festgestellt. Allein die von ihnen erzielten Resultate können nicht für völlig einwandfrei gelten, da sie auf ziemlich beschränktem Versuchsmaterial beruhen und zum Teil auf indirektem Wege erhalten wurden. In Anbetracht dessen habe ich im Sommer

---

1) Königsberger u. Kutschewski, Phys. Zeitschr. 11. S. 666. 1910.

2) J. J. Thomson, Phil. Mag. (6) 21. S. 225—249. 1911.

3) Königsberger u. Kutschewski, Ann. d. Phys. 37. S. 161. 1912.

1914 auf Anregung und unter Anleitung von Prof. W. Wien im physikalischen Institut der Universität Würzburg eine Untersuchung der Wirkung von Kanalstrahlen auf lichtempfindliche Schichten unternommen. Meine Arbeit wurde durch den Beginn des Krieges unterbrochen und die erzielten Resultate in Petersburg bearbeitet.

Die Versuchsanordnung.

Die allerwichtigsten Teile meiner endgültigen Versuchsanordnung, mit der die Mehrzahl der unten aufgeführten Resultate erzielt wurden, sind in Fig. 1 dargestellt. In der eisernen Kathode *Kt*, die an der der Entladungsröhre *L* zugekehrten Seite mit einer Aluminiumplatte bedeckt ist, befindet sich ein zylindrischer Kanal von 6 cm Länge und 1 mm Durchmesser. Nach dem Austritt aus diesem Kanal gehen die Kanalstrahlen durch die Blende *D*, deren Öffnung ebenfalls einen Durchmesser von 1 mm besitzt, und ferner zwischen den Plättchen des Kondensators *E* (Größe 1,5 × 1,5 cm, Abstand zwischen den Plättchen 3,31 mm) hindurch. Zwischen den Enden der eisernen Zylinder *MM* kann ein magnetisches Feld oder ein zweites (horizontales) elektrisches Feld erzeugt werden. Eine schaufelförmige Aluminiumplatte *V*, die vermittelst des Griffes S_2 in einem Schliff drehbar ist, dient als Schirm: Dreht man den Griff um 90°, so kann man entweder ein Strahlenbündel durch die Öffnung *D* und weiterhin durchlassen, oder ihm völlig den Weg versperren. *G* bezeichnet eine Seitenröhre, welche zur Gaedepumpe führt.

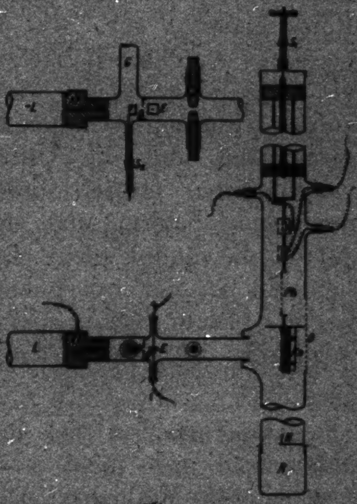


Fig. 1.

Die Glasröhre, welche alle diese Teile aufnimmt, war (vermittelst Chotymskikitt) mit einer vertikalen Messingröhre luftdicht verbunden. In dieser Röhre konnte vermittelst des Schliffes S_1 und einer Schraube eine an der Schraubenmutter befestigte vertikale Stange gehoben und gesenkt werden;

an dieser Stange war eine Faradayauffänger F, ein Thermoelement T, ein phosphoreszierender Schirm aus Willemit Ph und eine photographische Kamera Ka angebracht; in letzterer konnten fünf bis sechs Platten von $4^1/_2 \times 6$ cm Größe aufgenommen werden. Diese Platten lagen in Blechkassetten, welche am unteren Rande viereckige Ösen besaßen. Wenn die Kamera mit den Kassetten durch Drehung der Schraube herabgelassen wurde, trat das an der Röhre befestigte Häkchen H in die Öse der vorderen Kassetten und beim Heraufsteigen der Kamera wurde die erste Kassette mit der exponierten Platte aus der Kamera herausgezogen und fiel in das abnehmbare Reservoir R, das durch Bajonettverschluß und Picein an dem Rohre befestigt war. Auf diese Weise ist man imstande, fünf bis sechs Aufnahmen nacheinander zu machen, ohne Luft in die Röhre einzulassen. An der Stelle, wo das Strahlenbündel auffällt, war ein Teil der Hinterwand der Messingröhre ausgeschnitten und die Öffnung mit einem Glasfensterchen verschlossen. Durch dieses Fenster wurde der phosphoreszierende Schirm und eine vertikale Millimeterskala (die auf der Zeichnung nicht eingetragen ist) beobachtet, auf der sich ein an der beweglichen Stange befestigter Zeiger bewegte. Diese Skala mit dem Zeiger diente dazu, die Bewegungen des Thermoelements und des Faradayauffängers zu messen.

Das Verfahren bei der Erzeugung der Kanalstrahlen unterschied sich nicht von den von Prof. W. Wien ausgearbeiteten Methoden: Das Gas trat aus einem Behälter mit regulierbarem Druck durch eine lange, dünne Kapillarröhre in die Entladungsröhre und wurde während der ganzen Zeit vermittelst der Gaedepumpe (durch das Rohr G) hinter der Kathode ausgepumpt. Der gewünschte Druck wurde im Entladungs- und Kanalstrahlenrohr durch Regulierung des Druckes im Gasbehälter und durch die Drehungsgeschwindigkeit der Gaedepumpe erhalten. Indem nun die Drehungsgeschwindigkeit der Pumpe und der Druck im Gasbehälter konstant erhalten wurden, konnte man den Gasdruck in der Röhre ebenfalls fast unbeschränkt lange konstant erhalten. Der auf den weiter unten aufgeführten Aufnahmen mit p bezeichnete Druck im Kanalstrahlenrohr wurde vermittelst eines Mc Leodmanometers gemessen. Alle unten angeführten Ergebnisse sind mit Wasserstoff[1]) ausgeführt, der im Kippschen Apparat erzeugt und sorgfältig durch Phosphorpentoxyd getrocknet wurde. Die Trockengefäße mit Phosphorpentoxyd waren außerdem an mehreren anderen Stellen dem Apparat angeschlossen. Die Quecksilbesdämpfe wurden durch Kühlung mittels fester Kohlensäure in Aceton ferngehalten.

Eine Influenzmaschine diente als Energiequelle; sie wurde durch einen Elektromotor in Bewegung gesetzt. Zur Kontrolle der Beständigkeit der Ladung wurde die Stärke des Ladungsstromes I vermittelst eines Mikroamperemeters gemessen. Die Entladungsspannung wurde vermittelst einer Parallelfunkenstrecke zwischen Messingkugeln von 1 cm Durchmesser gemessen. Die Funkenlänge in Millimetern ist in den Aufnahmen mit dem Buchstaben f bezeichnet. Das elektrische Feld E wurde vermittelst einer Batterie kleiner Akkumulatoren erzielt. In den Aufnahmen ist die Spannungsdifferenz V auch der Kondensatorplatten in Volt angegeben; die Feldstärke ist stets 3,3 mal größer.

Das photographische Material und seine Bearbeitung.

Königsberger und Kutschewski benutzten bei ihrer ersten Arbeit das kohlenmatte Papier Velox (Velox Regular Carbon), bei der zweiten aber Velox Velvet. Warum sie die Papiere den Platten vorzogen, wird nirgends angegeben; wahrscheinlich lag der Grund darin, daß schwache Schwärzungen, wie sie bei kurzen Expositionen von Kanalstrahlen erzeugt werden, deutlicher bei auffallendem Licht auf dem weißen Papieruntergrunde hervortreten, als bei dem durchfallenden Licht auf Platten. Andererseits ist aber die Photometrie auf Papier viel schwieriger und kann mit weit geringerer Genauigkeit ausgeführt werden, als die Photometrie der Schwärzungen auf Platten. In Anbetracht dessen habe ich, obgleich ich einige Versuche mit den Papieren Velox vornahm, um die Resultate von Königsberger und Kutschewski zu prüfen, mich von Anfang an bemüht, Platten zu finden, auf welchen man bequem zu messende Schwärzungen erhalten konnte. Nach einigen Vorversuchen entschied ich

---

1) Bei den Vorversuchen wurden einige Beobachtungen mit Sauerstoff und Luft ausgeführt, doch gelang es nicht, dieselben zu wiederholen bei den endgültigen Versuchen.

mich für die Chlorbromsilber-Diapositivplatten von Perutz, deren Schicht ähnliche Eigenschaften aufweist, wie die Papierschichten; Velox ist in der Tat nur etwa zehnmal empfindlicher. Das Papier Velox kann überhaupt nicht für das allerbeste Material, selbst unter den Papieren, gelten; so z. B. besitzt das Papier Ridox der Firma Gevaert eine ebenso starke Empfindlichkeit für Kanalstrahlen, wie die Papiere Velox, ist aber viel weniger kapriziös bei der Entwicklung.

Alle Aufnahmen wurden mit dem Metholhydrochinonentwickler entwickelt, welcher nach der Gebrauchsanweisung, die den Papieren Velox beigelegt ist, hergestellt wurde; nur der Gehalt an Bromkali mußte etwas erhöht werden, um auf den Papieren Velox rein weiße und schwarze Töne zu erhalten. Alle Platten und Papieraufnahmen einer Serie wurden in ein und derselben Wanne entwickelt. Zuerst gelangten die Aufnahmen auf einige Minuten in ein Bad von destilliertem Wasser, darauf wurde das Wasser abgegossen und die Aufnahmen schnell mit dem Entwickler übergossen. Die Entwicklung der Papiere wurde 20—25 Sekunden fortgesetzt, die der Platten etwas länger. Nach Beendigung der Entwicklung wurde die Entwicklerlösung rasch abgegossen und die Aufnahmen etwa eine Minute im strömenden Wasser gewaschen, darauf in saurem Fixierbad fixiert und sorgfältig gewaschen.

Die Trennung der unmittelbaren Wirkung der Kanalstrahlen von der Einwirkung des von ihnen ausgesandten Lichtes.

In Anbetracht dessen, daß bei den Druckverhältnissen, bei denen ich arbeitete, das von den Kanalstrahlen im Gase erzeugte Leuchten noch bemerkbar war, mußte vor allem festgestellt werden, welcher Teil der im allgemeinen erhaltenen Schwärzung der unmittelbaren Einwirkung der Kanalstrahlen zuzuschreiben ist, und welcher Anteil dieser Schwärzung durch das Leuchten der Kanalstrahlenteilchen und der von ihnen getroffenen Moleküle hervorgerufen wird.

Zu diesem Zwecke wurden in die Kamera einige Platten in verkehrter Lage eingeführt, d. h. in der Weise, daß den Kanalstrahlenbündeln die reinen Glasflächen zugekehrt waren; auf diese Weise wurde die unmittelbare Einwirkung der Kanalstrahlen ausgeschlossen, da durch das Glas offenbar nur Lichtstrahlen wirken konnten; die Dicke der Platten überstieg nicht 0,9 mm, folglich konnte eine Absorption des Lichtes nur in höchst geringem Grade stattfinden.[1])

Einige Versuche wurden mit den Papieren Velox Carbon, die mit dünnen Glasplatten überdeckt wurden, angestellt. Jedesmal wurden unmittelbar nacheinander zwei Aufnahmen unter völlig gleichen Bedingungen ausgeführt (ohne den Apparat zu öffnen), eine unmittelbar auf die lichtempfindliche Schicht, die andere durch Glas.

Die Versuche mit den Papieren Velox bewiesen, daß auf dieselben bei allen mir zu Gebote stehenden Druckverhältnissen (zwischen 0,0015 und 0,0025 mm) und bei allen von mir angewandten Expositionen die Einwirkung des von den Kanalstrahlen erzeugten *Lichtes* gleich Null ist: Bei einer Expositionsdauer von 10 Minuten zeigten sich bei Glasplatten keinerlei Schwärzungsspuren, nach einer Expositionsdauer von 60 Minuten ergab sich erst nach einer Entwicklungsdauer von 3 Minuten statt der üblichen 20—25 Sekunden) eine kaum merkliche Schwärzung. Folglich rühren alle von mir mit dem Papier Velox gemachten Aufnahmen unbedingt nur von der unmittelbaren Einwirkung der Kanalstrahlen her.

Was nun die Diapositivplatten von Perutz betrifft, so ist bei ihnen die Einwirkung des von den Kanalstrahlen erzeugten Lichtes schon bemerkbarer. Jedoch auch hier kann der Einwirkung der Leuchtstrahlen bei geringer Expositionsdauer keine Beachtung geschenkt werden im Vergleich zur unmittelbaren Einwirkung der Kanalstrahlen; so sieht man z. B. auf den in Fig. 2 dargestellten Aufnahmen, daß, während die Lichteinwirkung (Aufnahme Nr. 24) erst bei einer Expositionsdauer von 30 Sekunden und mehr hervortritt, die Kanalstrahlen selbst (Aufnahmen Nr. 22 und 23) schon Schwärzungen bei bedeutend geringerer Expositionsdauer hervorrufen.[2]) Wie man jedoch aus denselben Aufnahmen ersieht, *nimmt die Schwärzung, die von der unmittelbaren Einwirkung der Kanalstrahlen hervorgerufen wird, mit wachsender Expositions-*

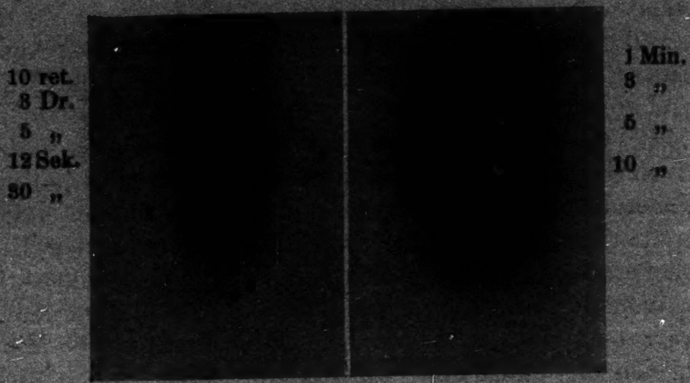
---

[1]) Die von mir beabsichtigte Aufnahme durch eine Quarzplatte konnte nicht mehr zur Ausführung gelangen; in jedem Falle kann jedoch die Einwirkung von ultravioletten Strahlen die Größenordnung der Schwärzung nicht ändern.

[2]) Expositionen von 1, 3 und 5 Dr. entsprechen annähernd $^1/_2$, $^1/_3$ und 1 Sekunde.

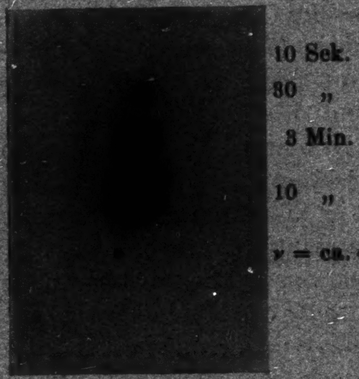
dauer viel langsamer zu, als die durch das Licht derselben erzeugte Schwärzung. Danach ließe sich erwarten, daß bei

Nr. 22 Nr. 23



$p = 0{,}016$ $p = 0{,}0020$
$f = 10$ mm $f = 10^1/_4$ mm
$\nu =$ ca. 420 Volt $\nu =$ ca. 420 Volt

Nr. 24



$\nu =$ ca. 420 Volt

$f = 10^1/_2$ mm
$p = 0{,}0018$

Fig. 2. **Diapositiv durch die Glasseite.**

größerer Expositionsdauer, wenn die Einwirkung des Leuchtens der Kanalstrahlen schon bedeutend deren unmittelbare Einwirkung übersteigt, die Einwirkung des Lichtes durch Überdeckung der unmittelbaren Einwirkung der Kanalstrahlen merklich die Darstellung letzterer erschweren müßte. Es stellt sich jedoch heraus, daß bei gleichzeitigem Auffallen von Kanalstrahlen und ihres Lichtes auf die Platte *die Gesamteinwirkung stets kleiner ist, als die vom Licht allein hervorgerufene Einwirkung.*[1] So z. B. erhält man bei der Aufnahme Nr. 24, Fig. 2 (mit Glasbedeckung), bei einer Expositionsdauer von 30 Sekunden eine Schwärzung, welche bei der Messung (s. unten) = 0,25 sich ergab, bei der entsprechenden Aufnahme Nr. 22 mit gleichzeitiger Einwirkung der Kanalstrahlen und ihres Lichtes und bei gleicher Expositionsdauer nur = 0,22. Bei einer Expositionsdauer von einer Minute in der Aufnahme Nr. 23 bei gleichzeitiger Einwirkung = 0,30, vom Licht allein, ausgerechnet aus der Interpollation zweier benachbarter Schwärzungen = 0,38. Außerdem ist die Größe des geschwärzten Kreises bei gleichzeitiger Einwirkung der Strahlen selbst und ihres Lichtes, die bei jeder Expositionsdauer ein und dieselbe bleibt (und zwar stets gleich dem Querdurchmesser des Kanalstrahlenbündels) *stets kleiner* als die Schwärzungskreise des Lichtes allein, das von diesen Strahlen erzeugt wird, und deren Größe mit der Expositionsdauer wächst.

Alles das spricht dafür, daß beim gleichzeitigen Auffallen von Kanalstrahlen und ihrem Licht auf eine photographische Platte *hauptsächlich nur die Strahlen selbst wirken.* Dieser Umstand ist nicht nur deshalb von Wichtigkeit, weil er gestattet, bei der Untersuchung der photographischen Wirkung von Kanalstrahlen die Einwirkung ihres Lichtes überhaupt nicht in Rechnung zu stellen, er beleuchtet auch schon gewissermaßen den Charakter der Kanalstrahleneinwirkung auf lichtempfindliche Schichten: Es ist augenscheinlich, daß die Veränderungen, die von Kanalstrahlteilchen beim Aufprallen auf Silberpartikelchen ausgeübt werden, der Art sind, daß letztere dadurch die Fähigkeit einbüßen, sich unter der Einwirkung von Lichtstrahlen zu verändern.

---

[1] Es sind Fälle bekannt, wo auf einer photographischen Platte bei *aufeinanderfolgender* Einwirkung verschiedenartiger Energien ihre Gesamteinwirkung kleiner ist, als die Summe der Einwirkungen, die jede Energieart, selbständig wirkend, erzeugt hätte. Vgl. z. B. R. W. Wood, Astrophys. Journ. 17. S. 361. 1903, und M. Volmer, Phot. Umkehrerscheinungen, Dissert. Leipzig 1910. Hier jedoch wirken beide Energiearten *gleichzeitig.*

Der Gesamtcharakter der photographischen Einwirkung von Kanalstrahlen.

Bei der Untersuchung der Abhängigkeit der photographischen Einwirkung von Kanalstrahlen von der Expositionsdauer ergab sich, daß man dabei drei Stadien zu unterscheiden hat.

I. Bei geringer Expositionsdauer verursachen die Kanalstrahlen nur eine Schwärzung, die sich grundsätzlich in nichts von den durch das Licht hervorgerufenen Schwärzungen unterscheidet. Bei verlängerter Expositionsdauer wächst diese Schwärzung, jedoch nur bis zu einer gewissen Grenze. Diese von den Kanalstrahlen erzeugten Maximalschwärzungen sind sind jedoch stets viel schwächer als die Schwärzungen, die man auf denselben Platten durch Lichteinwirkung erhalten kann. Offenbar dringen die Kanalstrahlen nur in geringe Tiefen der lichtempfindlichen Schicht.

II. Bei längerer Expositionsdauer tritt eine Erscheinung auf, die dem äußeren Ansehen nach ähnlich ist der Solarisation, wie sie bei andauernder Einwirkung intensiver Lichtquellen beobachtet wird: Im Mittelpunkt des schwarzen Fleckes, an der Stelle, wo die allerintensivsten Teile des Kanalstrahlenbündels auffallen, erscheint nach der Entwicklung ein weißer Fleck. Diese Solarisationserscheinung wird schon von Königsberger nnd Kutschewski[1]) beobachtet.

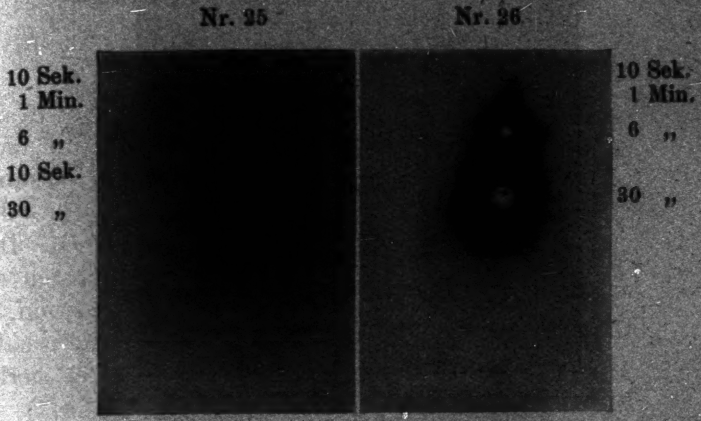
III. Endlich, wenn die Expositionsdauer noch weiter verlängert wird, tritt das dritte, bisher bei den photographischen Einwirkungen von Kanalstrahlen noch nicht beobachtete Stadium ein: Innerhalb des weißen Fleckes treten nach der Entwicklung inselartige Schwärzungen auf.

In Figg. 2 und 3 sind Aufnahmen abgebildet, auf denen alle drei Stadien vorhanden sind. Die Aufnahmen Nr. 22—24 sind mit Diapositivplatten von Perutz hergestellt, Nr. 25 auf Regular Carbon Veloxpapier, Nr. 26 auf Velvet Veloxpapier. Auf der Aufnahme Nr. 26 befinden sich nur die beiden ersten Stadien; um das dritte Stadium auf diesem gegen Kanalstrahlen weniger empfindlichen Papier zu erhalten, bedarf es einer größeren Expositionsdauer.

---

1) Königsberger u. Kutschewski, Phys. Zeitschr., a. a. O.

Für Messungszwecke wie sie am Anfang dieser Arbeit geplant wurden, eignet sich offenbar nur das erste Stadium der Einwirkung von Kanalstrahlen, bei welcher nur eine



Regular Velox
$p = 0{,}0235$ mm Hg
$f = 5^3/_4$—6 mm
$J = 6 \times 10^{-5}$ Amp.
bis $6^1/_2$

Velvet Velox
$p = 0{,}002$ mm Hg
$f = 6-6^3/_4$ mm
$J = 6^3/_4 \times 10^{-5}$ Amp.
u. 6

Fig. 3.

Schwärzung auftritt. Hier bedarf jedoch für Messungszwecke die photographische Schwärzung des Vergleichs mit gemessenen Intensitäten der Strahlen. Wir wollen uns mit den Resultaten einer näheren Erforschung des zweiten und dritten Stadiums befassen, weil für die Aufklärung des Mechanismus der Wirkung von Kanalstrahlen auf lichtempfindliche Silbersalze diese Stadien viel mehr Material liefern als das erste.

Die Aufnahmen des zweiten Stadiums sehen alle unter dem Mikroskop Kratern mit ausgefransten Rändern ähnlich. Die weißen Stellen sind noch viel heller als die Teile der Platten und Papiere, die gar nicht der Einwirkung von Strahlen ausgesetzt waren. *Vor der Entwicklung erscheinen die Stellen, welche nach der Entwicklung weiß werden, schwarz.* Wenn man die Platten vor der Entwicklung bei schräg auffallendem Licht betrachtet, so sieht man, daß an den geschwärzten Stellen die Schicht gleichsam eingedrückt ist. Auf den entwickelten und getrockneten Platten sind diese Vertiefungen nicht zu bemerken. Diese Tatsache beweist, daß das zweite

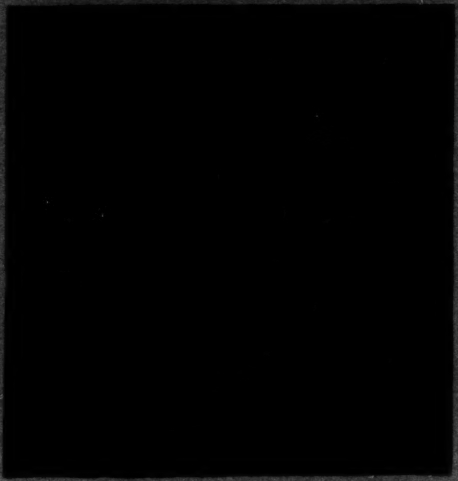


Fig. 4.

Fig. 5.

Stadium der Einwirkung von Kanalstrahlen auf photographische Platten durchaus nicht mit der gewöhnlichen Solarisation bei der Einwirkung von Lichtstrahlen identisch ist.

Die schwarzen Bildungen innerhalb der weißen Flecke während des dritten Stadiums der Einwirkung von Kanalstrahlen weisen fast alle unter dem Mikroskop eine kristallinische Struktur auf; sie haben gewöhnlich das Aussehen kleiner, schwarzer, aneinander hängender Kreuzchen, welche offenbar kleine Oktaeder darstellen. In Figg. 4, 5, 6 sind mehrere solcher Aufnahmen in starker Vergrößerung aufgeführt. Auf der ersten ist die kristallinische Anordnung nur schwach angedeutet, aber auf den beiden letzteren tritt sie deutlicher hervor. In allen Fällen sind diese schwarzen Bildungen mit einer äußerst dünnen Gelatinehülle überdeckt.[1]) An den Stellen der weißen Solarisationsflecke, wo diese Hülle fehlt, gibt es auch keine Kreuzchen.

Fig. 6.

Auf Grund aller dieser Tatsachen können wir uns folgende Vorstellung von dem Mechanismus der Einwirkung der Kanalstrahlen auf eine photographische Platte machen. Anfangs bei kurzer Expositionsdauer ist die Einwirkung von Kanalstrahlen ähnlich der Einwirkung von Lichtstrahlen; diese Einwirkung wächst mit verlängerter Expositionsdauer so lange, bis von den Strahlen alle lichtempfindlichen Teilchen getroffen sind, welche in der Schichtdicke der photographischen Platte liegen, in welche die Kanalstrahlen noch eindringen können. Sobald das erreicht ist, tritt offenbar die Maximalschwärzung ein. Die absolute Größe der Maximalschwärzung ist nur gering, da die Kanalstrahlen überhaupt nicht tief in die photographische Schicht eindringen können. Bei fortlaufender Expositionsdauer (zweites Stadium) beginnt offenbar eine Zerstäubung der oberen Schicht, ein Erweichen und Mürbewerden der Gelatine, wobei die Molekeln des Chlor- und Bromsilbers der oberen Schicht wahrscheinlich unter dem Einfluß der unmittelbaren Stöße der Kanalstrahlenteilchen in die Atome von Silber und der Haloide gespalten werden: Auf diese Weise entsteht eine Vertiefung, deren Boden mit freiem schwarzem Silber bedeckt ist, das nur von mürbe gewordener Gelatine umhüllt wird, welche bei der nachfolgenden Entwicklung das Silber nicht zurückzuhalten vermag. Im Endresultat (nach Entwicklung und Fixierung) erhält man eine Gelatineschicht, die nur eine sehr geringe Menge von Silbersalz enthält und die dünner ist als die Teile der lichtempfindlichen Schicht, welche keinerlei Einwirkungen erfahren haben, die daher auch durchsichtiger erscheint. Endlich im dritten Stadium bei langandauernder Exposition muß die Gelatine eine Veränderung erfahren, durch die sie wieder eine größere Haltbarkeit erhält und infolgedessen sie die unter ihr befindlichen Silberkristalle (die durch die Stöße der Kanalstrahlen entstanden waren) vor der Beseitigung durch die nachfolgende Entwicklung schützen kann.

---

[1]) Leider sind in der gedruckten Wiedergabe nur die oberen Ränder dieser Hüllen in Figg. 5 und 6 zu sehen.

(Eingegangen 19. August 1923.)

3. *Zur Kirchhoffschen Beugungstheorie*[1]; *von A. Rubinowicz.*

Stellt man sich auf den Standpunkt der elektromagnetischen Lichttheorie, so sind Beugungsprobleme als Randwertaufgaben im Gebiete der Maxwellschen Differentialgleichungen aufzufassen. Bekanntlich ist es aber bisher nur in einigen ganz speziellen Fällen gelungen, von dieser Problemstellung ausgehend, „strenge" Lösungen in einer nicht übermäßig schwer diskutierbaren, für den Physiker hinreichend durchsichtigen Gestalt anzugeben. In den meisten Fällen ist man nach wie vor auf die aus dem Kirchhoff-Huygensschen Prinzip gewonnenen, „angenäherten" Lösungen angewiesen. In jedem einzelnen speziellen Falle steht man dann der Aufgabe gegenüber, ein Flächenintegral, das eine Funktion im Raume definiert, so umzuformen, daß es sich numerisch auswerten läßt und den Funktionsverlauf zu überblicken gestattet. Nun kann man das Kirchhoffsche Integral im wesentlichen in ein Kurvenintegral umformen, und da im allgemeinen ein Kurvenintegral mathematisch leichter zu handhaben ist als ein Flächenintegral, so entsteht die Frage, ob man nicht aus dieser Umformung des Kirchhoffschen Integrales Vorteile bei der Behandlung spezieller Beugungsprobleme gewinnen könnte. Im folgenden will ich versuchen, zu zeigen, daß dies tatsächlich der Fall ist und daß sich überdies auf diesem Wege ein Einblick in den Mechanismus des Zustandekommens der Beugungserscheinungen gewinnen läßt, der es in gewissen Fällen auch bei komplizierteren Beugungsproblemen gestattet, die zu beobachtenden Erscheinungen einfach zu überblicken.

§ 1. Umformung des Kirchhoffschen Beugungsintegrals.

Der Einfachheit halber beschränken wir uns im folgenden auf Vorgänge, wie sie sich bei Vorhandensein einer punktförmigen monochromatischen Lichtquelle abspielen, die Licht von der Wellenlänge λ aussendet. Setzen wir $k = 2\pi/\lambda$ und bezeichnen mit R den Abstand eines Aufpunktes Q von der Lichtquelle L, so soll das von L ausgesendete Licht bis auf einen Zeitfaktor durch $\frac{e^{ikR}}{R}$ bestimmt sein. Ist ferner F irgendeine den beugenden Rand B überspannende Fläche, so wird, ebenfalls bis auf den gleichen Zeitfaktor, nach dem Kirchhoff-Huygensschen Prinzipe die Lichtverteilung auf der Schattenseite eines dem beugenden Rande B entsprechenden „schwarzen" Schirmes durch das Integral

---

[1] Im Auszuge vorgetragen in der physikalischen Gesellschaft zu Kopenhagen am 15. Mai 1922.

$$u = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_F \left\{ \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{ik\varrho}}{\varrho} \right) \frac{e^{ikr}}{r} \right\} df \tag{1}$$

gegeben, wo df ein Flächenelement auf der Fläche F, r und ϱ den Abstand des Flächenelementes df vom betrachteten Aufpunkt Q bzw. von der Lichtquelle L und $\partial/\partial n$ die Ableitung nach der Normalen n der Fläche F bezeichnet. Der einfachen und anschaulichen Ausdrucksweise wegen setzen wir hier und im folgenden immer voraus, daß es sich um die Beugung an einem einzigen Loche handelt.

Da u für jede dem beugenden Rande B entsprechende Fläche F den gleichen Wert hat, so kann die Funktion u ausschließlich nur von der Lage des Lichtpunktes L und der Gestalt und Lage des beugenden Randes B abhängen. Dies legt die Vermutung nahe, daß unsere durch ein Flächenintegral über die Fläche F dargestellte Funktion u sich in eine Form bringen lassen muß, wo der nähere Verlauf der Fläche F keine Rolle mehr spielt und nur die die Funktion u in Wirklichkeit bestimmenden Parameter explizit auftreten. Eine solche Umformung von u läßt sich nun in der Tat bewerkstelligen[1]) und liefert ein auch in physikalischer Hinsicht interessantes Resultat, nämlich die Zerlegung der den Beugungsvorgang beschreibenden Funktion u in eine im Sinne der geometrischen Optik zu definierende „einfallende Lichtwelle" u_E und eine vom Schirmrand ausgehende „Beugungswelle" u_B, so daß

$$u = u_E + u_B\,.$$

Die einfallende Lichtwelle u_E wird dabei auf der Schattenseite des Schirmes innerhalb eines Kegels („Lichtkegel" oder

---

[1]) **A. Rubinowicz**, Ann. d. Phys. 53. S. 258. 1917. Vgl. auch **G. A. Maggi**, Ann. di Matem. 16. S. 21. 1888.

„Lichtraum“), den eine durch den Lichtpunkt L hindurchgehende Gerade beim Umlaufen des beugenden Randes B beschreibt, durch $\frac{e^{ikR}}{R}$ gegeben, während sie außerhalb dieses Kegels 0 zu setzen ist. u_E stellt somit eine Funktion dar, die auf dem eben definierten Kegel, der „Schattengrenze“, unstetig ist.

u_B ist durch das über den beugenden Rand erstreckte Integral

$$u_B = \frac{1}{4\pi}\int\limits_B \frac{e^{ik\varrho}}{\varrho}\cdot\frac{e^{ikr}}{r}\cdot\frac{\cos(n,r)}{1+\cos(r,\varrho)}\sin(\varrho, ds)\, ds \tag{2}$$

definiert, wo ds ein Linienelement des beugenden Randes B bedeutet, ϱ und r die Entfernungen von der Lichtquelle L bzw. dem Aufpunkt Q zum Randelement ds sind und n die auf ds und ϱ senkrecht stehende, in den Innenraum des Lichtkegels weisende Richtung ist. Da $u = u_E + u_B$ eine in der Schattengrenze stetige Funktion ist, u_E aber hier einen Sprung erleidet, so muß auch u_B hier einen Sprung haben, der den von u_E gerade kompensiert. Mit dieser Unstetigkeit von u_B hängt die Tatsache eng zusammen, daß die von einem bestimmten Randelement ausgestrahlte Lichtwelle im allgemeinen bei der Annäherung an die in der Schattengrenze liegende Fortsetzung der Verbindungsgeraden: „Lichtquelle-Randelement ds“ unendlich wird. Dies wird trotz des im allgemeinen gleichzeitig verschwindenden $\cos(n, r)$ durch den Nenner $1 + \cos(r, \varrho)$ bewirkt.

§ 2. Beugungswelle in weiterem Abstande von der Schattengrenze.

Zunächst leiten wir für die Beugungswelle u_B eine angenäherte Darstellung ab, die nur in Raumpunkten in weiterer Entfernung von der Schattengrenze gilt. Setzen wir $\zeta = r + \varrho$, so wird u_B die Form haben:

$$u_B = \int\limits_B e^{ik\zeta} f(s)\, ds, \quad \text{wo } f(s) = \frac{1}{4\pi\varrho r}\,\frac{\cos(n,r)}{1+\cos(r,\varrho)}\sin(\varrho, ds) \tag{3}$$

von k nicht abhängt, und im allgemeinen sich mit s langsam ändert. Nur für Raumpunkte in der Nähe der Schattengrenze kann $f(s)$ wegen des Nenners $1 + \cos(r, \varrho)$ nicht als langsam veränderlich angesehen werden. Diese Raumpunkte sollen jedoch in den Betrachtungen dieses Paragraphen nicht berücksichtigt werden. Der Faktor $e^{ik\zeta}$ wird nun im Hinblick darauf, daß k eine große Zahl ist, an allen Stellen des beugenden Randes, mit Ausnahme der Punkte P_ν, wo ζ als Funktion von s betrachtet einen stationären Wert hat, wo also $d\zeta/ds = 0$ ist, rasch oszillieren, so daß immer nur eine gewisse Umgebung jedes dieser Ausnahmspunkte P_ν einen merklichen Beitrag zu dem Integral (3) liefern wird. Einen solchen Bereich um den Punkt P_ν wollen wir der Kürze halber als „wirksame Umgebung“ dieses Punktes bezeichnen. Physikalisch bedeutet dies, daß die einem bestimmten Raumpunkte vom beugenden Rande zugestrahlten Elementarwellen im allgemeinen ihre Phasen so rasch ändern, daß sie sich gegenseitig durch Interferenz in erster Näherung zerstören und nur die wirksamen Umgebungen der Punkte P_ν, wo die Phasen sich langsam ändern, zur Geltung kommen können.

Nun soll der Beitrag $u_B|_\nu$, den die wirksame Umgebung eines bestimmten Punktes P_ν zu dem Integral (3) beisteuert, berechnet werden. Bezeichnet man alle Größen, die sich auf P_ν beziehen, mit dem Index ν, so ist wegen $\zeta_\nu' = 0$, wenn wir hier wie im folgenden die Differentiation nach s durch einen Strich andeuten, in der Umgebung von P_ν:

$$\zeta = \zeta_\nu + \frac{1}{2!}\zeta_\nu''(s-s_\nu)^2 + \frac{1}{3!}\zeta_\nu'''(s-s_\nu)^3 + \dots \tag{4}$$

Zur Berechnung von $u_B|_\nu$ sind von dieser Entwicklung offenbar so viel Glieder zu nehmen, daß ζ in der wirksamen Umgebung von P_ν hinreichend genau dargestellt wird, worauf die Integration in (3) über den wirksamen Bereich zu erstrecken ist.

Wir nehmen nun zunächst an, daß wir uns bereits mit den quadratischen Gliedern begnügen können. Wir können dann mit hinreichender Genauigkeit für $f(s)$ einfach $f(s_\nu)$ setzen und die Integration zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ erstrecken, da die außerhalb der wirksamen Umgebung liegenden Punkte zum Integral nur einen verschwindenden Beitrag liefern. Wir erhalten dann

$$u_B|_\nu = f(s_\nu)\, e^{ik\zeta_\nu} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\,{}^1\!/_2\,\zeta_\nu''(s-s_\nu)^2}\, ds. \tag{5}$$

Führen wir nun durch die Gleichung

$$k\,\tfrac{1}{2}\,\zeta_\nu''(s-s_\nu)^2 = \frac{\pi}{2}v^2$$

eine neue Integrationsveränderliche v ein, so wird:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i k \, {}^1\!/_2 \zeta_\nu''(s-s_\nu)^2} \, ds = \sqrt{\frac{\pi}{k \zeta_\nu''}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i \frac{\pi}{2} v^2} \, dv = \sqrt{\frac{2\pi}{k \zeta_\nu''}} \, e^{i \frac{\pi}{4}}$$

und wir erhalten schließlich

$$(6) \quad \begin{cases} u_B = \sum\limits_\nu u_B\Big|_\nu = \sum\limits_\nu \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi k}} \, \dfrac{1}{\sqrt{\zeta''}} \, \dfrac{e^{i[k(\varrho + r) + \pi/4]}}{\varrho r} \\ \qquad \cdot \dfrac{\cos(n, r)}{1 + \cos(r, \varrho)} \sin(\varrho, ds)\Big|_\nu , \end{cases}$$

wo wir

$$(7) \quad \zeta'' = r'' + \varrho'' = \sin^2(\varrho, ds)\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\varrho}\right) + \frac{1}{K}\left(\cos(r, K) + \cos(\varrho, K)\right)$$

setzen können; K bedeutet darin den Krümmungsradius bzw. die Richtung der Hauptnormalen in dem betreffenden Punkte P_ν des beugenden Randes. Diese Relation erhalten wir einfach, wenn wir r und ϱ in rechtwinkligen Koordinaten darstellen, dann $\zeta = r + \varrho$ zweimal nach s differentiieren und dabei noch die später abzuleitende für den Punkt P_ν geltende Beziehung (8) berücksichtigen.

Aus (6) und (7) folgt: Betrachten wir das Beugungsphänomen in weiterer Entfernung von der Schattengrenze, so können wir in erster Näherung annehmen, daß es durch Interferenz von Beugungswellen zustande gekommen ist, die von den Punkten P_ν des beugenden Randes stammen, in denen $\zeta = r + \varrho$ einen stationären Wert hat; im Falle, daß es sich um Raumpunkte innerhalb des Lichtraumes handelt, durch Interferenz des direkt einfallenden Lichtes mit diesen Beugungswellen.

Um nun noch die Lage der Punkte P_ν anschaulich überblicken zu können, ist es nur notwendig, die Bedingung

$$\frac{d\zeta}{ds} = 0$$

geometrisch zu deuten. Da $\zeta = r + \varrho$, so besagt diese Bedingung, daß

$$\frac{dr}{ds} + \frac{d\varrho}{ds} = 0,$$

oder daß

$$(8) \qquad \cos(r, ds) = -\cos(\varrho, ds)$$

ist. In den Punkten P_ν findet also eine Art von Reflexion statt. Der von der Lichtquelle kommende Lichtstrahl, der das den Punkt P_ν enthaltende Randelement ds trifft, schließt nämlich mit ds den gleichen Winkel ein wie ihn ds mit dem, nach dem betrachteten Raumpunkt abgebeugten Lichtstrahl bildet. Dabei wird aber der von ds „reflektierte“ Lichtstrahl im allgemeinen nicht in der gleichen Ebene liegen wie ds und der von der Lichtquelle kommende Lichtstrahl. Wenn wir uns nun fragen, nach welchen Raumpunkten hin ein bestimmtes Randelement ds in erster Näherung das Licht „reflektiert“, so gibt uns daher (8) die Antwort, daß alle Raumpunkte auf einem Kreishalbkegel („Reflexionskegel“) liegen, dessen Spitze in ds sich befindet, der ds zur Achse und einen solchen Öffnungswinkel hat, daß ihn die Fortsetzung der Verbindungsgeraden „Lichtquelle-Randelement ds“, d. h. die Fortsetzung von ϱ berührt. Unter sonst gleichen Umständen wird der Ausdruck (6) die Funktion u_B um so besser darstellen, je genauer ζ in der wirksamen Umgebung jedes der Punkte P_ν durch die beiden ersten Glieder in (4) approximiert wird. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist dies um so mehr der Fall, je größer ζ'' in den Punkten P_ν gegenüber ζ''' in der wirksamen Umgebung dieser Punkte ist.

Das Vorhandensein dieser Reflexionskegel wird für den Fall einer Halbebene von E. **Maey**[1]) sichergestellt. Durch Berücksichtigung von Gliedern, die **Kirchhoff** vernachlässigt, erweitert **Maey** den Geltungsbereich des **Kirchhoff**schen Ausdruckes für die Beugung an einer Halbebene, der ursprünglich bei **Kirchhoff**[2]) nur für Raumpunkte in der Nähe der durch die Lichtquelle hindurchgehenden und auf der beugenden Kante senkrecht stehenden Ebene abgeleitet wurde und findet so in diesem speziellen Problem zunächst theoretisch die Existenz von Reflexionskegeln. Durch Versuche überzeugt er sich dann, daß innerhalb des Schattenraumes tatsächlich immer nur ein bestimmter durch die Bedingung $\zeta =$ Minimum ausgezeichneter Punkt der beugenden Kante leuchtet. Als Bestätigung des Vorhandenseins von Reflexionskegeln in allgemeineren Fällen kann man die leider nicht geradeaus auf das Ziel losgehenden Versuche von S. K. **Banerji**[3]) ansehen.[4]) Als einfache Demonstrationsanordnung eignet sich irgendein beliebig geformter hinter einer weit entfernten punktförmigen Lichtquelle aufgestellter Schirm. Wenn man aus weiterer Entfernung und zwar vom Schattenraum des Schirmes her, den Schirmrand mit dem bloßen Auge oder mit einem auf den Schirmrand eingestellten Fernrohr anvisiert, dessen Objektiv mit einem Karton, in dem sich ein kleines Loch befindet, abgeblendet ist, so sieht man am Schirmrande feine Lichtpunkte, die längs des Randes wandern, falls man das Auge bzw. das Fernrohr oder die Blende bewegt. Diese Lichtpunkte bezeichnen offenbar jene Stellen des beugenden Randes, die jenen Raumpunkten Licht zustrahlen, wo sich die Pupille des Auges bzw. die Blendenöffnung des Fernrohrs befindet. Wird hingegen der beugende Rand durch ein Fernrohr mit einem unabgeblendeten Objektiv anvisiert, so sieht man einzelne Lichtlinien, entsprechend dem Umstande, daß die einzelnen Punkte, die die Objektivöffnung bilden, verschiedenen Punkten P_ν am beugenden Rande entsprechen.

---

[1]) E. **Maey**, Wied. Ann. **49**. S. 69. 1893.

[2]) G. **Kirchhoff**, Mathematische Optik. Leipzig 1891. S. 126.

[3]) S. **Banerji**, Phil. Mag. (6), **37**. S. 112. 1919.

[4]) Für den Fall der **Fraunhofer**schen Beugung an einem Heliometerobjektiv vgl. S. K. **Mitra**, Proc. of the Indian Ass. for the Cultivation of Science, Vol. VI, Part I, 1920.

Reichen die beiden ersten Glieder in (4) nicht hin, um ζ innerhalb des wirksamen Bereiches eines der Punkte P_ν genügend genau darzustellen, so werden wir ζ durch die ersten drei Glieder, d. h. durch

$$\zeta = \zeta_\nu + \frac{1}{2!}\,\zeta''_\nu (s - s_\nu)^2 + \frac{1}{3!}\,\zeta'''_\nu (s - s_\nu)^3 \tag{9}$$

zu approximieren suchen. Verfahren wir ähnlich wie in den vorigen Fällen, indem wir $f(s) = f(s_\nu)$ setzen und die Integration zwischen den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ erstrecken, also

$$u_B\big|_\nu = f(s_\nu)\, e^{ik\zeta_\nu} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\left\{\frac{1}{2!}\zeta_\nu''(s-s_\nu)^2 + \frac{1}{3!}\zeta_\nu'''(s-s_\nu)^3\right\}}\, ds \tag{10}$$

bilden, so ergibt diese Festsetzung der Integrationsgrenzen gleich eine charakteristische Einschränkung des Geltungsbereiches von (10). Der Exponent der unter dem Integralzeichen stehenden e-Funktion besitzt nämlich zwei Extremwerte und zwar für die s-Werte $s_1 = s_\nu$ und $s_2 = s_\nu - \frac{2\zeta_\nu''}{\zeta_\nu'''}$. Während das erste Extremum mit dem Punkt P_ν zusammenfällt, also sicher innerhalb des Bereiches liegt, wo ζ durch (9) hinreichend genau dargestellt ist, wird s_2, falls ζ_ν''/ζ_ν''' nicht klein ist, außerhalb dieses Bereiches liegen. Der Wert des Integrals in (10) wird aber in entsprechender Weise durch das zweite Extremum beeinflußt und es wird daher (10) nur dann eine brauchbare Annäherung sein, falls ζ_ν''/ζ_ν''' hinlänglich klein ist. Die Formel (6) und die jetzt abzuleitende haben somit verschiedene Anwendungsgebiete, da (6) nach dem früher Gesagten nur dann anwendbar ist, falls ζ_ν''/ζ''' in der Umgebung von P_ν hinreichend groß ist.

Um (10) in eine leicht diskutierbare Form zu bringen, führen wir durch die Gleichung

$$s - s_\nu = \beta w + \gamma, \quad \beta = \sqrt[3]{\frac{3\pi}{k\zeta_\nu'''}}, \quad \gamma = -\frac{\zeta_\nu''}{\zeta_\nu'''}$$

eine neue Integrationsveränderliche w ein und erhalten:

$$(11)\quad u_B\big|_\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt[3]{\frac{3\pi}{k\zeta'''}}\,\frac{1}{\varrho r}\,\frac{\cos(n, r)}{1+\cos(r, \varrho)}\sin(\varrho, ds)\, e^{ik\left(\zeta + \frac{\zeta''^3}{3\zeta'''^2}\right)}\, I(m)\big|_\nu$$

wobei $I(m)$ das aus der Theorie des Regenbogens bekannte Airysche Integral ist:

$$(12)\qquad I(m) = \int_0^\infty \cos\frac{\pi}{2}(w^3 - m w)\, dw, \qquad m = \sqrt[3]{\frac{3k^2}{\pi^2}}\,\frac{\zeta''^2}{\zeta'''^{4/3}}.$$

ζ'' wird dabei durch (7) gegeben, während für ζ''' der gleiche Weg, der zu (7) führt, mit Rücksicht auf (8), ergibt:

$$(13)\begin{cases} \zeta''' = \dfrac{d^3 r}{ds^3} + \dfrac{d^3\varrho}{ds^3} = 3\cos(\varrho, ds)\sin^2(\varrho, ds)\left[\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{\varrho^2}\right] + \dfrac{3\cos(\varrho, ds)}{K} \\ \qquad \cdot\left[\dfrac{\cos(r, K)}{r} - \dfrac{\cos(\varrho, K)}{\varrho}\right] - \dfrac{1}{TK}\left[\cos(r, B) + \cos(\varrho, B)\right] \\ \qquad\qquad - \dfrac{1}{K^2}\,\dfrac{dK}{ds}\left[\cos(r, K) + \cos(\varrho, K)\right], \end{cases}$$

wobei $1/T$ die Torsion und B die Richtung der Binormalen in dem Punkte P_ν bedeutet.

Der jetzige Ausdruck für $u_B|_\nu$ ist besonders dadurch bemerkenswert, daß er schon allein, also auch ohne Mitwirkung des direkt einfallenden Lichtes oder von Wellen aus anderen Punkten P_ν wegen des in ihm enthaltenen Airyschen Integrals $I(m)$, zu einer Interferenzerscheinung Anlaß gibt. Das für die Interferenz der von P_ν herrüherenden Beugungsstreifen vor allem maßgebende $I^2(m)$ hat nämlich, als Funktion von m betrachtet, den folgenden Verlauf. Für negativ wachsendes m nimmt $I^2(m)$ sehr rasch an Größe ab und nähert sich unbegrenzt der Null. Bei positiv wachsendem m nimmt $I^2(m)$ an Größe zu und erreicht bei $m = 1{,}0845$ das erste Maximum, bei $m = 2{,}4955$ das erste Minimum, bei $m = 3{,}4669$ das zweite Maximum usf., um dann durch eine Folge langsam immer schwächer werdender Maxima und Minima sich unbegrenzt der Null zu nähern.[1] Für $I^2(m)$ erhält man für die ersten drei Maxima die Werte 1,005, 0,615, 0,510, während die folgenden Maxima langsam weiter gegen Null abnehmen. In den Minimastellen ist aber $I^2(m)$ stets Null. Bemerken wir, daß m bei uns nach (12) immer einen positiven Wert hat, so sehen wir, daß (11) in seinem Geltungsbereich schon allein das Auftreten von Interferenzstreifen verursachen wird.

Betrachten wir einen speziellen, einem bestimmten Randpunkt gehörigen Reflexionskegel, so ist leicht zu sehen, daß der Ausdruck (11) vor allem für jene Punkte auf diesem Reflexionskegel in Betracht kommt, die in der Nähe der durch $\zeta'' = 0$ auf diesem Kegel bestimmten Kurve liegen. Wie wir gesehen haben, ist für kleine ζ''/ζ'''-Werte der Ausdruck (11) zu verwenden; da aber (11) nur für große r und ϱ-Werte gilt und ζ''' nach (13) im allgemeinen nur in den Fällen großer Krümmung, großer Änderung der Krümmung oder großer Torsion größere Werte erreichen kann, so wird im allgemeinen bei kleinen ζ''/ζ''' auch ζ'' klein sein müssen. Außerdem tritt ζ''' im Nenner von (11) auf, so daß für große ζ'''-Werte dem Ausdruck (11) eine geringe Intensität entspricht.

Es entsteht nun die Frage, wie das Beugungsphänomen auf dem Reflexionskegel in der Nähe der durch $\zeta'' = 0$ bestimmten Kurve zustande kommt. Wird außer $\zeta' = 0$ auch $\zeta'' = 0$ vorausgesetzt, so bedeutet dies offenbar, daß wir Raumpunkte betrachten, die auf der Schnittkurve Z_ν zweier aufeinanderfolgender, zu P_ν gehöriger Reflexionskegel liegen. (**Mongesche** Charakteristik des zu P_ν gehörigen Reflexionskegels in der Flächenschar aller Reflexionskegel.) Dies ist es aber gerade, was wir eigentlich von vornherein hätten erwarten sollen. Wird ζ durch (9) dargestellt, so enthält der wirksame Bereich von P_ν zwei Stellen, wo ζ Extremwerte annimmt (wie man sich leicht überzeugt, ein Maximum und ein Minimum), also eigentlich zwei aufeinanderfolgende Punkte P_ν

---

[1] Graphische Darstellung des Verlaufes der Funktion $I^2(m)$, z. B. bei J. M. **Pernter**, Meteorologische Optik. Wien 1906. S. 515.

und dies erklärt das Zustandekommen der Interferenzfransen. Daß diese in der Nähe der durch $\zeta''=0$ auf dem Reflexionskegel gegebenen Kurve liegen, erklärt sich daraus, daß für kleine ζ'' die beiden Extremwerte von ζ sich nahe beieinander befinden. Nunmehr ist auch die Tatsache zu verstehen, daß sich $\zeta''=0$ mit Rücksicht auf (7) auch auf die an die optische Abbildungsgleichung erinnernde Form

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{\varrho}=-\frac{\cos(r,K)+\cos(\varrho,K)}{K\sin^2(\varrho,ds)} \tag{14}$$

bringen läßt. Zwei aufeinanderfolgende Reflexionskegel müssen ja das „Bild" der Lichtquelle erzeugen.

Nunmehr entsteht die Frage, welchen Verlauf die Kurve Z_ν hat. Die Frage ist rasch entschieden, wenn wir in dem Punkte P_ν ein Koordinatensystem errichten, dessen drei Achsen x, y, z mit den positiven Richtungen von ds, K, B zusammenfallen. Z_ν ist der Schnitt des Halbkegels (8) mit der Fläche (14). Da $x=r\cos(r,ds)$ und mit Rücksicht auf (8) $x=-r\cos(\varrho,ds)$ und ferner $y=r\cos(r,K)$ ist, so läßt sich (14) auf die Form bringen

$$x\cdot\frac{1}{\cos(\varrho,ds)}\left[\frac{\sin^2(\varrho,ds)}{\varrho}+\frac{\cos(\varrho,K)}{K}\right]-\frac{y}{K}=\sin^2(\varrho,ds), \tag{15}$$

die im x, y, z-Raume eine auf der xy-, also auf der Schmiegungsebene senkrecht stehende Ebene darstellt. Z_ν ist somit als Schnitt dieser Ebene mit dem Reflexionshalbkegel ein Kegelschnitt, der symmetrisch zur Schmiegungsebene gelegen ist. Nun muß noch die Bedingung für das Auftreten von Z_ν angegeben werden. Damit Z_ν existiere, muß die durch (15) dargestellte Ebene den Reflexionshalbkegel schneiden. Der Schnittpunkt der Ebene (15) mit der y-Achse liegt nun auf der negativen Seite dieser Achse. Nehmen wir an, daß der Reflexionshalbkegel die positive x- (d. h. ds-) Richtung umschließt, so daß $\cos(\varrho,ds)$ positiv ist, so ist Z_ν stets vorhanden, falls das aus (15) sich ergebende dy/dx zwischen $+\infty$ und $-\operatorname{tg}(\varrho,ds)$ gelegen ist. Daraus folgt aber, daß dann ϱ der Ungleichung

$$\varrho>-\frac{K\cdot\sin^2(\varrho,ds)}{\sin(\varrho,ds)+\cos(\varrho,K)}$$

genügen muß. Diese Forderung erinnert an die Bedingung für das Auftreten von reellen Bildern bei Hohlspiegeln, weil sie für den Fall, daß die Lichtquelle in der positiven Richtung von K liegt, die Form $\varrho > K/2$ annimmt.

Um zu entscheiden, ob Z_ν eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel darstellt, müssen wir nur feststellen, welcher der Relationen:

$$+\infty > \frac{dy}{dx} > \operatorname{tg}(\varrho, ds) \qquad \text{(Ellipse)},$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \operatorname{tg}(\varrho, ds) \qquad \text{(Parabel)},$$

$$\operatorname{tg}(\varrho, ds) > \frac{dy}{dx} > -\operatorname{tg}(\varrho, ds) \qquad \text{(Hyperbel)}$$

unser dy/dx genügt.

Die zu allen Randpunkten gehörigen Kurven Z_ν bilden in ihrer Gesamtheit eine Fläche W, die nach den Lehren der Differentialgeometrie als die Einhüllende der Flächenschar aller Reflexionshalbkegel aufzufassen ist. Nun werden im allgemeinen, falls die Berührung zwischen der Hüllfläche und den einzelnen sie erzeugenden Halbkegeln von der ersten Ordnung ist, alle Reflexionskegel die W berühren, wenigstens in der Nähe der Punkte, in denen die Berührung stattfindet, auf ein und derselben Seite der Hüllfläche W verlaufen. Da das abgebeugte Licht nach dem Obigen sich in erster Annäherung in Reflexionskegeln ausbreitet, so wird in den Raumpunkten in der Nähe von W nur auf der einen Seite von W Helligkeit, auf der anderen aber Dunkelheit herrschen, sofern man nämlich nur das Licht der Reflexionskegel in Betracht zieht, die gerade das eben ins Auge gefaßte Stück der Fläche W erzeugen. Auf der beleuchteten Seite von W erhalten wir dabei das ν-te Maximum der Beugungsstreifen, von der Fläche W aus gerechnet, wenn wir uns auf einer Fläche befinden, die nach (12) durch:

$$\zeta = 0, \qquad \sqrt[3]{\frac{3k^2}{\pi^2}} \cdot \frac{\zeta''^2}{\zeta'''^{4/3}} = m_\nu \tag{16}$$

gegeben wird, falls $m = m_\nu$ [vgl. (12)] den Wert von m darstellt, für den $I^2(m)$ das ν-te Maximum erreicht. Im allgemeinen werden aber die Raumpunkte in der Nähe der Fläche W auch direkt einfallendes und abgebeugtes Licht erhalten, das von anderen Teilen des beugenden Randes kommt, als es die sind, die gerade den ins Auge gefaßten Teil von W erzeugen; und darauf ist bei den Anwendungen zu achten. Aus der Tatsache, daß W eine Hüllfläche von Reflexionskegeln ist, wird auch physikalisch ganz unmittelbar verständlich, daß nur auf der einen Seite von W Beugungsstreifen auftreten. Es herrschen ja hier ganz analoge Verhältnisse, wie in der Nähe einer Kaustik. Jeder einem Randpunkt P_ν entsprechende Reflexionskegel wird durch einen Reflexionskegel geschnitten, der einem dem P_ν benachbarten Punkte $P_{\nu'}$ entspricht. Aus diesem Umstande ergibt sich aber die folgende Schwierigkeit. Betrachten wir einen bestimmten Raumpunkt Q auf der beleuchteten Seite von W, so werden wir im allgemeinen zwei Reflexionskegel angeben können, die durch ihn hindurchgehen und die beide an der Erzeugung des dem Punkte Q benachbarten Flächenstückes von W beteiligt sind. Wenn dies auch aus der Tatsache, daß die durch (11) angegebene Lichtverteilung durch zwei nahe beieinander gelegene Punkte P_ν bedingt wird, sofort klar ist, so erkennt man dennoch gleichzeitig aus diesem Umstande, daß nur einer dieser beiden Reflexionskegel bei Verwendung des Ausdrucks (11) zur Bestimmung der Lichtintensität in Q benützt werden darf. Man sieht ja, daß die beiden durch Q gehenden Reflexionskegel sich voneinander dadurch unterscheiden, daß auf dem einen von ihnen auf der durch Q und den entsprechenden Randpunkt P_ν gehenden Geraden der Berührungspunkt mit W zwischen Q und P_ν, auf dem anderen Reflexionskegel aber auf der entsprechenden Geraden außerhalb der Strecke $\overline{QP_\nu}$ gelegen ist. Daraus folgt aber, daß eine eindeutige Festlegung der Lichtintensität erst ermöglicht wird, wenn man für diesen Zweck konsequent entweder nur den Teil der Lichtkegel verwendet, der von dem entsprechenden Punkt P_ν bis zur Berührungskurve der Lichtkegel mit der Fläche W, d. h. bis zur Kurve Z_ν reicht oder aber den übrigen Teil benützt.

Nun erkennt man, daß die jetzt besprochene Schwierigkeit auch in einer anderen Form auftritt. Die beiden Gebiete, in die jeder Reflexionskegel durch Z_ν (d. h. durch $\zeta'' = 0$) geteilt wird, müssen so beschaffen sein, daß in dem einen von ihnen $\zeta'' > 0$ und in dem anderen $\zeta'' < 0$ ist. Da das ζ'' in (12) quadratisch auftritt, so erhält man jetzt wieder zwei ein wenig voneinander verschiedene Flächen (16), je nachdem man in (11) ζ''-Werte aus dem Gebiete, wo ζ'' positiv oder negativ ist, verwendet. Eine Eindeutigkeit ist also auch hier nur zu erreichen, wenn man konsequent nur positive oder nur negative Werte von ζ'' verwendet, d. h. sich nur auf das eine oder das andere der beiden durch Z_ν auf den Reflexionskegeln bestimmten Gebiete beschränkt. Diese Zweideutigkeit in der Festlegung der Lichtintensität mittels (11), deren Ursprung nach dem Obigen darin gelegen ist, daß wir in (11) auf dem zu einem bestimmten Punkte P_ν gehörigen Reflexionskegel gleichzeitig die Wirkung von anderen, P_ν benachbarten Punkten $P_{\nu'}$ berücksichtigen, fällt bei der praktischen Anwendung dieser Formel nicht schwer ins Gewicht, da sie, wie schon betont wurde, nur für kleine ζ''-Werte zu verwenden ist und hier die Unterschiede nicht groß sind.

Im Falle, daß der beugende Rand aus einer in einer Ebene E liegenden Kurve besteht und eine ebene Lichtwelle senkrecht auf diese Ebene E einfällt, arten die Reflexionskegel in Ebenen aus, die senkrecht auf den einzelnen Elementen des beugenden Randes stehen. Die Fläche W wird dann zu einem auf E senkrecht stehenden Zylinder, dessen Schnitt mit E die Evolute des beugenden Randes ist. Unter den jetzt angegebenen Bedingungen wurden von S. K. Mitra[1]) Versuche angestellt, die in der Tat ergeben haben, daß in diesem Falle praktisch zusammenfallend mit der Evolute ein hellerer und an der Innenseite der Evolute daran anschließend eine Folge von weniger hellen Beugungsstreifen zu beobachten ist. Der genannte Autor hat auch eine im wesentlichen richtige, wenn auch nur qualitative Erklärung des von ihm experimentell untersuchten Falles geben können. Er machte nämlich darauf aufmerksam, daß in jedem Punkte des Evolutenzylinders die Beugungswellen von „drei aufeinanderfolgenden Punkten“ des beugenden Randes mit gleicher Phase eintreffen und daher hier eine größere Helligkeit als in den Nachbarpunkten herrschen muß. Tatsächlich ist aber für das von einem Randelement einem Raumpunkt zugestrahlte Licht ein endliches, wenn auch sehr kleines Stückchen des beugenden Randes maßgebend und die größte Helligkeit ist daher nicht, wie S. K. Mitra meint, auf der Evolute zu finden, entspricht also nicht $\zeta'' = 0$, d. h. $m = 0$, sondern, wie wir gesehen haben, $m_1 = 1{,}0845$.

---

[1]) S. K. Mitra, Phil. Mag. (6), 38. S. 289. 1919.

§ 3. Beugungserscheinungen in der Nähe der Schattengrenze.

Das im § 2 zur Ableitung der Näherungsformeln angewandte Verfahren versagt, wie wir gesehen haben, in der Nähe der Schattengrenze. Wir können dafür den hier stattfindenden Sprung der Funktion u_B verantwortlich machen, weil dieser, wie schon bemerkt wurde, mit dem Unendlichwerden des Integranden in der Schattengrenze verknüpft ist. Es liegt daher nahe, zur Entwicklung von Näherungsformeln, die auch in der Nähe der Schattengrenze gelten, aus u_B versuchsweise eine Funktion U herzuleiten, die in der Schattengrenze regulär ist, U durch einen auch in der Nähe der Schattengrenze anwendbaren Ausdruck zu approximieren und dann durch die Umkehrung aller Operationen, die von u_B zu U geführt haben, von der Näherung für U zur Näherung für u_B überzugehen.

Diesen Gedanken wollen wir in der folgenden Form durchführen. Zunächst suchen wir eine Funktion U auf. Bezeichnen wir durch die oberen Indizes 1 und 2 die von dem Lichtkegel bzw. von dem Schattenraume aus zu erreichenden Seiten der Schattengrenze, so wird der Sprung von u_B in der Schattengrenze gegeben durch:

$$u_B^{(1)} - u_B^{(2)} = -\frac{e^{ikR}}{R}, \tag{17}$$

wenn wir mit R die Entfernung „Lichtquelle L — Aufpunkt Q“ bezeichnen. Die Ableitungen der Funktion u_B nach der Normalen an die Schattengrenze sind hingegen stetig, wie man sich einfach überzeugen kann. Daraus und aus (17) folgt nun unmittelbar, daß die Funktion:

$$U = \frac{\partial}{\partial k}\left(R\,e^{-ikR}\,u_B\right) \tag{18}$$

samt ihrer Ableitung nach der Normalen in der Schattengrenze stetig ist. Das ist auch direkt festzustellen, indem man für u_B den Ausdruck (2) einsetzt. Man erhält so:

$$U = \frac{Ri}{4\pi}\int\limits_B \frac{e^{ik(r+\varrho-R)}}{r\cdot\varrho}\cdot\frac{r+\varrho-R}{1+\cos(r,\varrho)}\cos(n,r)\sin(\varrho,ds)\,ds\,. \tag{19}$$

Das Verschwinden des Nenners $1+\cos(r,\varrho)$ in den Punkten der Schattengrenze wird jetzt durch das gleichzeitige Verschwinden des Zählers $r+\varrho-R$ kompensiert. Vgl. übrigens die später anzugebende Relation (22).

Nun kann man ohne weiteres für U eine auch in der Nähe der Schattengrenze geltende Näherung nach dem in § 2 bei u_B angewandten Verfahren herleiten. Setzen wir jetzt $r + \varrho - R = \xi$, so liefern nur jene Punkte P_ν des beugenden Randes einen merklichen Beitrag zu dem Integral (19), für die $\xi' = 0$ ist. Da der Aufpunkt bei der Differentiation nach s konstant zu halten ist, so folgt daraus, daß

$$\frac{d\xi}{ds} = \frac{dr}{ds} + \frac{d\varrho}{ds} = \frac{d\zeta}{ds} = 0$$

ist und dies bedeutet, daß in erster Näherung ebenso wie in § 2 nur Raumpunkte, die auf dem Reflexionskegel von P_ν liegen, von diesem Randpunkt Licht erhalten. Unter der Annahme, daß ξ in der Umgebung von P_ν bereits hinreichend genau durch

$$\xi = \xi_\nu + \frac{\xi_\nu''}{2!}(s - s_\nu)^2$$

dargestellt werden kann, bekommen wir für den Beitrag U_ν des Punktes P_ν zu (19) auf dem gleichen Wege wie bei der entsprechenden Rechnung im vorigen Paragraphen:

$$U_\nu = \varphi(s_\nu)\, e^{ik\xi_\nu} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ik\xi_\nu'' \frac{(s-s_\nu)^2}{2!}} ds = \varphi(s_\nu)\, e^{ik\xi_\nu} \sqrt{\frac{\pi}{k\xi_\nu''}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{\pi}{2}v^2} dv$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi}{k\xi_\nu''}}\, \varphi(s_\nu)\, e^{i\left(k\xi_\nu + \frac{\pi}{4}\right)},$$

wobei

$$\varphi(s_\nu) = \frac{iR}{4\pi r\varrho} \cdot \frac{r + \varrho - R}{1 + \cos(r, \varrho)} \cos(n, r) \sin(\varrho, ds)$$

von k nicht abhängt.

Um nun zu dem unserem U_ν entsprechenden $u_B|_\nu$ zu gelangen, müssen wir nur U_ν nach k integrieren und zwar zwischen den Grenzen $+\infty$ und k, weil ja $u_B|_\nu$, wie überhaupt die gesamte Beugungswelle u_B in dem Grenzfalle $k = +\infty$, d. h. für unendlich kleine Wellen verschwinden muß. Wir erhalten so:

$$\int\limits_{+\infty}^{k} U_\nu\, dk = R \cdot e^{-ikR}\, u_B|_\nu = \sqrt{\frac{2\pi}{\xi_\nu''}}\, \varphi(s_\nu)\, e^{i\frac{\pi}{4}} \int\limits_{+\infty}^{k} \frac{e^{ik\xi_\nu}}{\sqrt{k}}\, dk.$$

Führen wir nun in dem Integranden durch die Relation

$$k\xi_\nu = \frac{\pi}{2} w^2$$

statt k eine neue Integrationsveränderliche w ein und beachten, daß

$$\frac{d^2 \xi}{d s^2} = \frac{d^2 r}{d s^2} + \frac{d^2 \varrho}{d s^2} = \frac{d^2 \zeta}{d s^2}$$

ist, so erhalten wir für $u_B|_\nu$ den Ausdruck:

$$(20) \quad u_B|_\nu = \frac{e^{i\left(kR + \frac{3}{4}\pi\right)}}{2 r \varrho \sqrt{\zeta''}} \cdot \frac{\sqrt{r + \varrho - R}}{1 + \cos(r, \varrho)} \cos(n, r) \sin(\varrho, ds) \int\limits_{+\infty}^{\sqrt{\frac{2k}{\pi}(r + \varrho - R)}} e^{i \frac{\pi}{2} w^2} dw \Bigg|_\nu .$$

Dabei mußte der in der Integrationsgrenze auftretenden Wurzel ein positives Vorzeichen erteilt werden, damit $u_B|_\nu$ für $k = +\infty$ verschwinde. ζ'' wird auch hier durch (7) gegeben.

Nun wollen wir uns die Eigenschaften der Funktion $u_B|_\nu$ ein wenig näher ansehen. Unter der Voraussetzung, daß alle in (20) auftretenden Wurzeln positiv sind, überzeugt man sich zunächst, daß im Falle, wo die obere Grenze des Fresnelschen Integrales in (20) groß wird, d. h. für große $k(r + \varrho - R)$-Werte der jetzige Ausdruck für $u_B|_\nu$ unmittelbar in den früher abgeleiteten (6) übergeht. Es ist nur notwendig zu berücksichtigen, daß nach Cauchy[1]) für große positive w-Werte in erster Näherung

$$(21) \quad \int\limits_{+\infty}^{w} e^{i \frac{\pi}{2} w^2} dw = -\frac{i}{\pi w} e^{i \frac{\pi}{2} w^2}$$

wird.

Um nun aber zu zeigen, daß der jetzige Ausdruck für $u_B|_\nu$ im Gegensatz zu dem früheren (6) auch in den Raumpunkten in der Nähe und in der Schattengrenze selbst endlich bleibt, formen wir ihn noch ein wenig um. Zunächst folgt aus

$$R^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho \cos(r, \varrho)$$

die Relation

$$(r + \varrho)^2 - R^2 = 2 r \varrho (1 + \cos(r, \varrho)).$$

Bezeichnen wir ferner mit α den Winkel zwischen der durch r und ϱ gelegten Ebene und der Richtung n, so wird

$$\cos(n, r) = \sin(r, \varrho) \cos \alpha .$$

---

1) Vgl. etwa **Verdet-Exner**, Die Wellentheorie des Lichtes. Bd. I. Braunschweig 1881. S. 245.

Wir erhalten somit für den in (20) auftretenden Ausdruck

$$(22)\quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{r+\varrho-R}}{1+\cos(r,\varrho)}\cos(n,r) = \dfrac{\sqrt{(r+\varrho)^2-R^2}}{1+\cos(r,\varrho)}\cdot\dfrac{\cos(n,r)}{\sqrt{r+\varrho+R}} \\ \qquad\qquad = 2\sqrt{\dfrac{r\cdot\varrho}{r+\varrho+R}}\cos\alpha\sin\left(\dfrac{r\,\varrho}{2}\right), \end{cases}$$

woraus sofort die Endlichkeit von (20) in der Schattengrenze folgt.

Die letzte Formel läßt uns auch erkennen, daß (20) in der Schattengrenze den vorgeschriebenen Sprung (17) hat. Aus (22) folgt nämlich, daß wir für (20) in der Schattengrenze bei der Annäherung von dem Lichtkegel bzw. vom Schattenraume aus

$$-\frac{1}{2}\,\frac{e^{ikR}}{R} \quad \text{bzw.} \quad +\frac{1}{2}\,\frac{e^{ikR}}{R}$$

erhalten. Man hat dabei bloß folgendes zu beachten: Bei der Annäherung an die Schattengrenze rückt der entsprechende Punkt P_ν am beugenden Rande in die Verbindungsgerade „Lichtquelle-Aufpunkt“ hinein und es wird daher dann $\cos(r,K)+\cos(\varrho,K)$ und $r+\varrho-R$ zu Null und $\sin\left(\frac{\varrho,r}{2}\right)$ und $|\cos\alpha|$ zu 1. Das Vorzeichen von (22) wird mit Rücksicht auf unsere Festsetzung, daß alle Wurzeln in (20) mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen sind, beim Heranrücken an die Schattengrenze durch $\cos(n,r)$ bestimmt, also negativ bzw. positiv bei der Annäherung vom Lichtkegel bzw. vom Schattenraum her.

Wir sehen somit, daß, wenn wir allen in (20) auftretenden Wurzeln das positive Vorzeichen erteilen, das Verhalten der so gewonnenen Funktion eindeutig dafür spricht, daß sie die Beugungswelle darstellt. Wir können aber auch noch durch eine Änderung der obigen Festsetzung erreichen, daß dieser Ausdruck in der Schattengrenze stetig wird und im Schattenraume die Beugungswelle $u_B|_\nu$, im Lichtraume jedoch die Beugungswelle und zugleich das direkt einfallende Licht, also $u_B|_\nu + u_E$ darstellt. Zu diesem Zwecke nehmen wir zunächst an, daß in dem Schattenraume alle in (20) auftretenden Wurzeln das positive Zeichen haben, also alle unsere alten Voraussetzungen gelten; daher wird hier (20) sicherlich $u_B|_\nu$ darstellen. In der Schattengrenze wird nun aber $\sqrt{r+\varrho-R}=0$ und wir wollen jetzt entgegen der früher gemachten Voraussetzung annehmen, daß diese Wurzel, die sowohl vor dem Integral als auch in der Integrationsgrenze auftritt, beim Durchgang durch die Schattengrenze ihr Vorzeichen ändert. Aus den soeben unter den alten Voraussetzungen berechneten Grenzwerten von (20) in der Schattengrenze folgt nun sofort, daß sich jetzt unter den neuen Voraussetzungen (20) in der Schattengrenze stetig verhält. Es erübrigt nur noch der Nachweis, daß (20) jetzt innerhalb des Lichtraumes $u_B|_\nu + u_E$ darstellt. Allerdings gilt diese letztere Behauptung nur angenähert, d. h. um so genauer, je näher wir uns der Schattengrenze befinden und je weiter wir vom beugenden Rande entfernt sind. Je besser diese Voraussetzungen erfüllt sind, um so genauer stellt nämlich, wie man wieder mit Hilfe von (22) folgern kann, der mit dem negativen Vorzeichen genommene Ausdruck (20), falls wir das Integral zwischen den Grenzen $+\infty$ und $-\infty$ erstrecken, $\frac{e^{ikR}}{R}$, also u_E dar. Addiert man nun diesen letzteren Ausdruck zu $u_B|_\nu$ im Lichtraume, also zu (20) unter den alten Voraussetzungen, so erhält man im Lichtraume $u_B|_\nu + u_E$ und gleichzeitig (20) für den Fall der neuen Voraussetzungen. Da jetzt (20) und wie man sieht, auch die Ableitungen dieses Ausdruckes nach der Normalen in der Schattengrenze stetig sind, so ist es uns nun gelungen, die reguläre Fortsetzung von $u_B|_\nu$ aus dem Schatten- in den Lichtraum zu erhalten. Die Tatsache, daß sich dabei u_E nur angenähert ergibt, erklärt sich ungezwungen dadurch, daß (20) überhaupt nur eine Näherungsformel ist. Der Vorteil des jetzigen Übereinkommens besteht vor allem darin, daß wir es für jeden Punkt P_ν mit einer einzigen, sehr gut bekannten Funktion, im wesentlichen nämlich mit dem Fresnelschen Integral zu tun haben. Wird im folgenden auf den Ausdruck (20) hingewiesen, so ist er, falls das Gegenteil nicht ausdrücklich betont wird, nach den jetzigen Festsetzungen zu behandeln.

Es mag noch erwähnt werden, daß die Tatsache, daß aus der Funktion U auch unmittelbar die Funktion $u_B|_\nu + u_E$ zu erhalten ist, eigentlich schon von vornherein zu erwarten war. Ersetzen wir nämlich in der Definition (18) von U das u_B durch $u_B + u_E$, so erhalten wir offenbar dieselbe Funktion U. Es ist ja im Schattenraume $u_B + u_E = u_B$, im Lichtraume ist aber $u_B + u_E = u_B + \frac{e^{ikR}}{R}$, und daher wird hier die mit $u_B + u_E$ gebildete Funktion U gleich

$$U = \frac{\partial}{\partial k}(R \cdot e^{-ikR} u_B + 1) = \frac{\partial}{\partial k}(R \cdot e^{-ikR} u_B),$$

also wieder gleich der mit u_B allein gebildeten Funktion U.

Wenn wir unsere Überlegungen weiter systematisch fortsetzen wollten, müßten wir jetzt den Fall in Betracht ziehen, wo in dem wirksamen Bereiche von P_ν zur Darstellung von ξ auch die Glieder mit ξ_ν''' verwendet werden müssen. Da $\xi'' = \zeta''$ ist, so wäre nach den Erörterungen im § 2 die neue Formel nur in der Nähe der von den Reflexionskegeln gebildeten Hüllfläche W von Wichtigkeit, und zwar nur für den Fall, daß W in der Nähe der Schattengrenze verläuft. Sie käme somit nur in speziellen Fällen in Frage und da sie als ein Integral, dessen Integrand das Airysche Integral enthält, sich sicherlich nicht einfach durch bekannte Funktionen darstellen läßt, wollen wir uns hier nicht weiter mit ihr beschäftigen.

Schließlich wären noch vom Standpunkte des vorangehenden und auch dieses Paragraphen die Beugungserscheinungen in der Nähe der Raumpunkte zu behandeln, wo nicht nur $\zeta' = 0$ und $\zeta'' = 0$, sondern auch $\zeta''' = 0$ ist. Dies wären die Beugungserscheinungen in der Nähe der eventuell vorhandenen Gratlinie der Fläche W. Diese Beugungserscheinungen entstehen in ähnlicher Weise, wie die Beugungserscheinungen in der Nähe des Brennpunktes einer Linse.

Es handelt sich nun darum, uns die wichtigsten und einschneidendsten von den bisher noch nicht besprochenen Beschränkungen zu verdeutlichen, denen unsere Formeln infolge der bei ihrer Ableitung gemachten Voraussetzungen unterliegen. Allen unseren Überlegungen ist vor allem insbesondere gemeinsam:

1. Die Voraussetzung, daß für jeden Raumpunkt auf dem beugenden Rande einzeln nicht übereinander greifende wirksame Bereiche sich angeben lassen, die in erster Näherung allein von Null verschiedene Beiträge zu dem Integral (2), das u_B darstellt, liefern. Solche Bereiche auf dem beugenden Rande sind dadurch ausgezeichnet, daß sie stets einen oder mehrere Punkte P_ν enthalten, in denen ζ und ξ einen stationären Wert

annehmen. Innerhalb eines wirksamen Bereiches ändern sich diese Größen langsam, außerhalb aber sehr schnell.

2. Innerhalb eines wirksamen Bereiches kann ζ bzw. ξ hinreichend genau durch die ersten drei oder vier Glieder der Taylorschen Entwicklung dieser Größen nach Potenzen von $s - s_\nu$ dargestellt werden. Außerhalb dieses Bereiches dürfen diese Annäherungen ausnahmslos nur rasch veränderliche ζ bzw. ξ-Werte liefern, d. h. keine Extremwerte ergeben.

Sind diese Bedingungen nicht erfüllt, so läßt sich u_B sicherlich nicht mit Hilfe der bisher angegebenen Formeln darstellen, was durch einige Beispiele belegt werden möge. So ist z. B. die Bedingung 1. nicht erfüllt, falls der beugende Schirm so beschaffen ist, daß es einen, mehrere oder ein Gebiet von Raumpunkten Q gibt, in denen ζ und damit auch ξ konstant oder nahezu konstant ist und zwar für den ganzen beugenden Rand oder wenigstens für einen endlichen Teil desselben. Solche Partien des beugenden Randes sind so beschaffen, daß sie auf oder in der Nähe eines Rotationsellipsoides $\zeta = \text{const.}$ liegen, in dessen Brennpunkten sich die Lichtquelle und ein Raumpunkt Q befinden. In einem solchen Falle ist es offenbar auch in der Umgebung eines solchen Raumpunktes Q nicht möglich, eine unserer Formeln zu benützen, da die Schwankungen von ζ in diesen Punkten noch zu gering sind, kaum eine oder einige Lichtwellenlängen betragen. Ein wichtiger hierhergehöriger Spezialfall ist das klassische Problem der Beugung an einem kreisförmigen Schirme, falls Lichtquelle und Aufpunkt in der Nähe der Geraden liegen, die senkrecht auf der Kreisfläche steht und durch ihren Mittelpunkt hindurchgeht. Bei dem in § 2 beschriebenen Demonstrationsversuche sieht man daher bei Verwendung eines kreisförmigen Schirmes und einer entsprechend aufgestellten punktförmigen Lichtquelle, auch bei großen Schirmen, in der Nähe der Symmetriegeraden den ganzen Rand des Schirmes leuchten. Erst in Punkten, die weiter von der Symmetriegeraden entfernt sind, bemerkt man bei großen kreisförmigen Schirmen an den Enden des Kreisdurchmessers zwei Lichtpunkte, die $\zeta = \text{Maximum}$ und $\zeta = \text{Minimum}$ entsprechen.

Ein zweites Beispiel, wo alle unsere Formeln versagen, ist der Fall sehr kleiner Schirme oder sehr kleiner beugender Öffnungen, weil hier keine der oben angegebenen Bedingungen befriedigt ist. Einerseits werden hier nämlich die Schwankungen von ζ sehr klein sein, aber auch wenn sie einige Wellenlängen betragen, genügt dies noch keineswegs, um das Erfülltsein der Bedingung 1. zu gewährleisten. Doch selbst wenn der Bedingung 1. genügt werden kann, und bereits wirksame Bereiche aufzutreten beginnen, bietet im allgemeinen die Befriedigung der Bedingung 2. bei kleinen Schirmen Schwierigkeiten, da in diesem Falle zur hinreichend genauen Darstellung von ζ oder ξ mehr als vier Glieder der Taylorschen Entwicklung im wirksamen Bereich notwendig sein werden.

Fälle, wo die Bedingung 2. nicht befriedigt werden kann, können aber auch bei größeren Schirmen auftreten. So z. B. in dem Falle, wo der beugende Rand so kompliziert verläuft, daß für gewisse wirksame Bereiche eine Darstellung von ζ durch die ersten vier Glieder der Taylorschen Entwicklung nicht hinreichend genau ist oder in dem Falle, wo ζ', ζ'' oder ζ''' unstetig wird, was durch eventuell vorhandene singuläre Punkte, etwa Spitzen oder Ecken der Kurve, die den beugenden Rand bildet, bedingt werden kann.

Es entsteht nun die Frage, ob die zur Herleitung unserer Formeln angewendeten Verfahren leicht so geändert werden können, daß sie wenigstens auf einige der oben angeführten Ausnahmsfälle anwendbar werden. Diese Frage läßt sich oft für die beiden Formeln (6) und (11), die für weit von der Schattengrenze entfernte Punkte gelten, bejahen, z. B. im Falle, wo eine der Ableitungen von ζ unstetig wird. Man kann dann den wirksamen Bereich in zwei Teile zerlegen, in denen für ζ zwei verschiedene Darstellungen gelten. Jetzt darf aber die Integration nach s nicht mehr zwischen unendlichen Grenzen erstreckt werden und wir erhalten daher im Falle von (6) ein Fresnelsches Integral und im Falle von (11) ein Airysches Integral mit veränderlicher Integrationsgrenze.[1] Das gleiche Verfahren ist anwendbar, wenn zwei Punkte nahe beieinander, jedoch noch nicht so nahe liegen, daß die Formel (20) brauchbar wäre. Die Erledigung dieses Übergangsfalles überbrückt die Lücke zwischen den Geltungsbereichen der Formeln (6) und (20).

---

[1] Tafeln für solche Airysche Integrale, allerdings nur für einen engen Bereich, sind zu finden bei Lord Rayleigh, Phil. Mag. (5), 8. S. 404. 1879.

§ 4. Spezielle Beugungsprobleme.

In diesem Paragraphen wollen wir an einigen gewöhnlich in den Lehrbüchern der Optik behandelten Beispielen zeigen, wie (20) zur Behandlung spezieller Beugungsprobleme verwendet werden kann.

a) *Halbebene.* Da hier offenbar nur ein einziger $\zeta =$ Minimum entsprechender Punkt P_ν vorhanden ist, werden die Beugungserscheinungen in diesem Falle direkt durch (20) gegeben, wobei man nur zu berücksichtigen hat, daß hier $K = \infty$ ist. Mit Hilfe von (22) läßt sich dann leicht zeigen, daß (20) für kleine Beugungswinkel in den von E. Maey (vgl. § 2) verallgemeinerten Kirchhoffschen Ausdruck für die Beugung an einer Halbebene übergeht.

b) *Durch zwei parallele Gerade begrenzter Streifen.* Entsprechend den beiden beugenden Kanten sind hier zwei Punkte P_ν (P_1 und P_2) vorhanden, und die Beugungserscheinungen werden daher durch die Summe zweier Funktionen (20) beschrieben. Es ist klar, daß im Schattenraume alle Wurzeln mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen sind.

Liegen Lichtquelle und Aufpunkt vom Schirmrande weit entfernt und betrachtet man nur Punkte unweit von der Schattengrenze, so läßt sich die den ganzen Beugungsvorgang beschreibende Funktion durch den Ausdruck:

$$u = \text{const.} \left(\int\limits_{+\infty}^{\sqrt{\frac{2k}{\pi}(r_1 + \varrho_1 - R)}} e^{i\frac{\pi}{2}w^2}\, dw + \int\limits_{+\infty}^{\sqrt{\frac{2k}{\pi}(r_2 + \varrho_2 - R)}} e^{i\frac{\pi}{2}w^2}\, dw \right)$$

darstellen, wobei die Indizes 1 und 2 den Punkten P_1 und P_2 entsprechen. In diesem Falle kann man nämlich die in (20) vor dem Integralzeichen stehenden Glieder ihrem absoluten Betrag nach als konstant und bei beiden Integralen als gleich ansehen. Auch das Vorzeichen dieser Konstanten ändert sich beim Durchgang durch die Schattengrenzen nicht, weil an jeder Schattengrenze der entsprechende $\cos(n, r)$ gleichzeitig mit der zugehörigen Wurzel $\sqrt{r_\nu + \varrho_\nu - R}$ sein Vorzeichen ändert. Für den Fall, daß man sich auf die durch den leuchtenden Punkt hindurchgehende und auf die beiden beugenden Kanten des Schirmes senkrecht stehende Ebene beschränkt, erhält man mit Hilfe von (22) und unter Beachtung unserer Voraussetzungen leicht die bei Kirchhoff[1]) auftretende Formel.

c) *Spalt.* Der Sachverhalt ist hier ähnlich wie in dem soeben behandelten Falle. Auch hier treten zwei Punkte P_ν und dementsprechend zwei Funktionen $u_B|_\nu$ auf. Betrachtet man zunächst einen Aufpunkt, der sich etwa in dem Schattenraume des Schirmes befindet, auf dessen Rande P_1 gelegen ist, so ist der P_1 entsprechende $\cos(n, r)$ positiv, der P_2 entsprechende aber negativ. Der Tatsache, daß zu einem solchen Aufpunkt nur das an den beiden Punkten P_ν abgebeugte aber kein direkt einfallendes Licht gelangen kann, muß man dadurch Rechnung tragen, daß man der Wurzel $\sqrt{r_\nu + \varrho_\nu - R}$ für beide Punkte P_ν das positive Vorzeichen erteilt. Unter den gleichen Voraussetzungen über den in (20) vor dem Integralzeichen auftretenden Ausdruck, wie sie im vorigen Beispiel gemacht wurden, erhält man daher für unseren Aufpunkt in dem P_1 entsprechenden Schattenraume:

$$u = \text{const.}\left(\int\limits_{+\infty}^{\sqrt{\frac{2k}{\pi}(r_1+\varrho_1-R)}} e^{i\frac{\pi}{2}w^2}\,dw - \int\limits_{+\infty}^{\sqrt{\frac{2k}{\pi}(r_2+\varrho_2-R)}} e^{i\frac{\pi}{2}w^2}\,dw\right) = \text{const.}\int\limits_{\sqrt{\frac{2k}{\pi}(r_2+\varrho_2-R)}}^{\sqrt{\frac{2k}{\pi}(r_1+\varrho_1-R)}} e^{i\frac{\pi}{2}w^2}\,dw\,.$$

Nun kann man aber leicht einsehen, daß der obige Ausdruck in allen Aufpunkten anwendbar bleibt, wenn wir nur wie gewöhnlich übereinkommen, daß die Wurzel $\sqrt{r_\nu + \varrho_\nu - R}$ beim Passieren der zugehörigen Schattengrenze (gleichzeitig mit dem entsprechenden $\cos(n, r_\nu)$) ihr Vorzeichen ändert. Nach § 3 wird dann beim Hindurchtreten durch die P_1 zugehörige Schattengrenze das erste Integral die von P_1 ausgehende Beugungswelle + direkt einfallendes Licht, der ganze obige Ausdruck, also beide Beugungswellen und das einfallende Licht darstellen, wie es in der Tat sein soll. Wird nun aber die zweite zu P_2 gehörige Schattengrenze überschritten, so stellt, wie man sich leicht überzeugt, das zweite Integral die Beugungswelle von P_2 minus dem direkt einfallenden Lichte dar, der ganze obige Ausdruck somit die Summe der beiden

---

[1]) a. a. O., S. 129.

Beugungswellen allein. Für Aufpunkte in der durch den leuchtenden Punkt hindurchgehenden, senkrecht zu den beugenden Kanten des Spaltes stehenden Ebene geht der obige Ausdruck in den gewöhnlich für die Beugung an einem Spalt abgeleiteten über.[1])

Die Vorteile des hier eingeschlagenen Verfahrens treten bei diesen einfachen Beispielen eigentlich gar nicht recht hervor. Die Behandlung von weiteren bisher nicht untersuchten speziellen Fällen ist aber nicht das Ziel der vorliegenden Untersuchung, da diesbezügliche Messungen fehlen. Man kann sich jedoch leicht vorstellen, wie auch kompliziertere Fälle zu behandeln sind, etwa Schirme von der Gestalt geradlinig begrenzter Polygone usf. Ebenso verzichten wir mangels entsprechender Messungen auf die Behandlung von Beispielen, bei denen die Formel (11) angewandt werden müßte.

§ 5. Allgemeine Bemerkungen.

Unsere Überlegungen zeigen, daß man, kurz, wenn auch nicht präzis gesprochen, bei „großen“ Schirmen, deren Berandung einen „glatten“ Verlauf hat, sich vorstellen kann, daß die Beugungserscheinungen in erster Näherung durch eine Art Reflexion des auffallenden Lichtes an dem Schirmrande zustande kommen; oder der gleiche Sachverhalt anders formuliert: man kann sich denken, daß in erster Näherung das Licht bei großen und glatt verlaufenden Schirmen sich in Bahnen fortpflanzt, wo der Lichtweg „Lichtquelle-beugender Rand-Aufpunkt“ einen stationären Wert hat.

Dadurch wird in den Mechanismus des Zustandekommens von Beugungserscheinungen wenigstens bei dieser Klasse von Schirmen ein gewisser Einblick erhalten. In den Fällen, wo unsere Überlegungen anwendbar sind, wird in erster Näherung der Beugungsvorgang auf ein einfaches leicht diskutierbares Phänomen, eine Art von Reflexion zurückgeführt. Als „eigentliche“ Beugungsprobleme wird man von diesem Standpunkt aus dann die Fälle ansprechen, in denen unsere Überlegungen nicht anwendbar sind und die daher im allgemeinen nicht leicht überblickt werden können.

Unsere Einsicht in das Zustandekommen der Beugungserscheinungen scheint auf den ersten Blick wenigstens einen

---

1) Vgl. etwa Laue, Enzykl. d. math. Wiss. Bd. V_3. S. 435.

Zusammenhang mit gewissen Vorstellungen aus der Theorie der Lichtquanten aufzuweisen, in der man mit **Einstein** annimmt, daß das Licht sich als Nadelstrahlung im Raume ausbreitet. Auf Grund unserer Vorstellungen könnte man daher geneigt sein, die Beugung als Reflexion der Nadelstrahlung am beugenden Rande aufzufassen. Die Kohärenz bliebe aber, selbst wenn man diesen Vorstellungskreis akzeptieren wollte, immer noch ein ungelöstes Rätsel. Wir dürfen jedoch auch nicht daran vergessen, daß unsere Ergebnisse nur für eine besondere Klasse von beugenden Schirmen, keinesfalls aber ganz allgemein gelten. Wenn man daher annimmt, daß die klassische Lichttheorie die beobachteten Beugungserscheinungen exakt darstellt, so können wir für diese Auffassung, die Beugung als eine Art von Reflexion zu deuten, keine allgemeine Geltung beanspruchen und sie daher keineswegs zur Klärung prinzipieller Fragen verwenden.

Wir wollen hier noch die Frage streifen, inwiefern man bei den exakten Lösungen der Beugunsgprobleme ähnliche Ergebnisse erwarten kann. Man kann schon von vornherein darauf gefaßt sein, daß, wenn Körper aus dielektrischen oder metallischen Stoffen als beugende Schirme benutzt werden, im allgemeinen ein nur schwer überblickbarer Einfluß der Materialkonstanten und der Gestalt der benutzten Körper sich geltend machen wird. Aber selbst, wenn man das Problem idealisiert und aus vollkommenen Leitern bestehende Schirme voraussetzt, könnte ihre Gestalt die Beugungserscheinungen durch Reflexion des Lichtes stören, z. B. an den Teilen des Schirmes, die der Kurve benachbart sind, in der der Lichtkegel den Schirm berührt. Um allen solchen Einflüssen aus dem Wege zu gehen, wollen wir nur ebene, vollkommen reflektierende Schirme in Betracht ziehen, deren Gestalt, d. h. eigentlich Berandung, sonst beliebig sein kann. Solche Probleme lassen sich nach dem Spiegelungsverfahren lösen, wobei man zur Spiegelung Funktionen zu verwenden hat, die in zweifachen **Riemann**schen Räumen eindeutig sind. Die Begrenzungskurve des Schirmes bildet dann die Verzweigungslinie (das Analogon zum Verzweigungspunkt in der Funktionentheorie) des zweifachen **Riemann**schen Raumes.

Betrachten wir andererseits die zu dem gleichen Problem gehörige **Kirchhoff**sche Lösung, so ist diese in einem unendlich vielfachen Riemannschen Raume, der die gleiche Verzweigungslinie besitzt, wie der eben erwähnte zweifache, eindeutig. Sie hat aber in diesem Riemannschen Raume außer der Lichtquelle noch weitere singuläre Punkte.[1])

Man erkennt nun leicht, daß alle unsere Schlüsse, die Kirchhoffsche Lösung betreffend, an den folgenden Tatsachen hängen:

1. Die Funktion, die den Vorgang darstellt, läßt sich in dem Bereiche, in dem wir sie physikalisch deuten, in eine einfallende und eine Beugungswelle sondern.

2. Die Beugungswelle läßt sich in der Form (3) darstellen[2]), d. h. sie entspricht einer Wellenbewegung, die sich vom beugenden Rande aus ausbreitet.

3. Die in (3) auftretende Funktion $f(s)$ ist so beschaffen, daß sie den in der Schattengrenze erforderlichen Sprung der Beugungswelle liefert.

Wenn also bei den strengen Lösungen die Beugungswelle diese drei Bedingungen wenigstens in erster Näherung erfüllt, so ist damit sichergestellt, daß unsere Resultate in den Hauptumrissen auch bei den strengen Lösungen Geltung beanspruchen.

---

[1]) Vgl. A. Rubinowicz, a. a. O., S. 265.

[2]) Dabei soll jedoch nicht vorausgesetzt werden, daß $f(s)$ gerade die in (3) auftretende spezielle Form hat.

(Eingegangen 7. August 1923.)

4. *Über die Grenzbedingungen des Schwerefeldes an Unstetigkeitsflächen;*

von Nikhilranjan Sen.

Erster Teil.

Nach Einstein ist das Gravitationsfeld durch zehn Differentialgleichungen definiert, deren Lösung die zehn Komponenten des Maßtensors an einem Punkte der vierdimensionalen (Raum-Zeit) Welt bildet. Auf diese Weise bringt die Theorie von Einstein die Geometrie in engen Zusammenhang mit der Materie in der Welt und ihrem inneren dynamischen Zustand. Die Wahl der günstigen Lösung kommt dadurch, daß man sich in unendlicher Ferne das ungestörte metrische Feld der speziellen Relativitätstheorie herrschend denkt. Diese Grenzbedingung ist von Einstein in seiner letzten Theorie auch beseitigt worden. Nach seinem neueren Standpunkt wäre die Welt ein geschlossenes Gebilde[1]), das notwendig endlich erscheint, und die richtige Lösung der Gleichungen braucht außer den Stetigkeitseigenschaften keine anderen Eigenschaften zu haben.

Ausgehend von dem Begriff eines stetigen Maßtensors im Gravitationsfelde wird es interessant sein, die speziellen Eigenschaften einer Fläche zu studieren, wo gewisse Unstetigkeiten auftreten. Physikalisch betrachtet, können wir an eine mit Materie belegte Fläche denken. Es fragt sich jetzt, welche speziellen Eigenschaften des Schwerefeldes sich auf der Fläche bemerkbar machen. Auch umgekehrt kann man fragen, ob es mit der Materie irgendwie zusammenhängt, wenn das Schwerefeld sich in irgendeiner speziellen Weise auf einer dreidimensionalen Fläche verhält. Die Frage läßt sich auch anders ausdrücken. Nach der Einsteinschen Theorie sind alle Koordinatensysteme bei der Formulierung der Naturgesetze gleichwertig. Durch Koordinatentrans-

---

1) A. Einstein, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 6. 1917.

formation können wir Unstetigkeiten auf einer vorgegebenen Fläche erzeugen, und es ist auch in manchen Fällen möglich, Diskontinuitäten auf einer Fläche durch Koordinatentransformation wegzuschaffen. Solche Diskontinuitäten, die durch Koordinatentransformation hervorgerufen werden, sind mathematischer Art ohne jede physikalische Bedeutung. Wir können aber auch an Unstetigkeiten ganz anderer Art denken, die einen physikalischen Ursprung haben, z. B. an eine Flächendichte der Materie oder Elektrizität. Solche Unstetigkeiten müssen ihrer Natur nach von jeder Wahl des Koordinatensystems unabhängig sein. Jetzt können wir uns die Frage stellen, welche von solchen Unstetigkeiten bloße mathematische Unstetigkeiten sind und welche einen physikalischen Ursprung haben.

Diese Arbeit betrifft die Entscheidung dieser Frage, die noch nicht systematisch behandelt worden ist. In einer Arbeit von Lanczos[1]), die vor kurzem erschienen ist und ein anderes Problem behandelt, kommt einmal die Frage vor. Lanczos hat als Antwort einige Gleichungen aufgestellt, die sich alle auf ein spezielles Koordinatensystem beziehen, das nach Lanczos eine physikalische Bedeutung haben soll. Die Durchführung der betreffenden Transformation wird jedenfalls analytische Schwierigkeiten machen. In dieser Arbeit ist keinem Koordinatensystem ein Vorzug gegeben, und die Resultate sind absolut allgemein. Die Idee einer „metrischen Belegung" in einem Koordinatensystem, das nicht (nach der Bezeichnung von Lanczos) normal ist, wird überflüssig, und nach den Gleichungen (II) läßt sich unsere Frage ohne eine vorher erforderliche Koordinatentransformation beantworten.

1.

Es sei

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

irgendeine (dreidimensionale) Fläche in unserm vierdimensionalen Raum. Definieren wir den Normalvektor ν als

$$\nu_s = \frac{1}{F} \frac{\partial f}{\partial x_s} \qquad (s = 1, 2, 3, 4 \tag{1}$$

---

[1]) Lanczos, Phys. Zeitschr. 1922. S. 539—43.

und legen wir ihn fest durch die weitere Bedingung

(2) $\nu_s \nu^s$[1] $= -1 .$

Wenn der Vektor an einer Stelle der Fläche einer raumartigen Strecke entspricht, dann muß die rechte Seite durch $+1$ ersetzt werden. F ist ein Skalar und läßt sich folgendermaßen berechnen.

Von (1) ist

$$F \cdot \nu_s = \frac{\partial f}{\partial x_s} .$$

Multipliziert man die Gleichung mit ν^s und summiert über s, so hat man

$$\begin{aligned} F &= -\frac{\partial f}{\partial x_s} \cdot \nu^s \\ &= -\frac{\partial f}{\partial x_s} \cdot g^{sr} \nu_r \\ &= -\frac{1}{F} g^{sr} \frac{\partial f}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_r} . \end{aligned}$$

Daraus ist

$$F = \pm \sqrt{-g^{sr} \frac{\partial f}{\partial x_s} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_r}} , \tag{3}$$

wo das Vorzeichen vor der Wurzel die Richtung der Normale angibt. In dem oben erwähnten Falle muß das negative Vorzeichen unter der Wurzel durch das positive ersetzt werden.

2.

Wir fangen mit den bekannten Identitäten[2]

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\sqrt{-g}\, g^{kl} \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix} \right) &= g^{kl} \frac{\partial}{\partial x_l} \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{-g}} \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, g^{kl})}{\partial x_l} , \\ \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\sqrt{-g}\, g^{kl} \begin{Bmatrix} k\,l \\ m \end{Bmatrix} \right) &= g^{kl} \frac{\partial}{\partial x_m} \begin{Bmatrix} k\,l \\ m \end{Bmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{-g}} \begin{Bmatrix} k\,l \\ m \end{Bmatrix} \frac{\partial (\sqrt{-g}\, g^{kl})}{\partial x_m} \end{aligned}$$

---

[1] Tritt in einer Formel derselbe Index zweimal auf, so ist über den Index von 1—4 zu summieren.

[2] Laue, Relativitätstheorie 2. S. 203.

an; durch Subtraktion und nachfolgende Integration über einen vierdimensionalen Raumteil hat man

$$\int\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sqrt{-g}\,g^{kl}\left\{ {km \atop m} \right\}\right)-\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\sqrt{-g}\,g^{kl}\left\{ {kl \atop m} \right\}\right)\right]d\Sigma$$

$$=\int\left[(R+H)+\frac{1}{\sqrt{-g}}\left\{ {km \atop m}\right\}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,g^{kl})}{\partial x_l} - \frac{1}{\sqrt{-g}}\left\{ {kl \atop m}\right\}\frac{\partial(\sqrt{-g}\,g^{kl})}{\partial x_m}\right]d\Sigma,$$

wobei $d\Sigma = \sqrt{-g}\,d x_1\,d x_2\,d x_3\,d x_4$, R = Raumkrümmung und $H = g^{kl}\left[\left\{ {kl \atop n}\right\}\left\{ {nm \atop m}\right\} - \left\{ {kn \atop m}\right\}\left\{ {lm \atop n}\right\}\right]$ die Hamiltonsche Funktion des Gravitationsfeldes bedeuten. Nach weiterer Umformung der letzten zwei Glieder der rechten Seite (die tatsächlich $= -2H$ sind) hat man die Identität in endgültiger Form

$$\left.\begin{aligned}&\int\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sqrt{-g}\,g^{kl}\left\{ {km \atop m}\right\}\right)\right.\\ &\qquad\left.-\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\sqrt{-g}\,g^{kl}\left\{ {kl \atop m}\right\}\right)\right]d\Sigma = \int(R-H)\,d\Sigma.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Stellen wir uns vor, daß der Integrationsbereich unendlich schmal ist, und nehmen wir weiter an, daß in diesem Bereich die g^{kl} alle endlich und zwar stetig sind; dann erleiden in diesem unendlich schmalen Raumteil die g^{kl} unendlich kleine Änderungen und sämtliche Differentialquotienten $\frac{\partial g^{kl}}{\partial x_m}$ können wir in diesem Bereich als endlich annehmen. Die Funktion H, die aus Produkten von lauter ersten Differentialquotienten von g_{ik} nach x_m besteht, hat im Integrationsraum einen endlichen Wert. Deshalb verschwindet das Integral $\int H\,d\Sigma$, wenn der Bereich im limes verschwindend klein ist. Nach den Einsteinschen Gravitationsgleichungen setzen wir jetzt

$$R = \varkappa\,T$$

ein, wobei T der Skalar sein soll, der aus dem Energieimpulstensor entsteht. Rücken jetzt die beiden Grenzflächen zueinander, dann wird der Integrationsraum schmäler und schmäler. Nehmen wir an, daß mit der abnehmenden Dicke der Energieimpulstensor T_{ik} auch zunimmt, und wenn die

Dicke ε unendlich klein ist, wächst T zu einem unendlich großen Wert an, so daß $\lim\limits_{\varepsilon=0} \int T\, d\Sigma$ gegen den Wert $\mathfrak{T}\, dS$ konvergiert; dabei bedeutet dS ein dreidimensionales Flächenstück, das ein Stück der Grenze unseres Gebietes ist, und $\mathfrak{T}$ eine skalare Größe, die wir die „Flächendichte“ des Energieimpulsskalars nennen wollen. Nun wollen wir die linke Seite umformen. Das geschieht durch partielle Integration und das ganze Raumintegral läßt sich in ein Flächenintegral umwandeln. Durch einmalige Integration haben wir

$$\int \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sqrt{-g}\, g^{kl} \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix}\right) d\Sigma$$
$$= \int g^{k1} \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix} \sqrt{-g}\, dx_2\, dx_3\, dx_4 + \int g^{k2} \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix} \sqrt{-g}\, dx_1\, dx_3\, dx_4$$
$$+ \int g^{k3} \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix} \sqrt{-g}\, dx_1\, dx_2\, dx_4 + \int g^{k4} \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix} \sqrt{-g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 .$$

Nun sind die vier Größen

$$\sqrt{-g}\, dx_2\, dx_3\, dx_4, \quad \sqrt{-g}\, dx_1\, dx_3\, dx_4,$$
$$\sqrt{-g}\, dx_1\, dx_2\, dx_4, \quad \sqrt{-g}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

gleich

$$\nu_1 dS, \quad \nu_2 dS, \quad \nu_3 dS, \quad \nu_4 dS,$$

wobei $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ die kovarianten Komponenten des Normalvektors an einem Punkte der Grenzfläche und dS das Flächenstück um diesen Punkt bedeuten. Der Beweis befindet sich im § 3. Die vier Integrale auf der rechten Seite sind identisch mit

$$\int g^{k1} \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix} \nu_1\, dS, \quad \int g^{k2} \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix} \nu_2\, dS,$$
$$\int g^{k3} \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix} \nu_3\, dS, \quad \int g^{k4} \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix} \nu_4\, dS$$

und deshalb ist

$$\int \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sqrt{-g}\, g^{kl} \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix}\right) d\Sigma = \int g^{ks} \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix} \nu_s\, dS .$$

In ähnlicher Weise ist

$$\int \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\sqrt{-g}\, g^{kl} \begin{Bmatrix} k\,l \\ m \end{Bmatrix}\right) d\Sigma = \int g^{kl} \begin{Bmatrix} k\,l \\ s \end{Bmatrix} \nu_s\, dS .$$

Schließlich hat man von (4)

$$\int \left[g^{ks} \left\{ {km \atop m} \right\} - g^{kl} \left\{ {kl \atop s} \right\} \right] \nu_s \, dS = \varkappa \int T \, dS;$$

das Integral links ist auf beide Seiten der Fläche zu erstrecken. Weil dies für jedes Flächenstück gültig ist, gilt an jedem Punkte der Fläche die Gleichung

$$\text{(I)} \qquad \left[g^{ks} \left\{ {km \atop m} \right\} - g^{kl} \left\{ {kl \atop s} \right\} \right]_2^1 \nu_s = \varkappa \mathfrak{T},$$

wo die Indizes 1 und 2 die Differenz der Werte der Funktion an beiden Seiten der Fläche bedeuten.

Die Funktion auf der linken Seite der Gleichung (I) hat eine physikalische Bedeutung. Unter der Voraussetzung, daß auf einer Fläche sämtliche g_{ik} stetig bleiben, bedeutet ein Sprung dieser Funktion eine Flächenbelegung der Materie, und zwar mißt er die Flächendichte des Energieimpulsskalars. Bei der Abwesenheit solcher materiellen Belegung verschwindet diese Funktion. Das Auftreten der Unstetigkeiten einzelner Differentialquotienten hat im allgemeinen keine physikalische Bedeutung.

Setzt man jetzt

$$\mathfrak{R} = \left(g^{ks} \left\{ {km \atop m} \right\}_2^1 - g^{kl} \left\{ {kl \atop s} \right\}_2^1 \right) \nu_s,$$

so schreibt man die Gleichung (I) in der Formel

$$\mathfrak{R} = \varkappa \mathfrak{T}.$$

Nun ist $\mathfrak{T}$ ein Skalar; deshalb muß auch die Funktion

$$\left(g^{ks} \left\{ {km \atop m} \right\}_2^1 - g^{kl} \left\{ {kl \atop s} \right\}_2^1 \right) \nu_s$$

skalare Eigenschaften haben, d. h. diese Funktion ist in jedem Punkte auf einer Fläche (auf der g_{ik} alle stetig sind) eine Invariante, genau wie der Krümmungsskalar R in jedem Punkte des Riemannschen Raumes eine Invariante ist. Wenn wir uns der Gleichung $R = \varkappa T$ erinnern, sehen wir, daß diese neue Invariante $\mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{T}$ genau in derselben Weise zusammenhängt wie die Krümmung R mit dem Energieimpulsskalar T.

In der bekannten Schwarzschildschen Lösung für das Gravitationsfeld einer Flüssigkeitskugel treten die g_{ik} auf der Oberfläche alle stetig auf, aber eine der ersten Differentialquotienten, nämlich $\partial g_{11}/\partial r$ ist unstetig. In diesem Falle ist die Oberfläche durch die Gleichung

$$r - a = 0$$

gegeben. Der Normalvektor hat nur eine Komponente, nämlich

$$\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{-g_{11}}}, \quad \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 0.$$

Wir können erwarten, daß in diesem Falle die Funktion

$$g^{k1} \left\{\begin{matrix} k\,m \\ m \end{matrix}\right\}_2^1 - g^{kl} \left\{\begin{matrix} k\,l \\ 1 \end{matrix}\right\}_2^1$$

verschwindet.[1] Nach den folgenden Rechnungen

$$g^{k1} \left\{\begin{matrix} k\,m \\ m \end{matrix}\right\}_2^1 = g^{k1} g^{mn} \left[\begin{matrix} k\,m \\ n \end{matrix}\right]_2^1$$

$$= \frac{1}{2} g^{k1} g^{mn} \left(\frac{\partial g_{kn}}{\partial x_m} + \frac{\partial g_{mn}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{km}}{\partial x_n} \right)_2^1 = \frac{1}{2} (g^{11})^2 \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial r} \right)_2^1$$

$$g^{kl} \left\{\begin{matrix} k\,l \\ 1 \end{matrix}\right\}_2^1 = g^{kl} g^{1n} \left[\begin{matrix} k\,l \\ n \end{matrix}\right]_2^1$$

$$= \frac{1}{2} g^{kl} g^{1n} \left(\frac{\partial g_{kn}}{\partial x_l} + \frac{\partial g_{ln}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x_n} \right)_2^1 = \frac{1}{2} (g^{11})^2 \left(\frac{\partial g_{11}}{\partial r} \right)_2^1$$

$$(x_1 = r,\ x_2 = \vartheta,\ x_3 = \Phi,\ x_4 = t)$$

ist es leicht zu sehen, daß die obige Funktion tatsächlich gleich Null ist. Damit ist ein Beispiel angeführt, das die Gleichung (I) bestätigt.

3.

Wir wollen jetzt allgemeine Tensorgleichungen aufstellen, durch die unsere Frage endgültig entschieden wird. Die allgemeinen Gravitationsgleichungen lauten

$$R_{kl} = -\varkappa \left(T_{kl} - \tfrac{1}{2} g_{kl} T \right) \qquad (k, l = 1, 2, 3, 4).$$

Betrachten wir eine Komponente des Krümmungstensors

$$R_{kl} = \frac{\partial}{\partial x_l} \left\{\begin{matrix} k\,m \\ m \end{matrix}\right\} - \frac{\partial}{\partial x_m} \left\{\begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} k\,n \\ m \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} l\,m \\ n \end{matrix}\right\} - \left\{\begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} m\,n \\ n \end{matrix}\right\}.$$

Weil

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_m} \left(\sqrt{-g} \left\{\begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix}\right\} \right) = \frac{\partial}{\partial x_m} \left\{\begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix}\right\} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial (\sqrt{-g})}{\partial x_m}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_m} \left\{\begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} k\,l \\ m \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} m\,n \\ n \end{matrix}\right\}$$

---

[1] Weil auf der Oberfläche keine Flächendichte vorhanden ist. $T = 0$.

und

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sqrt{-g}\begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix}\right) = \frac{\partial}{\partial x_l}\begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l\,n \\ n \end{Bmatrix} \tag{5}$$

sind, können wir R_{kl} in der Form schreiben:

$$R_{kl} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sqrt{-g}\begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix}\right) - \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\sqrt{-g}\begin{Bmatrix} k\,l \\ m \end{Bmatrix}\right) + \begin{Bmatrix} k\,n \\ m \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l\,m \\ n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l\,n \\ n \end{Bmatrix}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit

$$d\Sigma = \sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$$

und integrieren über einen schmalen Raumteil, dessen Dicke wir im Limes verschwindend klein machen wollen, dann haben wir

$$\left\{\begin{aligned} &\int\Big[\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sqrt{-g}\begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix}\right) - \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x_m}\left(\sqrt{-g}\begin{Bmatrix} k\,l \\ m \end{Bmatrix}\right) \\ &+ \begin{Bmatrix} k\,n \\ m \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l\,m \\ n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l\,n \\ n \end{Bmatrix}\Big]\,d\Sigma = -\varkappa\int\left(T_{kl} - \tfrac{1}{2}g_{kl}T\right)d\Sigma, \end{aligned}\right. \tag{6}$$

wobei R_{kl} durch $-\varkappa\left(T_{kl} - \frac{1}{2}g_{kl}T\right)$ ersetzt worden ist. Jetzt nehmen wir einen Grenzübergang vor, wie im § 2, wobei die Dicke ε des Raumes verschwindend klein wird und nehmen an, daß damit auch der Tensor T_{kl} so anwächst, daß der

$$\lim_{\varepsilon=0}\int\left(T_{kl} - \tfrac{1}{2}g_{kl}T\right)d\Sigma$$

gegen $-\mathfrak{T}_{kl}\,dS$ konvergiert, wobei dS ein Stück der Grenzfläche bedeutet. Setzen wir nun voraus, daß der Maßtensor in dem Integrationsraum stetig ist, so verschwinden im Limes $\varepsilon = 0$ nach Integration, wie wir schon im Kapitel 2 gesehen haben, die letzten zwei Glieder auf der linken Seite. Wir wollen jetzt das Integral

$$\int\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{-g}\begin{Bmatrix} k\,l \\ m \end{Bmatrix}\right)d\Sigma$$

umformen. Durch einmalige Integration nach x_1 haben wir

$$\int\sqrt{-g}\begin{Bmatrix} k\,l \\ m \end{Bmatrix}dx_2\,dx_3\,dx_4,$$

wobei der Integrand den Wert dieser Funktion an einem Stück dS der Grenzfläche bedeuten soll. Wir behaupten, daß die vier Funktionen

$$\sqrt{-g}\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,,\quad \sqrt{-g}\,dx_1\,dx_3\,dx_4\,,$$
$$\sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_4\,,\quad \sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3$$

an der Grenzfläche identisch mit $\nu_1\,dS$, $\nu_2\,dS$, $\nu_3\,dS$, $\nu_4\,dS$ sind. Es seien

$$d^{\mathrm{I}}x_i\,,\ d^{\mathrm{II}}x_i\,,\ d^{\mathrm{III}}x_i\,,\ d^{\mathrm{IV}}x_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

beliebige Verschiebungen an einem Punkte. Bekanntlich stellen nun die vier Funktionen

$$\sqrt{-g}\begin{vmatrix} d^{\mathrm{II}}x_2 & d^{\mathrm{II}}x_3 & d^{\mathrm{II}}x_4 \\ d^{\mathrm{III}}x_2 & d^{\mathrm{III}}x_3 & d^{\mathrm{III}}x_4 \\ d^{\mathrm{IV}}x_2 & d^{\mathrm{IV}}x_3 & d^{\mathrm{IV}}x_4 \end{vmatrix},\qquad \sqrt{-g}\begin{vmatrix} d^{\mathrm{I}}x_1 & d^{\mathrm{I}}x_3 & d^{\mathrm{I}}x_4 \\ d^{\mathrm{III}}x_1 & d^{\mathrm{III}}x_3 & d^{\mathrm{III}}x_4 \\ d^{\mathrm{IV}}x_1 & d^{\mathrm{IV}}x_3 & d^{\mathrm{IV}}x_4 \end{vmatrix},$$

$$\sqrt{-g}\begin{vmatrix} d^{\mathrm{I}}x_1 & d^{\mathrm{I}}x_2 & d^{\mathrm{I}}x_4 \\ d^{\mathrm{II}}x_1 & d^{\mathrm{II}}x_2 & d^{\mathrm{II}}x_4 \\ d^{\mathrm{IV}}x_1 & d^{\mathrm{IV}}x_2 & d^{\mathrm{IV}}x_4 \end{vmatrix},\qquad \sqrt{-g}\begin{vmatrix} d^{\mathrm{I}}x_1 & d^{\mathrm{I}}x_2 & d^{\mathrm{I}}x_3 \\ d^{\mathrm{II}}x_1 & d^{\mathrm{II}}x_2 & d^{\mathrm{II}}x_3 \\ d^{\mathrm{III}}x_1 & d^{\mathrm{III}}x_2 & d^{\mathrm{III}}x_3 \end{vmatrix}$$

die vier kovarianten Komponenten eines Vierervektors dar.[1]) Setzen wir in diesem Schema $d^i x_k = 0$, $i \neq k$, dann sehen wir, daß die vier Ausdrücke

$$\sqrt{-g}\,dx_2\,dx_3\,dx_4\,,\quad \sqrt{-g}\,dx_1\,dx_3\,dx_4\,,$$
$$\sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_4\,,\quad \sqrt{-g}\,dx_1\,dx_2\,dx_3$$

sich wie die kovarianten Komponenten eines Vierervektors verhalten. Wenn wir jetzt zeigen können, daß in irgendeinem Koordinatensystem diese vier Komponenten mit den kovarianten Vektorkomponenten $\nu_1\,dS$, $\nu_2\,dS$, $\nu_3\,dS$, $\nu_4\,dS$ (dS ist dabei ein Skalar) zusammenfallen, dann sind wir fertig. Führt man durch Transformation ein rechtwinkliges Koordiantensystem ein, in dem in der Nachbarschaft des betrachteten Weltpunktes Minkowskische Geometrie gilt, so besteht offenbar in diesem Koordinatensystem diese Gleichheit. Deshalb ist

$$\int \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\sqrt{-g}\begin{Bmatrix} k\,l \\ m \end{Bmatrix}\right) d\Sigma = \int \begin{Bmatrix} k\,l \\ m \end{Bmatrix} \nu_1\,dS$$

und im allgemeinen ist

$$\int \frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\sqrt{-g}\begin{Bmatrix} k\,l \\ m \end{Bmatrix}\right) d\Sigma = \int \begin{Bmatrix} k\,l \\ m \end{Bmatrix} \nu_s\,dS.$$

---

[1]) **Laue**, Relativitätstheorie 2. (2. Aufl.) S. 55.

Nehmen wir auf der linken Seite von (6) eine solche Transformation und nachher auf beiden Seiten einen Grenzübergang, wie wir es schon im § 2 getan haben, vor, dann bekommen wir die Gleichungen

$$\text{(II)} \qquad \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix}^1_2 v_l - \begin{Bmatrix} k\,l \\ s \end{Bmatrix} v_s = \varkappa\, \mathfrak{T}_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, 3, 4),$$

die an jedem Punkte der Fläche gelten.

Von (5) folgt

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sqrt{-g} \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{-g} \begin{Bmatrix} l\,m \\ m \end{Bmatrix}\right).$$

Aus dieser Gleichung hat man durch Integration

$$\int \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix} v_l\, dS = \int \begin{Bmatrix} l\,m \\ m \end{Bmatrix} v_k\, dS$$

und schließlich im Limes

$$\text{(7)} \qquad \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix}^1_2 v_l = \begin{Bmatrix} l\,m \\ m \end{Bmatrix}^1_2 v_k.$$

Der Tensor auf der linken Seite von (II) ist deshalb symmetrisch.

Es ist leicht zu sehen, daß im statischen Felde analog Gleichungen auch für zweidimensionale Flächen gelten. Schreiben wir eine Krümmungskomponente in der Form

$$\sqrt{g_{44}}\, R_{kl} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sqrt{\gamma}\sqrt{g_{44}} \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix}\right) - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\sqrt{\gamma}\sqrt{g_{44}} \begin{Bmatrix} k\,l \\ m \end{Bmatrix}\right) + \cdots$$

$$(g_{ik} = -\gamma_{ik}\,[i, k = 1, 2, 3],\ |g_{ik}| = g_{44} \cdot \gamma)$$

und integrieren wir die entsprechende Gleichung über einen schmalen dreidimensionalen Raum, so erhalten wir

$$\int \left[\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x_l}\left(\sqrt{\gamma}\sqrt{g_{44}} \begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix}\right) - \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\sqrt{\gamma}\sqrt{g_{44}} \begin{Bmatrix} k\,l \\ m \end{Bmatrix}\right) + \cdots\right] \sqrt{\gamma}\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = -\varkappa \int \left(T_{kl} - \tfrac{1}{2} g_{kl} T\right) dS$$

$$(dS = \sqrt{\gamma}\, dx_1\, dx_2\, dx_3).$$

Die ersten zwei Glieder auf der linken Seite geben nach Integration das Oberflächenintegral

$$\int \sqrt{g_{44}} \left[\begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix} v_l - \begin{Bmatrix} k\,l \\ s \end{Bmatrix} v_s\right] d\sigma.$$

Wir machen jetzt die Dicke der Schicht ε unendlich klein und nehmen an, daß der Energieimpulstensor dabei so anwächst, daß $\lim\limits_{\varepsilon=0} \int \sqrt{g_{44}}\,(T_{kl} - \frac{1}{2}\, g_{kl}\, T)\, dS$ gegen $-\sqrt{g_{44}}\, \mathfrak{T}_{kl}\, d\sigma$ konvergiert. Die letzten zwei Glieder auf der linken Seite liefern bei Grenzübergang den Beitrag Null. Aus diesen Betrachtungen haben wir auch in diesem Falle Gleichungen von genau derselben Form wie (II).

Multiplizieren wir die Gleichung (II) mit g^{kl} und summieren wir nachher über k und l, so haben wir wieder die Gleichung (I). Wir können uns nochmals durch eine kleine Rechnung überzeugen, daß in der bekannten Schwarzschildschen Lösung für das Schwerefeld einer Flüssigkeitskugel sämtliche Funktionen auf der linken Seite von (II) auf der Oberfläche $r = a$ verschwinden, was wir bei der Abwesenheit einer Flächenbelegung auch erwarten müssen.

Die Gleichung (I), die wir in § 2 aufgestellt haben, können wir zur Entscheidung unserer Frage benutzen. Ist die linke Seite von (I) auf irgendeiner Fläche, wo sämtliche g_{ik} stetig sind, verschieden von Null, dann ist die Fläche sicher mit Materie belegt. Wäre aber in einem Falle die linke Seite Null, dann wäre kein endgültiger Schluß daraus zu ziehen möglich. Das bloße Verschwinden des Skalars $\mathfrak{T}$ kann nicht auch das Verschwinden des ganzen Tensors bedeuten. Es sind wohl Flächen möglich, wo die skalare Größe $\mathfrak{T}$ überall verschwindet, aber sämtliche Komponenten $\mathfrak{T}_{ik}$ brauchen darum nicht Null zu sein. Daher ist die Gleichung (I) allein nicht zu einer befriedigenden Entscheidung unserer Frage hinreichend. Da kommen uns die Gleichungen (II) zu Hilfe. Die rechte Seite von (II) ist eine Tensorkomponente, deshalb ist das Nullwerden von allen zehn Funktionen, die auf der linken Seite stehen, notwendig und hinreichend, damit die Fläche von einer Flächenbelegung frei bleibt.

4.

Gelingt es, durch Transformation ein Koordinatensystem zu finden, in dem die Gleichung $\sqrt{-g} = 1$ erfüllt wird und außerdem der Maßtensor auf einer Fläche stetig erscheint, so reduziert sich in diesem Koordinatensystem die Gleichung (II) in der einfachen Form

$$\left\{ {kl \atop s} \right\}_2^1 \nu_s = -\varkappa \mathfrak{T}_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, 3, 4). \tag{8}$$

Bei der Abwesenheit der materiellen Belegung auf der Fläche gelten die Gleichungen

$$\left\{ {kl \atop s} \right\}_2^1 \nu_s = 0 \qquad (k, l = 1, 2, 3, 4). \tag{8'}$$

Die Gleichungen (8) bedeuten ferner, daß die zehn Größen $\left\{ {kl \atop s} \right\}_2^1 \nu_s$ $(k, l = 1, 2, 3, 4)$ sich gegenüber allen Koordinatentransformationen

$$\sqrt{-g} = 1 \quad \text{(oder im allgemeinen für } \sqrt{-g} = \text{konst.)}$$

wie die kovarianten Komponenten eines Tensors verhalten, und jede Komponente läßt sich durch die Komponenten des Normalvektors ν und die vier Funktionen $\left\{ {kl \atop s} \right\}_2^1$ $(s = 1, 2, 3, 4)$ zusammensetzen.

Aus den Gleichungen (8′) können wir einen weiteren Schluß ziehen. Hier haben wir zehn lineare Gleichungen unter ν_1, ν_2, ν_3 und ν_4, deren Koeffizienten aus den Sprüngen der Werte der Klammerfunktionen auf der Fläche bestehen. Wenn diese Koeffizienten nicht alle verschwinden, können höchstens drei von diesen Gleichungen linear unabhängig werden. Von den 40 Funktionen $\left\{ {ij \atop k} \right\}_2^1$ können wir höchstens 12 so wählen, daß jede andere von den übrigen 28 Funktionen sich linear in drei von den 12 ausdrücken läßt.

Zum Beispiel mögen

$$\left\{ {kl \atop s} \right\}_2^1 \nu_s = 0 \qquad (k = l = 1, 2, 3)$$

drei Gleichungen sein, die voneinander unabhängig sind und sich nicht zu der trivialen Relation $0 = 0$ reduzieren lassen. Dann ist im allgemeinen

$$\left\{ {kl \atop m} \right\}_2^1 = \alpha_1^{(kl)} \left\{ {11 \atop m} \right\}_2^1 + \alpha_2^{(kl)} \left\{ {22 \atop m} \right\}_2^1 + \alpha_3^{(kl)} \left\{ {33 \atop m} \right\}_2^1$$

(m sei 1, 2, 3 oder 4, kl besteht aus jeder Kombination von 1, 2, 3, 4; $\alpha_1^{(kl)}$, $\alpha_2^{(kl)}$ . . . sind Konstanten, die von k und l abhängig sind, und $\alpha_1^{(kl)} = \alpha_1^{(lk)}$ . . . usw.). Es ist offenbar möglich, daß diese 12 Funktionen sich weiter zu 8 oder 4 reduzieren lassen. Jedenfalls können auf einer Fläche, die von einer Flächenbelegung frei ist, höchstens 12 von den 40 Funktionen $\left\{\begin{matrix} ij \\ k \end{matrix}\right\}_2^1$ eine Basis bilden, durch welche die anderen linear ausgedrückt werden können. Diese Eigenschaft ist charakteristisch in diesem Koordinatensystem ($\sqrt{-g} =$ konst.). Anders verhält es sich im allgemeinen Koordinatensystem, wie man gleich aus (II) erfährt.

5.

Eine kleine Anwendung der Gleichung (II) liefert einen interessanten Schluß. Denken wir uns ein statisches Gravitationsfeld, in welchem g_{14}, g_{24}, g_{34} verschwinden und g_{44} eine gegen alle Transformationen von x_1, x_2, x_3 skalare Größe ist, so gilt in diesem Felde die Formel

$$dr^2 = V^2 dt^2 - ds^2 \qquad (g_{44} = V^2)$$

und ebenfalls die Gleichung[1])

$$\left\{\begin{matrix} 44 \\ s \end{matrix}\right\} = V \operatorname{grad}^s V.$$

v_4 kann man im statischen Felde immer gleich Null setzen. Setzt man in die allgemeine Gleichung

$$\left\{\begin{matrix} g\,m \\ m \end{matrix}\right\}_2^1 v_k - \left\{\begin{matrix} g\,k \\ s \end{matrix}\right\}_2^1 v_s = \varkappa \mathfrak{T}_{gk},$$

$g = k = 4$, dann, weil

$$\left\{\begin{matrix} g\,m \\ m \end{matrix}\right\} v_k - \left\{\begin{matrix} g\,k \\ s \end{matrix}\right\} v_s = - \left\{\begin{matrix} 44 \\ s \end{matrix}\right\} v_s = - V \operatorname{grad}^s V \cdot v_s = - V \frac{\partial V}{\partial \nu}$$

ist, liefert die obige Gleichung für $g = k = 4$

$$\left(V \frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_1 - \left(V \frac{\partial V}{\partial \nu}\right)_2 = - \varkappa \mathfrak{T}_{44}.$$

Nach unserer Voraussetzung, daß V auf der Fläche stetig ist, weist diese Gleichung auf die Stetigkeit des Differentialquotienten $\partial V / \partial \nu$ (d. h. von $\partial g_{44} / \partial \nu$) bei der Abwesenheit einer Flächenbelegung hin. Man sieht auch bei einer Massenverteilung auf der Fläche, daß $\partial g_{44} / \partial \nu$ einen Sprung erleidet, weil nun die rechte Seite notwendig von Null verschieden ist.

In dieser Betrachtung haben wir die g_{ik} alle auf der Fläche stetig angenommen. Die Möglichkeit, daß stets ein Koordinaten-

---

1) **Laue**, Relativitätstheorie 2. S. 182.

system gefunden werden kann, in dem g_{44} auf einer Fläche stetig bleibt, kann folgendermaßen bewiesen werden. Denken wir uns einen unendlich kleinen Raum (zwischen zwei benachbarten Flächen), in welchem die Gravitationsgleichungen erfüllt werden. Wie wir das Koordinatensystem zweckmäßig wählen, wird weiter unten erläutert. Wenn in diesem Koordiantensystem g_{44} unstetig ist und die zwei benachbarten Flächen im Limes zusammenfallen, so können wir zeigen, daß die Flächendichte unendlich groß wird.

Im statischen Felde haben wir die Gleichung[1])

$$V \operatorname{div} \operatorname{grad} V = \varkappa \left(T_{44} - \tfrac{1}{2} g_{44} T\right)$$

in allen Koordinatensystemen. Die linke Seite können wir folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} V \operatorname{div} \operatorname{grad} V &= \operatorname{div} (V \operatorname{grad} V) - (\operatorname{grad}^m V \operatorname{grad}_m V) \\ &= \operatorname{div} (V \operatorname{grad} V) - (\operatorname{grad} V)^2 . \end{aligned}$$

Integrieren wir jetzt diese Gleichung über den unendlich schmalen Raum, wie oben erwähnt, so ist

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int \operatorname{div} (V \operatorname{grad} V)\, d\Sigma - \int (\operatorname{grad} V)^2\, d\Sigma \\ &\qquad\qquad = \varkappa \int \left(T_{44} - \tfrac{1}{2} g_{44} T\right) d\Sigma . \end{aligned} \right.$$

Wir wählen nun das Koordinatensystem derart, daß dx_1 einer Verschiebung normal zu der Fläche und dx_2, dx_3 Verschiebungen auf der Fläche entsprechen. Nehmen wir an, daß V an dieser Fläche unstetig ist. Weil V in einem unendlich kleinen Raum eine endliche Änderung erleidet, muß im Zwischengebiet $\partial V / \partial x_1$ einen unendlich großen Wert erreichen. Wir nehmen an, daß die anderen Differentialquotienten $\partial V / \partial x_2$, $\partial V / \partial x_3$ in diesem Raume endlich bleiben. Das erste Integral ist

$$(9\text{a}) \qquad \int \operatorname{div} (V \operatorname{grad} V)\, d\Sigma = \int V \frac{\partial V}{\partial \nu}\, dS .$$

Nun ist

$$\begin{aligned} &(\operatorname{grad} V)^2 = \operatorname{grad}_m V \operatorname{grad}^m V \\ (9\text{b}) \qquad &\qquad = \gamma^{11} \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 + \gamma^{12} \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right) \left(\frac{\partial V}{\partial x_2}\right) + \cdots \\ &\qquad\qquad (\gamma_{ik} = - g_{ik}, \quad i, k = 1, 2, 3) . \end{aligned}$$

---

[1]) Laue, Relativitätstheorie 2. S. 183. In diesem Kapitel sind die Bezeichnungen von Laue benutzt worden.

In diesem Ausdruck ist das erste Glied $\gamma^{11}\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2$ in einem Teile unseres Gebietes eine unendlich große Größe zweiter Ordnung (wenn wir $\partial V/\partial x_1$ unendlich groß von erster Ordnung annehmen), und die übrigen sind höchstens von der ersten Ordnung unendlich, weil in ihnen $\partial V/\partial x_1$ höchstens einmal vorkommt. Nun betrachten wir das Integral

$$\int \gamma^{11}\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 d\Sigma = \int \gamma^{11}\sqrt{\gamma}\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 dx_1\, dx_2\, dx_3$$

$$(d\Sigma = \sqrt{\gamma}\, dx_1\, dx_2\, dx_3).$$

Die γ^{ik} setzen wir alle endlich voraus. Da in unserem schmalen Gebiet $\frac{\partial V}{\partial x_1} d x_1$ im Limes endlich ist, so muß $\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 dx_1$ mindestens unendlich groß erster Ordnung sein. Angenommen, λ sei der kleinste Wert von $\gamma^{11}\sqrt{\gamma}$ in dem Gebiete, so ist

$$\text{(9c)} \qquad \int \gamma^{11}\sqrt{\gamma}\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 dx_1\, dx_2\, dx_3$$

von derselben Größenordnung wie

$$\lambda \int \left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 dx_1\, dS,$$

da $\gamma^{11}\sqrt{\gamma}$ beständig sein Vorzeichen behält und das Produkt $dx_2\, dx_3$ proportional dem Inhalt des Flächenstücks dS ist. Auf der rechten Seite nehmen wir einen Grenzübergang vor, in dem die Dicke ε der Schicht zwischen den Flächen unendlich klein wird, aber der Energieimpulstensor so anwächst, daß $\lim\limits_{\varepsilon=0}\int (T_{44} - \frac{1}{2}\, g_{44}\, T)\, d\Sigma$ gegen $\mathfrak{T}_{44}\, dS$ konvergiert, worin $\mathfrak{T}_{44}$ eine Komponente des Belegungstensors und dS ein Stück der Fläche bedeuten. $V\frac{\partial V}{\partial \nu}$ betrachten wir als gegeben; es ist also notwendig auch endlich. Der Integrand $\left(\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)^2 dx_1$ in (9c) ist unendlich groß. Aus den anderen Gliedern der Reihe (9b) erhält man auch alle anderen Integrale, deren Integranden jedoch endliche Größen sind. Wenn wir jetzt die Integration von (9) auf ein unendlich kleines Flächenstück beschränken und den oben erwähnten Grenzübergang vornehmen, dann muß $\mathfrak{T}_{44}$ einer unendlich großen Flächendichte entsprechen. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

6.

Wir wollen in diesem Kapitel zwei Transformationen behandeln, die einige Eigenschaften der Gleichung (II) zum Vorschein bringen. Wir werden zeigen, daß jedes von den zwei Gliedern, die durch Zusammensetzung den Tensor auf der linken Seite von (II) bilden, sich gegen Transformationen einer speziellen Art wie die Komponenten eines Tensors verhält.

Die Transformation der Klammerfunktion von einem Koordinatensystem zum anderen ist bekanntlich gegeben durch die Christoffelsche Formel

$$\frac{\partial^2 x_l}{\partial x_\alpha' \partial x_\beta'} + \left\{ {ik \atop l} \right\} \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha'} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x_\beta'} = \left\{ {\alpha\beta \atop s} \right\}' \frac{\partial x_l}{\partial x_s'} .$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\partial x_\xi' / \partial x_l$ und summiert über l, so hat man

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial^2 x_s}{\partial x_\alpha' \partial x_\beta'} \cdot \frac{\partial x_\xi'}{\partial x_s} + \left\{ {ik \atop s} \right\} \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha'} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x_\beta'} \cdot \frac{\partial x_\xi'}{\partial x_s} = \left\{ {\alpha\beta \atop \xi} \right\}' ,$$

weil

$$\frac{\partial x_\xi'}{\partial x_l} \cdot \frac{\partial x_l}{\partial x_s'} = \frac{\partial x_\xi'}{\partial x_s'} \begin{matrix} = 0 & \xi \neq s \\ = 1 & \xi = s \end{matrix}$$

ist. Die Funktionen im neuen Koordinatensystem lassen sich einfach durch die Formel (A) berechnen. Multipliziert man aber die erste Gleichung mit ν_l und summiert über l, so hat man

$$\text{(B)} \qquad \left[\frac{\partial^2 x_l}{\partial x_\alpha' \partial x_\beta'} + \left\{ {ik \atop l} \right\} \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha'} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x_\beta'} \right] \nu_l = \left\{ {\alpha\beta \atop s} \right\}' \nu_s' ,$$

weil

$$\frac{\partial x_l}{\partial x_s'} \cdot \nu_l = \nu_s'$$

ist.

Auf einer Fläche nehmen wir eine solche Transformation vor und beschränken uns hier und im folgenden auf diejenigen Fälle, in denen die ersten und die zweiten Differentialquotienten der ungestrichenen Koordinaten nach dem gestrichenen (d. h. $\partial x_i / \partial x_\alpha'$, ... $\partial^2 x_i / \partial x_\alpha' \partial x_\beta'$, ...) auf der Fläche stetig bleiben. Wenn wir übrigens die g_{ik} auf der Fläche auch stetig annehmen, dann werden die Komponenten des Normalvektors ν an den beiden Seiten der Fläche dieselben Werte haben jedoch mit umgekehrten Vorzeichen. Bilden wir die Differenz der Gleichungen (B) an den zwei Seiten der Fläche, so fällt das erste Glied an der linken Seite von (B) fort und wir haben endlich

$$\text{(C)} \qquad \left\{ {\alpha\beta \atop s} \right\}_2^{1'} v_s' = \left\{ {ik \atop l} \right\}_2^{1} v_l \cdot \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha'} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x_\beta'} \,.$$

Setzt man jetzt

$$A_{\alpha\beta} = \left\{ {\alpha\beta \atop s} \right\}_2^{1} v_s$$

ein, so nimmt die Gleichung (C) die Form an

$$A_{\alpha\beta}' = \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha'} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x_\beta'} \cdot A_{ik} \,.$$

Die Funktion $\left\{ {\alpha\beta \atop s} \right\}_2^{1} v_s$ transformiert sich wie die kovarianten Komponenten eines Tensors zweiten Ranges. Folglich bilden die zehn Größen

$$\left\{ {\alpha\beta \atop s} \right\}_2^{1} v_s \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, 4)$$

einen symmetrischen Tensor zweiten Ranges. Dieses Glied steht auf der linken Seite von (II). Multipliziert man die Gleichung (C) mit $g_{\alpha\beta}'$ und summiert über α, β, so hat man

$$\text{(D)} \qquad g^{\alpha\beta'} \left\{ {\alpha\beta \atop s} \right\}_2^{1'} v_s' = g^{ik} \left\{ {ik \atop l} \right\}_2^{1} v_l \,,$$

wenn man der Gleichung

$$g^{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha'} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x_\beta'} \cdot g'^{\alpha\beta}$$

sich erinnert. Die Funktion

$$g^{ik} \left\{ {ik \atop l} \right\}_2^{1} v_l$$

verhält sich wie ein Skalar, was auch aus der Tensoreigenschaft von

$$\left\{ {ik \atop l} \right\}_2^{1} v_l$$

unmittelbar folgt.

Setzt man nun $\xi = \beta$ in die Gleichung (A) ein und summiert über β, so hat man

$$\left\{ {\alpha\beta \atop \beta} \right\}' = \frac{\partial^2 x_s}{\partial x_\alpha' \partial x_\beta'} \cdot \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_s} + \left\{ {ik \atop s} \right\} \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha'} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x_\beta'} \cdot \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_s}$$

$$= \frac{\partial^2 x_s}{\partial x_\alpha' \partial x_\beta'} \cdot \frac{\partial x_\beta'}{\partial x_s} + \left\{ {is \atop s} \right\} \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha'} \,.$$

Bildet man wie vorher die Differenz aus den Werten an beiden Seiten der Fläche, so ist

$$\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \beta\end{matrix}\right\}_2^{1'} = \left\{\begin{matrix}i\,s\\ s\end{matrix}\right\}_2^{1} \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha'}\,. \tag{E}$$

Die vier Funktionen

$$\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \beta\end{matrix}\right\}_2^{1}$$

(summiert über β) transformieren sich wie die kovarianten Komponenten eines Vierervektors. Wenn wir jetzt die Gleichung (E) mit ν_ξ' multiplizieren, dann haben wir

$$\left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \beta\end{matrix}\right\}_2^{1'} \nu_\xi' = \left\{\begin{matrix}i\,s\\ s\end{matrix}\right\}_2^{1} \nu_k \frac{\partial x_i}{\partial x_\alpha'} \cdot \frac{\partial x_k}{\partial x_\xi'}\,, \tag{F}$$

weil

$$\nu_\xi' = \frac{\partial x_k}{\partial x_\xi'} \cdot \nu_k$$

ist. Die linke Seite (F) ist offenbar ein Tensor zweiten Grades und das ist das zweite Glied der Gleichung (II).

7.

Die vorhergehenden Betrachtungen haben wir alle auf Grund der folgenden Gravitationsgleichungen

$$R_{ik} = -\varkappa\left(T_{ik} - \tfrac{1}{2}\,g_{ik}\,T\right) \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

angestellt. Um die Schwierigkeiten der Grenzbedingungen und die anderen, die aus astronomischen Betrachtungen hervorgehen, zu umgeben, hatte bekanntlich Einstein diese Gleichungen durch Hinzufügung eines λ-Gliedes ergänzt. Die neuen Gleichungen lauten

$$R_{ik} - \lambda\,g_{ik} = -\varkappa\left(T_{ik} - \tfrac{1}{2}\,g_{ik}\,T\right) \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)\,.$$

Es ist leicht zu erkennen, daß diese Änderung unsere Betrachtungen nicht stört, und daß alle Gleichungen, die wir in den vorigen Kapiteln aufgestellt haben, ihre Gültigkeit behalten, auch wenn wir uns auf diesen neuen Standpunkt stellen. Der Beweis ist leicht zu führen. Das λ-Glied enthält g_{ik}, das überall in unserem Integrationsraum endlich ist. Dieses Glied liefert immer den Beitrag Null, wenn wir das Integrationsgebiet im Limes verschwindend klein machen. Ferner sind die Identitäten, die wir Anfang des § 2 benutzt haben, unabhängig von der Form der Gravitationsgleichungen, und deshalb bleiben die Betrachtungen dieses Kapitels auch in diesem Falle bestehen, nur müssen wir jetzt die Relation $R = \varkappa T$ durch die neue $R - 4\lambda = \varkappa T$ ersetzen. Dadurch wird unser Endresultat keineswegs gestört. Folglich sind unsere Grenzbedingungen (I), (II) auch für die kosmologischen Gravitationsgleichungen von **Einstein** gültig.

Zweiter Teil.

Im ersten Teile haben wir bei unseren Betrachtungen immer die Stetigkeit des Maßtensors vorausgesetzt. Es ist aber klar, daß es immer möglich ist, eine Unstetigkeit der g_{ik} auf einer vorgegebenen Fläche durch Koordinatentransformationen zu erzeugen. Die umgekehrte Frage, ob und wie sich eine vorgegebene Unstetigkeit auf einer Fläche beseitigen läßt, ist viel schwieriger zu entscheiden. Wir halten aber unsere Voraussetzung aufrecht, daß der Maßtensor im Gravitationsfelde und auf einer materiellen Fläche stetig ist. Dabei wird aber nicht behauptet, daß man in bezug auf ein gegebenes Koordinatensystem den Maßtensor auf einer materiellen Fläche ohne weiteres stetig annehmen darf. Welches die berechtigten Koordinatensysteme sind, in denen der Maßtensor auf einer gegebenen Fläche stetig erscheint, darüber kann man von vornherein nichts aussagen. Wir geben im folgenden ein Beispiel. Das Gravitationsfeld einer Flüssigkeitskugel von konstanter Dichte ist von **Schwarzschild** berechnet worden. Benutzt man hier das übliche Koordinatensystem $(r, \vartheta, \varphi, t)$, so kommt der Maßtensor auf der Oberfläche der Kugel stetig heraus. Wenn wir aber anstatt der Kugel eine Kugelschale, die mit Materie belegt ist, betrachten, dann ist es nicht ohne weiteres klar, daß die g_{ik} auch in diesem System $(r, \vartheta, \varphi, t)$ auf der Schale stetig bleiben. Wir werden später sehen, daß es tatsächlich nicht der Fall ist. Unsere Aufgabe in diesem Teile wird sein, das Gravitationsfeld einer solchen Kugelschale abzuleiten und unsere Behauptung zu beweisen. Bei diesem Beispiel werden wir auch das Gravitationsfeld einer Flächendichte haben, und damit auch eine Gelegenheit für die Anwendung unserer Gleichungen des ersten Teiles. Es kann schon an dieser Stelle bemerkt werden, daß der Maßtensor auf der Schale wirklich stetig ist, und die

Unstetigkeit, die in dem speziellen Koordinatensystem $(r, \vartheta, \varphi, t)$ erscheint, kann leicht durch Koordinatentransformation aufgehoben werden.

1.

Um zu unserem Ziele zu gelangen, müssen wir erst die kugelsymmetrische Lösung der Gravitationsgleichungen etwas näher betrachten. Wir wollen aber anstatt der Flüssigkeitskugel mit konstanter Dichte die ganz allgemeine kugelsymmetrische Lösung der Gleichungen im statischen Falle für den allgemeinen Energieimpulstensor T_{ik} (so weit er von der Kugelsymmetrie nicht modifiziert ist) betrachten.

Wegen der Symmetrie um den Nullpunkt hat das Linienelement die Form

$$ds^2 = g_4\, dt^2 - g_1\, dr^2 - r^2\, d\vartheta^2 - r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\,,$$

wo g_1 und g_4 nur von r abhängen können. Hier sind

$$g_{11} = -g_1(r)\,, \quad g_{44} = g_4(r)\,, \quad g_{22} = -r^2\,, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2\vartheta,$$

$$g = |g_{ik}| = -g_1\, g_4\, r^4 \sin^2\vartheta\,,$$

$$g^{11} = -\frac{1}{g_1}, \quad g^{44} = \frac{1}{g_4}, \quad g^{22} = -\frac{1}{r^2}, \quad g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta},$$

$$g_{ik} = g^{ik} = 0 \quad i \neq k\,.$$

In diesem Falle haben die Tensorkomponenten R_{ik}[1]) folgende Werte:

$$R_{11} = \frac{g_4''}{2g_4} - \frac{g_4'^2}{4g_4^2} - \frac{g_1'\, g_4'}{4g_1\, g_4} - \frac{g_1'}{r g_1}, \quad R_{22} = \frac{r g_4'}{2g_1\, g_4} - \frac{r g_1'}{2g_1^2} + \frac{1}{g_1} - 1,$$

$$R_{33} = +R_{22} \sin^2\vartheta\,,$$

$$R_{44} = -\frac{g_4''}{2g_1} + \frac{g_4'^2}{4g_1\, g_4} + \frac{g_1'\, g_4'}{4g_1^2} - \frac{g_4'}{r g_1}, \qquad R_{ik} = 0 \quad i \neq k\,,$$

worin die Striche alle Differentialquotienten nach r bedeuten.

Jetzt substituieren wir die Werte von R_{ik} in den Gleichungen

$$R_{ik} = -\varkappa\left(T_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik}\, T\right) \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)\,;$$

---

[1]) Diese sind schon von **H. Bauer** in seiner Arbeit: Kugelsymmetrische Lösungssysteme der **Einsteinschen** Feldgleichungen usw. (Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. in Wien, Math.-naturw. Kl. II a 127. 1918) berechnet worden.

weil nun $g_{ik} = 0$, $R_{ik} = 0$, wenn $i \neq k$ ist, haben wir auch $T_{ik} = 0$ für $i \neq k$. Es sind nur die vier Komponenten T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{44} von Null verschieden. Auch ist

$$T_{ik} = g_{ir}\, T_k^{\;r} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

und

$$T_{nn} = g_{nn}\, T_n^{\;n} \qquad (n = 1, 2, 3, 4)$$

und der Skalar

$$T = g^{ik}\, T_{ik} = T_1^{\;1} + T_2^{\;2} + T_3^{\;3} + T_4^{\;4}.$$

Für $i = k$ haben wir die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{cases} -\dfrac{g_4''}{2g_1} + \dfrac{g_4'^2}{4g_1 g_4} + \dfrac{g_1' g_4'}{4g_1^2} - \dfrac{g_4'}{r g_1} = -\varkappa\left(T_{44} - \tfrac{1}{2} g_{44} T\right) \\ \quad = -\varkappa g_4 \left(T_4^{\;4} - \tfrac{1}{2} T\right) = -\tfrac{1}{2}\varkappa g_4 \left(T_4^{\;4} - T_1^{\;1} - T_2^{\;2} - T_3^{\;3}\right). \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{g_4''}{2g_4} - \dfrac{g_4'^2}{4g_4^2} = \dfrac{g_4' g_1'}{4g_1 g_4} - \dfrac{g_1'}{r g_1} = -\varkappa\left(T_{11} - \tfrac{1}{2} g_{11} T\right) \\ \quad = \varkappa g_1 \left(T_1^{\;1} - \tfrac{1}{2} T\right) = \tfrac{1}{2}\varkappa g_1 \left(T_1^{\;1} - T_2^{\;2} - T_3^{\;3} - T_4^{\;4}\right). \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{r g_4'}{2g_1 g_4} - \dfrac{r g_1'}{2g_1^2} + \dfrac{1}{g_1} - 1 = -\varkappa\left(T_{22} - \tfrac{1}{2} g_{22} T\right) \\ \quad = \varkappa r^2 \left(T_2^{\;2} - \tfrac{1}{2} T\right) = \tfrac{1}{2}\varkappa r^2 \left(T_2^{\;2} - T_1^{\;1} - T_3^{\;3} - T_4^{\;4}\right). \end{cases}$$

$$(4) \quad R_{33} = R_{22} \sin^2\vartheta = -\varkappa\left(T_{33} - \tfrac{1}{2} g_{33} T\right) = \varkappa r^2 \sin^2\vartheta \left(T_3^{\;3} - \tfrac{1}{2} T\right).$$

Von (3) und (4) hat man durch Vergleich

$$(5) \qquad T_2^{\;2} = T_3^{\;3},$$

welche eine notwendige Bedingung der Kugelsymmetrie ist. Deshalb ist

$$T = T_1^{\;1} + 2\,T_2^{\;2} + T_4^{\;4}.$$

Von den Gleichungen (1) $\cdot \dfrac{1}{g_4}$ und (2) $\cdot \dfrac{1}{g_1}$ hat man durch Addition

$$(6) \qquad \frac{g_4'}{r g_1 g_4} + \frac{g_1'}{r g_1^2} = -\varkappa\left(T_1^{\;1} - T_4^{\;4}\right).$$

Die Gleichungen (6) und (3) liefern weiter

$$(7) \qquad \frac{g_1'}{r g_1^2} - \frac{1}{r^2 g_1} + \frac{1}{r^2} = \varkappa\, T_4^{\;4}.$$

Diese Gleichung läßt sich leicht integrieren. Durch Integration hat man

$$(8) \qquad \frac{r}{g_1} = C + \int \left(1 - \varkappa r^2 T_4^{\;4}\right) dr,$$

worin C eine Konstante ist.

Von (7) und (8) durch Elimination von g_1' hat man

$$\frac{g_4'}{g_4} = \frac{1}{r}(g_1 - 1) - \varkappa r g_1 T_1^{\ 1} \tag{9}$$

oder durch Integration

$$\ln g_4 = C' + \int \left[\frac{1}{r}(g_1 - 1) - \varkappa r g_1 T_1^{\ 1}\right] d r \qquad (C' = \text{const}). \tag{10}$$

Um die Beziehung zwischen $T_2^{\ 2}$ und den anderen Größen aufzustellen, benutzen wir die Impulsgleichungen

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{-g}\, T_i^k\right) - \left\{ {i k \atop l} \right\} T_l^k = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

welche in diesem Falle die Form

$$\frac{\partial T_i^i}{\partial x_i} + T_i^i \frac{\partial \log \sqrt{-g}}{\partial x_i} = T_m^m \frac{\partial \log \sqrt{g_{mm}}}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, 3, 4)$$

annehmen. Die Gleichung ist über m zu summieren. Setzt man in dieser Gleichung $i = 1$, so hat man nach einer kleinen Rechnung

$$\frac{d T_1^1}{d r} + \frac{1}{2}\left(\frac{g_4'}{g_4} + \frac{4}{r}\right) T_1^{\ 1} = \frac{2}{r} T_2^{\ 2} + \frac{1}{2} \frac{g_4'}{g_4} T_4^{\ 4}. \tag{11}$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß durch Substitution der Werte von $T_1^{\ 1}$, $T_2^{\ 2}$, $d T_1^{\ 1}/dr$ und $T_4^{\ 4}$ von (1), (2) und (8) die Gleichung (11) identisch erfüllt ist. Das muß notwendig so sein, weil die Energiegleichungen durch Elimination aus den Gravitationsgleichungen folgen.

(8), (10), (11) stellen eine vollständige Lösung der Gravitationsgleichungen im statischen Felde, das sich um den Nullpunkt kugelsymmetrisch verhält, dar. Die Spannungskomponenten[1] $T_1^{\ 1}$, $T_2^{\ 2}$, $T_3^{\ 3}$ und die Energiedichte $T_4^{\ 4}$ müssen dabei so gewählt werden, daß sie diese drei Gleichungen erfüllen, sonst ist kein solches Feld möglich. Man kann entweder $T_1^{\ 1}$ und $T_4^{\ 4}$ beliebig gegeben denken, dann von (8) und (10) g_1 und g_4 berechnen und nachher durch Substitution in (11) den Wert von $T_2^{\ 2}$ finden, der nötig ist, um das Gleichgewicht des kugelsymmetrischen Feldes zu gewährleisten, oder wenn man $T_4^{\ 4}$ und $T_2^{\ 2}$ gegeben denkt, hat man erst von (8) g_1 zu bestimmen und dann nach der Elimination von g_4'/g_4 aus (9) und (11) die neue Differentialgleichung zu lösen, um die notwendige Spannungskomponente T_1^1 zu bestimmen; die Gleichung (9) liefert dann g_4. Andere Fälle lassen sich auch durch diese drei Gleichungen entscheiden. Man hat die Integrationskonstanten so zu wählen, daß einige Stetigkeitsbedingungen erfüllt werden und die Lösung sich in nicht singulären Punkten regulär verhält.

---

[1] Eigentlich sind die Spannungskomponenten und die Energiedichte durch Multiplikation mit $\sqrt{g^{44}}$ erhalten.

2.

Einige Spezialfälle wollen wir jetzt betrachten.

I. Es seien $T_1^1 = 0$, $T_2^2 = 0$, $T_3^3 = 0$, aber $T_4^4 \neq 0$. Mit dieser Annahme ist es unmöglich, die Gleichungen (8), (10), (11) zu erfüllen. Kein statisches Feld mit Kugelsymmetrie ist möglich. Diese Tatsache ist schon bekannt. Erst wenn man ein λ-Glied zu den ursprünglichen Gravitationsgleichungen hinzufügt, ist eine Lösung mit dieser Annahme möglich.

II. Es seien $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = T_4^4 = 0$. Es handelt sich um die Lösung im Felde, wo keine Materie vorhanden ist. Von (8) hat man

$$g_1 = \frac{r}{\alpha + r},$$

wo α eine Konstante ist; und nachher von (10) hat man

$$g_4 = \frac{\alpha + r}{\beta r},$$

worin β eine Integrationskonstante bedeutet.

Die Gleichung (11) wird jetzt identisch erfüllt. Wir schreiben das Linienelement in der Form

$$ds^2 = \frac{\alpha + r}{\beta r} d t^2 - \frac{r}{\alpha + r} d r^2 - r^2 d \vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta \, d \varphi^2.$$

Ersetzt man jetzt $\frac{t}{\sqrt{\beta}}$ durch eine neue Variable, die wir wieder aus Bequemlichkeit t nennen wollen, so hat man die bekannte Schwarzschildsche Lösung für das Gravitationsfeld um einen Massenpunkt. Wie die Spannungskomponenten und die Energiedichte innerhalb der Materie beschaffen sein mögen, im unendlich ausgedehnten Felde gilt immer die Formel für das Linienelement

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) d t^2 - \frac{d r^2}{\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)} - r^2 d \vartheta^2 - r^2 \sin^2 \vartheta \, d \varphi^2. \tag{12}$$

Ehe wir zu unserer eigentlichen Stetigkeitsfrage zurückkommen, wollen wir noch einen Spezialfall betrachten.

III. Es seien $T_1^{\,1} = 0$ und $T_4^{\,4} = \frac{\text{const}}{r^2}$. Von (8) haben wir

$$g_1 = \frac{r}{\alpha' + k\,r},$$

wo α' eine Integrationskonstante ist und k noch eine andere Konstante, die von der Konstante in $T_4^{\,4}$ abhängt. Die Integration von (10) liefert

$$g_4 = \frac{\beta}{r}(\alpha' + k\,r)^{1/k},$$

β sei eine neue Integrationskonstante. So ist in der Materie

$$d\,s^2 = \frac{\beta}{r}(\alpha' + k\,r)^{1/k}\,d\,t^2 - \frac{r}{\alpha' + k\,r}\,d\,r^2 - r^2\,d\,\vartheta^2 - r^2 \sin^2\vartheta\,d\,\varphi^2.$$

Ist die Lösung im Nullpunkte singularitätsfrei, so sind

$$\alpha' = 0 \quad \text{und} \quad k < 1\,.$$

Dann wird unsere Formel

$$(13)\quad \left\{ \begin{aligned} &d\,s^2 = \beta\,\sqrt[k]{k}\,r^{\frac{1}{k}-1}\,d\,t^2 - \frac{1}{k}\,d\,r^2 - r^2\,d\,\vartheta^2 - r^2 \sin^2\vartheta\,d\,\varphi^2 \\ &\hfill (k < 1)\,. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichung (12) gilt im Felde und (13) in der Materie. Wenn wir die Stetigkeit der g_1 und g_4 auf einer Fläche $r = r_a$ verlangen, haben wir die weiteren Bedingungen

$$\left(1 + \frac{\alpha}{r_a}\right) = \beta\,k^{\frac{1}{k}}\,r_a^{\frac{1}{k}-1}, \qquad k = 1 + \frac{\alpha}{r_a}\,.$$

Diese Gleichungen bestimmen die Konstanten α und β; k ist dann die einzige Konstante, die in unserer Formel unbestimmt bleibt. Doch ist k schon in $T_4^{\,4}$ enthalten.

Es ist hier interessant zu bemerken, daß nach unserer Annahme $T_4^{\,4}$ im Nullpunkte unendlich groß sein muß. Soll g_4 überall endlich bleiben, so muß im Nullpunkte, wo $T_4^{\,4}$ unendlich groß ist, g_4 verschwinden.

Das Linienelement des Streckenraumes hat die Maßbestimmung

$$d\,\sigma^2 = \frac{1}{k}\,d\,r^2 + r^2\,d\,\vartheta^2 + r^2 \sin^2\vartheta\,d\,\varphi^2.$$

Die euklidische Geometrie gilt in diesem Raume nicht. T_2^2 kann man aus (11) berechnen. Im Nullpunkte wird T_2^2 unendlich groß.

Der Fall $T_1^1 = 0$, $T_4^4 = \frac{\text{const}}{r}$ ist interessant, weil in diesem Falle T_2^2 im Nullpunkte endlich bleibt. Hier hat man im allgemeinen

$$g_1 = \frac{r}{\alpha' + r + k r^2}.$$

Wenn $\alpha' \neq 0$ ist, kann man leicht durch Integration von (10) zeigen, daß g_4 notwendig im Nullpunkte einen unendlich großen Wert annehmen muß. Um eine singularitätsfreie Lösung zu finden, setzen wir erst $\alpha' = 0$. Dann hat man durch Integration von (10)

$$g_4 = \frac{\beta}{r}\left(\frac{r}{1+kr}\right)^{1/k} \qquad (k < 1).$$

Im Nullpunkte ist

$$g_4 = 0$$

und T_2^2 berechnet sich wie durch die Gleichung

$$T_2^2 = \frac{1}{4}\,\frac{kr}{1+kr}\,T_4^4,$$

und im Nullpunkte ist T_2^2 endlich. Erinnern wir uns an die Tatsache, daß wir im Falle der Flüssigkeitskugel T_4^4 gleich $c^2\delta$, also proportional der Massendichte zu setzen haben; wenn wir uns jetzt erlauben, diese Annahme auf diese zwei Fälle zu übertragen, so sind diese beiden Beispiele interessant in dem Sinne, als wir hier mit zwei Fällen zu tun haben, wo in der unmittelbaren Nähe von unendlich großer Massendichte die Lichtgeschwindigkeit, vorausgesetzt, daß sie endlich bleibt, notwendig verschwinden muß.

3.

Kehren wir jetzt zu der Gleichung (7a) zurück und integrieren wir diese Gleichung über einen Raumteil zwischen zwei benachbarten Flächen $r = \text{const}$, zwischen denen Materie enthalten ist. Es seien diese Flächen $r = a + \varepsilon$ und $r = a - \varepsilon$. Dann hat man

$$\left[\frac{r}{g_1}\right]_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} (1 - \varkappa r^2 T_4^4)\,dr.$$

Nun machen wir im Limes $\varepsilon = 0$. Ist $T_4^{\,4}$ im Zwischenraum endlich, so muß das Integral verschwinden und g_1 auf der Fläche $r = a$ stetig sein. Nehmen wir $T_4^{\,4}$ in diesem Raume unendlich groß an, so erleidet g_1 auf $r = a$ einen Sprung, und zwar ist

$$\left(\frac{a}{g_1}\right) - \left(\frac{a}{g_1}\right)' = - a^2 \mu\,, \tag{14}$$

worin

$$\lim_{\varepsilon = 0} \varkappa \int r^2 T_4^{\,4}\, d\, r = a^2 \mu$$

angenommen ist. Nun integrieren wir die Gleichung (9) zwischen denselben Grenzen. $T_1^{\,1}$, das bis auf einen Faktor mit einer Spannungskomponente gleichwertig ist, nehmen wir als endlich an.[1]) Weil g_1 auch endlich ist, bleibt der ganze Ausdruck auf der rechten Seite von (9) endlich, und das Integral im Limes $\varepsilon = 0$ verschwindet.

Deshalb bleibt g_4 auf $r = a$ stetig, oder

$$(g_4) - (g_4)' = 0\,. \tag{15}$$

In unserem speziellen Koordinatensystem bleibt bei der Anwesenheit einer Flächenbelegung g_4 auf der Fläche stetig, doch erleidet g_1 einen Sprung, der durch die Gleichung (14) gegeben ist. Wenn keine Flächenbelegung vorhanden ist, sind beide g_1 und g_4 stetig. Es ist zu beachten, daß in diesem Koordinatensystem $\partial g_1 / \partial r$ immer an der Grenze zwischen der Materie und dem Felde einen Sprung erleiden muß. Das folgt unmittelbar aus der Gleichung (7), wenn wir uns erinnern, daß bei der Abwesenheit einer Flächendichte g_1 stetig ist.

4.

Jetzt sind wir bei unserer eigentlichen Frage angelangt, das Gravitationsfeld einer Flächendichte auf der Kugelfläche zu behandeln. Außerhalb der Fläche ($r > a$) muß die Maßbestimmung durch die Gleichung (12) gegeben sein. Im geschlossenen Raume ($r < a$) muß auch die Lösung dem Falle II,

---

1) Diese Tatsache ist auch von **Weyl** in seiner Arbeit: Bemerkung über die axialsymmetrischen Lösungen der **Einsteinschen** Gravitationsgleichungen (Ann. d. Phys. **59**. S. 188. 1919) zum Ausdruck gebracht. Er zeigt, daß, wenn die Massendichte unendlich klein erster Ordnung ist, dann sind die Tensorkomponenten von zweiter Ordnung unendlich klein.

d. h. $T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = T_4^4 = 0$ entsprechen, weil innerhalb der Kugel keine Materie vorhanden ist und eine vollständige Kugelsymmetrie um den Nullpunkt besteht. Wir setzen die allgemeine Lösung in dem Falle II voraus und schreiben

$$ds^2 = \beta\left(1 + \frac{\alpha'}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{\alpha'}{r}\right)} - r^2\, d\vartheta^2 - r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 \text{ für } r < a$$

und

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{r}\right) dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{\alpha}{r}\right)} - r^2\, d\vartheta^2 - r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 \text{ für } r > a\,.$$

Um eine Lösung zu haben, die im Nullpunkte singularitätsfrei ist, müssen wir im allgemeinen $\alpha' = 0$ setzen. Von der Stetigkeitsbedingung (15) auf $r = a$ haben wir

$$\beta = 1 + \frac{\alpha}{a}\,.$$

Der Sprung in g_1 berechnet sich von (14) wie

$$\alpha = -\mu\, a^2\,.$$

Jetzt können wir die Maßbestimmung in endgültiger Form schreiben.

$$(16)\quad \begin{cases} ds^2 = (1 - \mu a)\, dt^2 - dr^2 - r^2\, d\vartheta^2 - r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } r < a\,, \\ ds^2 = \left(1 - \frac{a^2\mu}{r}\right) dt^2 - \frac{dr}{1 - \frac{a^2\mu}{r}} - r^2\, d\vartheta^2 - r^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{für } r > a\,. \end{cases}$$

Innerhalb der Kugel gilt die euklidische Geometrie, und die Lichtgeschwindigkeit ist konstant. Auf $r = a$ sind alle g_{ik} stetig mit Ausnahme von g_{11}, welches sich sprunghaft ändert. Es fragt sich, ob diese Unstetigkeit wirklich ist, mit anderen Worten, ob diese Unstetigkeit der Maßbestimmung auf $r = a$ eine Flächendichte auf dieser Fläche charakterisiert. Wir haben in unseren ersten Betrachtungen vorausgesetzt, daß die Maßbestimmung auf jeder Fläche stetig ist. Wenn das richtig bleiben soll, müssen wir zeigen, daß die Unstetigkeit in diesem Falle nur scheinbar ist und durch Koordinatentransformation aufgehoben werden kann. Das läßt sich aber leicht machen. Die Maßbestimmung im Gebiet $r < a$ bleibt bestehen, wir führen aber ein neues Koordinatensystem für das Außengebiet ein. Es sei gegeben durch die Gleichungen

$$\varrho = r + f(r - a)\,, \quad \vartheta' = \vartheta\,, \quad \varphi' = \varphi\,,$$

wo f irgendeine Funktion von $(r - a)$ ist, die für $r = a$ verschwindet; d. h.

$$\text{(I)} \qquad f(0) = 0\,.$$

Dann ist auf der Fläche $r = a$ auch $\varrho = a$. Also sind die Koordinatensysteme auf der Schale vollständig stetig. Durch Umkehrung der Beziehung zwischen ϱ und r schreiben wir sie in der Form $r = \psi(\varrho)$, so daß auf $r = a$ auch $\psi = a$ ist. Die zweite Gleichung von (16) transformiert sich so:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a^2\mu}{\psi(\varrho)}\right) dt^2 - \frac{d\varrho^2}{(1 + f')^2 \left(1 - \frac{a^2\mu}{\psi(\varrho)}\right)} - \psi^2 d\vartheta^2 - \psi^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2\,.$$

Soll die Maßbestimmung auf $r = a$ stetig bleiben, so muß man

$$[1 + f'(0)]^2 (1 - a\mu) = 1\,,$$

d. h.

$$\text{(II)} \qquad f'(0) = \frac{1}{\sqrt{1 - a\mu}} - 1$$

setzen. f kann irgendeine Funktion sein, die die beiden Bedingungen (I) und (II) erfüllt. Damit ist eine Transformation gefunden, die die Maßbestimmungen (16) auf $r = a$ stetig macht.

Um die Richtigkeit unserer Gleichung (I) des ersten Teiles zu prüfen, wollen wir die obige Lösung, die sich jetzt auf der Fläche $r = a$ stetig zeigt, in diese Gleichung substituieren. Es soll zuerst die linke Seite von (I) im allgemeinen verschieden von Null sein; zweitens soll sie auch einen Wert annehmen, der ganz unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems ist. Um beides mit einem Schlage zu beweisen, wollen wir anstatt der obigen speziellen Transformation eine etwas allgemeinere Transformation vornehmen. Wir transformieren eine Koordinate nach der Gleichung

$$r = \chi(\varrho)\,.$$

Die Maßbestimmungen (10) haben jetzt die Form

$$ds^2 = \left(1 - \frac{a^3\mu}{\chi}\right) dt^2 - \frac{\chi'^2}{\left(1 - \frac{a^3\mu}{\chi}\right)}\, d\varrho^2 - \chi^2\, d\vartheta^2 - \chi^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 \qquad \text{für } r > a\,,$$

$$ds^2 = (1 - a\mu)\, dt^2 - \chi'^2 d\varrho^2 - \chi^2 d\vartheta^2 - \chi^2 \sin^2\vartheta\, d\varphi^2 \quad \text{für } r < a\,,$$

worin $\chi' = \frac{\partial\chi}{\partial\varrho}$ ist. Damit die Maßbestimmung auf $r = a$ stetig bleibt, haben wir zu setzen

$$\chi_{a+0} = \chi_{a-0} = a\,, \quad \chi'^2_{a+0} = \left(1 - \frac{a^3\mu}{\chi_{a+0}}\right) \chi'^2_{a-0} = (1 - a\mu)\, \chi'^2_{a-0}\,,$$

wobei χ_{a+0}, χ'_{a+0} die Werte der Funktion $\chi(\varrho)$ und ihr Differentialquotient $\partial\chi/\partial\varrho$ für $r = a + \varepsilon$ limes $\varepsilon = 0$ und desgleichen χ_{a-0}, χ'_{a-0} die entsprechenden Werte für $r = a - \varepsilon$ limes $\varepsilon = 0$ bedeuten.

Die Kugelschale ist gegeben durch die Gleichung

$$F \equiv \chi(\varrho) - a = 0\,.$$

Die Komponenten des Normalvektors sind wie früher

$$\nu_1 = \frac{1}{\sqrt{-g^{11}}}\,; \qquad \nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 0\,.$$

Wir haben daher den Wert von

$$\left[g^{kl}\begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix} - g^{kl}\begin{Bmatrix} k\,l \\ l \end{Bmatrix}\right]_2^1 \nu_1$$

zu berechnen. Hier ist der Index s auf der linken Seite von (I) durch 1 ersetzt worden. Wenn wir uns erinnern, daß in unserem Falle $g^{\alpha\alpha} g_{\alpha\alpha} = 1$ (über α nicht zu summieren) ist, können wir leicht zeigen, daß dieser Ausdruck der Funktion

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g_{11}}}\left(\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial\varrho} + \frac{1}{g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial\varrho} + \frac{1}{g_{44}}\frac{\partial g_{44}}{\partial\varrho}\right)\right]_{a+0} - \left[\frac{1}{\sqrt{-g_{11}}}\left(\frac{1}{g_{22}}\frac{\partial g_{22}}{\partial\varrho} + \frac{1}{g_{33}}\frac{\partial g_{33}}{\partial\varrho} + \frac{1}{g_{44}}\frac{\partial g_{44}}{\partial\varrho}\right)\right]_{a-0}$$

gleich ist. Nun ist

$$\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \varrho}\right)_{a+0} = -2a\chi'_{a+0}, \quad \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial \varrho}\right)_{a+0} = -2a\sin^2\vartheta\,\chi'_{a+0},$$

$$\left(\frac{\partial g_{44}}{\partial \varrho}\right)_{a+0} = \mu\chi'_{a+0}$$

und

$$\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial \varrho}\right)_{a-0} = -2a\chi'_{a-0}, \quad \left(\frac{\partial g_{33}}{\partial \varrho}\right)_{a-0} = -2a\sin^2\vartheta\,\chi'_{a-0},$$

$$\left(\frac{\partial g_{44}}{\partial \varrho}\right)_{a-0} = 0.$$

Durch Substitution hat man die linke Seite der Gleichung (I) gleich

$$\frac{4}{a}\left(\sqrt{1-a\mu}-1\right)+\frac{\mu}{\sqrt{1-a\mu}},$$

was vollständig unabhängig von der Funktion χ, also der Wahl des Koordinatensystems, ist. So haben wir auf der Kugelschale

$$\frac{4}{a}\left(\sqrt{1-a\mu}-1\right)+\frac{\mu}{\sqrt{1-a\mu}} = \varkappa\mathfrak{T}. \tag{17}$$

Die Tensorkomponenten $\mathfrak{T}_{ik}$ lassen sich leicht aus der Gleichung (II) berechnen. Sie enthalten die Funktion χ und hängen natürlich von dem Koordinatensystem ab. Eine Bemerkung über den Wert von $a\mu$. Weil g_{44} immer > 0 sein muß, darf $a\mu$ niemals den Wert 1 erreichen. Aus der Gleichung (17) können wir etwas weiter schließen. Im allgemeinen wird die linke Seite verschieden von Null sein. Verschwindet aber $\mathfrak{T}$, so hat man nach einer kleinen Rechnung

$$a\mu\left(a\mu-\tfrac{8}{9}\right)=0.$$

$\mu = 0$ wird die Abwesenheit einer Flächendichte bedeuten; $a\mu = \frac{8}{9}$ ist der kritische Wert, bei dem die Flächendichte $\mathfrak{T}$, ihr Vorzeichen wechselt.

5.

Die Resultate des zweiten Teiles sind alle auf Grund der Gleichungen

$$R_{ik} = -\varkappa\left(T_{ik}-\tfrac{1}{2}g_{ik}T\right) \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

gewonnen. Nehmen wir jetzt auf das λ-Glied Rücksicht, so werden unsere Betrachtungen nur unwesentlich verändert. Entsprechend der Gleichungen (6) und (8) haben wir jetzt

(6′) $$\frac{g_4'}{r g_1 g_4} + \frac{g_1'}{r g_1^2} = -\varkappa(T_1^1 - T_4^4),$$

(8′) $$\frac{g_4'}{r g_1 g_4} - \frac{g_1'}{r g_1^2} + \frac{2}{r^2 g_1} - \frac{2}{r^2} - 2\lambda = -\varkappa(T_1^1 + T_4^4).$$

Diese liefern folgende Gleichungen für g_1 und g_4, die nun natürlich von λ abhängen:

(7′) $$\frac{g_1'}{r g_1^2} - \frac{1}{r^2 g_1} + \frac{1}{r^2} + \lambda = \varkappa T_4^4,$$

(9′) $$\frac{g_4'}{g_4} = \lambda r g_1 + \frac{1}{r}(g_1 - 1) - \varkappa r g_1 T_1^1.$$

Die Gleichungen (14) und (15) des Kapitels 3 werden gar nicht geändert. Alle anderen Änderungen sind unwesentlich.

Zusammenfassung.

Erster Teil.

Kapitel 1, 2 und 3. Aufstellung der Grenzbedingungen des Schwerefeldes an einer Fläche, wo der Maßtensor stetig erscheint. Die Frage, ob auf einer solchen Fläche eine Flächendichte vorhanden ist, wird durch die Gleichungen (II) entschieden. Diese Gleichungen liefern auch die notwendigen und hinreichenden Bedingungen.

4. Betrachtung der Gleichungen in einem speziellen Koordinatensystem.

5. Beweis für den Satz, daß im statischen Felde g_{44} immer stetig ist (Unstetigkeit jeder Art kann durch Koordinatentransformation aufgehoben werden) und $\partial g_{44}/\partial \nu$ auf einer materiebelegten Fläche einen Sprung erleidet.

6. Betrachtung der zwei Tensoren, die mit dem Tensor in der Gleichung (II) zusammenhängen.

7. Die Hinzufügung des λ-Gliedes zu den Gravitationsgleichungen ändert die Gleichungen (I) und (II) nicht.

Zweiter Teil.

1. Die kugelsymmetrische Lösung der Gravitationsgleichungen im statischen Felde für beliebigen Energieimpulstensor.

2. Betrachtung der Lösung in einigen speziellen Fällen. Zwei Beispiele sind angeführt, wo in unmittelbarer Nähe

der unendlich großen Massendichte die Lichtgeschwindigkeit (vorausgesetzt, daß sie endlich bleibt) verschwindet.

3. Grenzbedingungen an einer materiebelegten Kugelschale.

4. Das Schwerefeld einer Kugelschale. Berechnung der Flächendichte und der Spannungskomponenten aus den Grenzbedingungen (I) und (II) des ersten Teiles.

5. Die Gleichungen mit dem λ-Glied.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Professor Dr. **Laue** für die bereitwilligst gewährte Anregung und Förderung dieser Arbeit meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

(Eingegangen 14. August 1923.)

Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde der Philosophischen Fakultät der Friedrich Wilhelms-Universität Berlin.

5. *Die Rolle des Standorts in der Relativitätstheorie. Eine Antwort auf die Kritik des Hrn. A. Wenzl*[1];

von A. H. Bucherer.

Ich bin Hrn. A. Wenzl zu Dank verpflichtet, daß er meine Auffassung von der Rolle des Beobachters in der Relativitätstheorie einer sachlichen kritischen Erörterung unterzieht. Es sei mir gestattet, folgendes dazu zu bemerken.[2])

Die Veranlassung zu meiner Kritik des Einsteinschen Invarianzprinzips war eine kleine Abweichung, die zwischen der von mir auf Grund der Quantenhypothese abgeleiteten Perihelbewegung des Merkur gegenüber der Einsteinschen bestand. Da ich nach sorgfältiger Prüfung in meinen Entwicklungen einen Fehler nicht entdecken konnte, so vermutete ich, daß er in den Voraussetzungen der Einsteinschen Bewegungsgleichung liegen müßte und zwar in der Nichtberechtigung seines zugrunde gelegten Invarianzprinzips. Aus den Gesetzmäßigkeiten der Rotverschiebung im Felde eines Zentralkörpers, in die das Potential des Standorts eingeht, hatte ich geschlossen: *„Ein Beobachter, im Schwerefeld im Punkte P ruhend, gewinnt dieselben Meßresultate bezüglich eines Vorgangs im Schwerefeld in O, als ob er außerhalb des Feldes ruhte und dabei der Vorgang in einem berechenbar abgeänderten Schwerefeld in O stattfände.“* Dieser Satz bezüglich der Äquivalenz von Standorten ergibt sich leicht aus folgendem Beispiel. Es befinde sich im

---

[1] A. Wenzl, Ann. d. Phys. 72. S. 457. 1923.

[2] A. H. Bucherer, Die Planetenbewegung auf Grund der Quantentheorie und eine Kritik der Einsteinschen Gravitationsgleichungen. Bonn. Ludwig Röhrscheidt.

Punkte O ein strahlendes Natriumatom im Abstande r von der Sonne und es sei der Abstand des Beobachters in $P = \varrho$, wo $\varrho > r$, dann folgt für eine beliebige Natriumlinie von der Frequenz n nach der Quantentheorie *und nach der Einsteinschen* (nach letzterer für den *bewegten* Erdbewohner):

$$n = n_0 \left(1 - \frac{\mu}{r c^2} + \frac{\mu}{\varrho c^2}\right), \tag{1}$$

wo n_0 die Frequenz der Linie bedeutet, wenn sie an einem Standort außerhalb des Schwerefeldes als Eigenfrequenz beobachtet wird. Vom letzteren Standpunkt aus betrachtet gilt demgemäß

$$n = n_0 \left(1 - \frac{\mu}{r c^2}\right). \tag{2}$$

Aus den Beziehungen (1) und (2) ergibt sich aber der obige Satz, denn offenbar kann ich dann außerhalb des Feldes die in (1) angegebene Rotverschiebung beobachten, wenn ich das Gravitationsfeld so abändere, daß im Abstande r nicht das Potential $-\frac{\mu}{r}$ besteht, sondern $-\frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{\varrho}$. So führt denn sowohl die Berechnung Einsteins als auch meine eigene Theorie zum Schluß, daß das Naturgesetz der Atomstrahlung nicht invariant ist gegenüber einer Verlegung des Standorts. Ist aber das Invarianzprinzip an einem einzigen Naturgesetz durchbrochen, so muß es allgemein ungültig sein. Herr A. Wenzl weist nun darauf hin, daß ein prinzipieller Unterschied besteht zwischen dem Vorgang einer Strahlung und der Planetenbewegung, daß also eine Verallgemeinerung aus den Erscheinungen der Rotverschiebung auf die Bewegung gewöhnlicher Massen im Gravitationsfelde nicht statthaft sei. Ich selbst hatte die Empfindung, daß der Beweis des Satzes von den äquivalenten Standorten allgemeiner zu gestalten sei und stellte hierzu die von Hrn. A. Wenzl kritisierten Thesen a) b) c) S. IX auf. Herr Wenzl hat die These a) beanstandet, indem er geltend macht, daß das Äquivalenzprinzip nur auf die unmittelbare Umgebung des Beobachters anwendbar sei. Diese Beschränkung ist aber unnötig. Man kann es auf Erscheinungen außerhalb des Einsteinschen Kastens ausdehnen. Man muß nur den Einfluß der Geschwindigkeit an und für sich so ausschließen, daß nur die Beschleunigung ihre äquivalenten Wirkungen ausübt. Man läßt zu diesem Zweck die Beschleunigung nur in einem beliebig kleinen Zeitintervall beim Beginn der Bewegung bestehen. Dann ist die Geschwindigkeit beliebig klein. Die Richtigkeit der These a) ergibt sich dann ohne weiteres. Bewegt sich der Beobachter außerhalb des Feldes mit der bei P bestehenden Erdbeschleunigung auf den Zentralkörper zu, so ist für ihn die Wirkung des Feldes bei P genau kompensiert. Ein Lichtstrahl erscheint ihm dann ebenso gerade wie dem Physiker im Einsteinschen Kasten, der bei P eine gleiche Beschleunigung in Richtung der Schwerkraft erhält! Das Feld bei O ist entsprechend verringert. Man kann das Feld bei P auch kompensieren durch eine entgegengesetzt gleiche Zentrifugalkraft. Wir schließen, daß für den *mitbewegten* Erdbewohner die Bahn des Lichtstrahls im Eigensystem eine Gerade ist und weiter, daß er bezüglich der Vorgänge in O dieselben Beobachtungen macht, als ob er außerhalb des Feldes ruhte, vorausgesetzt, daß die wegen der Bewegung von der spez. Relativitätstheorie geforderte Zeitdilatation nicht stattfindet. Dann zeigt aber eine weitere Überlegung, daß die Gravitationsgleichungen für frei bewegliche Bezugssysteme, *und nur für diese*, invariant sind. *Dann muß die Einsteinsche Formel für die Rotverschiebung falsch sein.* Sie enthält das Potential der Erde! Dagegen wären seine Gleichungen für die Planetenbewegung richtig, d. h. soweit ihre Invarianz in Frage kommt, — immer vorausgesetzt, daß die Zeitdilatation der spez. Relativitätstheorie wegen ihrer inneren Widersprüche, wie der Verfasser annimmt, nicht besteht.

Es bliebe also noch der Nachweis für den Satz von den äquivalenten Standorten so zu verallgemeinern, daß er für beliebige Bewegungen ponderabler Massen im Gravitationsfelde, also auch für die Planetenbewegung, gilt. Bevor wir hierzu übergehen, wollen wir kurz die Beweisgründe gegen eine solche Verallgemeinerung von Hrn. A. Wenzl anführen. Herr Wenzl überlegt wie folgt. Das Korrektionsglied in Gleichung (2) bedeute, daß das Potential an der Stelle der Emission in der Entfernung ϱ vom Zentralkörper von dem Potentiale an der Oberfläche des Zentralkörpers abzuziehen ist. Es sei durchaus objektiv und nicht subjektiv aufzufassen; anders sei die Merkurbewegung. Hier habe es keinen Sinn, das Potential der Sonne in Erdentfernung zu berücksichtigen. Die Planetenbewegung erfolge ja nicht unter dem Einfluß dieses Potentials. Ich muß offen gestehen, daß ich diese prinzipielle Unterscheidung des Hrn. Wenzl nicht anerkennen kann.[1]) Es läßt sich aber sein Einwand beseitigen und damit gleichzeitig die Folgerung, die wir aus der Strahlung eines Natriumatoms im Schwerefelde gezogen haben, verallgemeinern und auf die Planetenbewegung in folgender Weise übertragen. Wir erteilen dem Planeten eine beliebig kleine elektrische Ladung. Dann läßt sich dieser als Elektron auffassen, und die Folgerungen, die sich aus der Elektronenbewegung ableiten lassen, in entsprechender Form auf die Bewegung des Merkur anwenden. Schon Einstein hat in seiner Abhandlung über die Elektrodynamik bewegter Körper einen ähnlichen Weg eingeschlagen. Nachdem er nämlich die longitudinale und transversale Masse des Elektrons abgeleitet hat, bemerkt er, daß diese Resultate auch für die ponderabeln materiellen Punkte gelten. „Denn", sagt er, „ein ponderabler, materieller Punkt kann durch Zufügen einer beliebig kleinen elektrischen Ladung zu einem Elektron (in unserem Sinne) gemacht werden."

Zunächst ist ersichtlich, daß die Periode des Planeten identisch ist mit derjenigen des fingierten Elektrons, und die feinsten Einzelheiten der Bewegung des Planeten werden durch die Strahlungserscheinungen auf das Genaueste übermittelt. So ergibt sich aus der Frequenz der erzeugten Strahlung die Umlaufzeit des Planeten und die Messung dieser Umlaufzeit im Punkte P des in P *ruhenden* Beobachters erscheint daher genau wie bei der Atomstrahlung durch den Standort bedingt. Es gilt also für die Beeinflussung der Frequenz der Merkurbahn durch das Potential des Standorts die oben angegebene Gleichung (1). Man erkennt auch ohne weiteres, daß ein anderer Einwand des Hrn. Wenzl damit entfällt. Herr Wenzl meint nämlich, das Modell Sonne–Merkur, sei mit einem Atommodell nicht vergleichbar, denn es sende „keine Strahlen, welche die Eigenfrequenz an dem Ort der Emission einem Beobachter in einem anderen Gravitationsfelde mitteilen könne". *Diese zwingenden Schlüsse sind offenbar unverträglich mit dem Einsteinschen Invarianzprinzip* und die Überlegungen am Schluß meiner Broschüre S. 16, 17, 18, 19 bleiben unverändert bestehen. Fragen wir nun weiter, ob ohne das widerlegte Invarianzprinzip Einstein zu zahlenmäßigen Beziehungen gelangen könne, so kann die Antwort nur „nein" lauten, denn die kinematischen Beziehungen der Relativitätstheorie reichen nicht aus, um zu einer berechenbaren Bewegung des Merkur zu gelangen. *Es muß eben ein außerhalb der Relativitätstheorie gelegenes Prinzip hinzukommen und dieses habe ich in dem Satz der Quantentheorie entdeckt,* nämlich, daß die Energie der Lichtschwingungen proportional der Frequenz ist. Beiläufig sei hier bemerkt, daß eine Anwendung der Theorie der adiabatischen Invarianten eine allgemeinere Grundlage liefern würde.

---

[1]) Tatsächlich habe ich schon a. a. O. durch die Betrachtung des Gleichgewichts zwischen Strahlung und Materie gezeigt, wie man von den Gesetzmäßigkeiten der Lichtquanten zu denen der gewöhnlichen Materie übergeht.

Zusammenfassung.

1. Die Richtigkeit der zur Ableitung des Satzes von der Äquivalenz der Standorte verwandten These a) wird bewiesen.

2. Die Einsteinsche Formel für die Rotverschiebung ist falsch, weil sie das Potential der Erde enthält.

3. Die Gravitationsgleichungen sind invariant für frei bewegliche Bezugssysteme und nur für diese, wenn die Zeitdilatation der spez. Relativitätstheorie fallen gelassen wird.

4. Durch Erteilung einer beliebig kleinen Ladung können wir einen Planeten zu einem fiktiven Elektron machen und dann aus dessen Strahlung die Bewegung des Planeten erschließen. Nötig ist dieser Schritt aber nicht.

5. Mit dem Versagen des Invarianzprinzips verliert Einstein jede Grundlage zur Berechnung von Vorgängen im

ist. Es sei durchaus objektiv und nicht subjektiv aufzufassen; anders sei die Merkurbewegung. Hier habe es keinen Sinn, das Potential der Sonne in Erdentfernung zu berücksichtigen. Die Planetenbewegung erfolge ja nicht unter dem Einfluß dieses Potentials. Ich muß offen gestehen, daß ich diese prinzipielle Unterscheidung des Hrn. Wenzl nicht anerkennen kann.[1]) Es läßt sich aber sein Einwand beseitigen und damit gleichzeitig die Folgerung, die wir aus der Strahlung eines Natriumatoms im Schwerefelde gezogen haben, verallgemeinern und auf die Planetenbewegung in folgender Weise übertragen. Wir erteilen dem Planeten eine beliebig kleine elektrische Ladung. Dann läßt sich dieser als Elektron auffassen, und die Folgerungen, die sich aus der Elektronenbewegung ableiten lassen, in entsprechender Form auf die Bewegung des Merkur anwenden. Schon Einstein hat in seiner Abhandlung über die Elektrodynamik bewegter Körper einen ähnlichen Weg eingeschlagen. Nachdem er nämlich die longitudinale und transversale Masse des Elektrons abgeleitet hat, bemerkt er, daß diese Resultate auch für die ponderabeln materiellen Punkte gelten. „Denn“, sagt er, „ein ponderabler, materieller Punkt kann durch Zufügen einer beliebig kleinen elektrischen Ladung zu einem Elektron (in unserem Sinne) gemacht werden.“

Zunächst ist ersichtlich, daß die Periode des Planeten identisch ist mit derjenigen des fingierten Elektrons, und die feinsten Einzelheiten der Bewegung des Planeten werden durch die Strahlungserscheinungen auf das Genaueste übermittelt. So ergibt sich aus der Frequenz der erzeugten Strahlung die Umlaufzeit des Planeten und die Messung dieser Umlaufzeit im Punkte P des in P *ruhenden* Beobachters erscheint daher genau wie bei der Atomstrahlung durch den Standort bedingt. Es gilt also für die Beeinflussung der Frequenz der Merkurbahn durch das Potential des Standorts die oben angegebene Gleichung (1). Man erkennt auch ohne weiteres, daß ein anderer Einwand des Hrn. Wenzl damit entfällt. Herr Wenzl meint nämlich, das Modell Sonne–Merkur, sei mit einem Atommodell nicht vergleichbar, denn es sende „keine Strahlen, welche die Eigenfrequenz an dem Ort der Emission einem Beobachter in einem anderen Gravitationsfelde mitteilen könne". *Diese zwingenden Schlüsse sind offenbar unverträglich mit dem Einsteinschen Invarianzprinzip* und die Überlegungen am Schluß meiner Broschüre S. 16, 17, 18, 19 bleiben unverändert bestehen. Fragen wir nun weiter, ob ohne das widerlegte Invarianzprinzip Einstein zu zahlenmäßigen Beziehungen gelangen könne, so kann die Antwort nur „nein" lauten, denn die kinematischen Beziehungen der Relativitätstheorie reichen nicht aus, um zu einer berechenbaren Bewegung des Merkur zu gelangen. *Es muß eben ein außerhalb der Relativitätstheorie gelegenes Prinzip hinzukommen und dieses habe ich in dem Satz der Quantentheorie entdeckt*, nämlich, daß die Energie der Lichtschwingungen proportional der Frequenz ist. Beiläufig sei hier bemerkt, daß eine Anwendung der Theorie der adiabatischen Invarianten eine allgemeinere Grundlage liefern würde.

---

[1]) Tatsächlich habe ich schon a. a. O. durch die Betrachtung des Gleichgewichts zwischen Strahlung und Materie gezeigt, wie man von den Gesetzmäßigkeiten der Lichtquanten zu denen der gewöhnlichen Materie übergeht.

Zusammenfassung.

1. Die Richtigkeit der zur Ableitung des Satzes von der Äquivalenz der Standorte verwandten These a) wird bewiesen.

2. Die Einsteinsche Formel für die Rotverschiebung ist falsch, weil sie das Potential der Erde enthält.

3. Die Gravitationsgleichungen sind invariant für frei bewegliche Bezugssysteme und nur für diese, wenn die Zeitdilatation der spez. Relativitätstheorie fallen gelassen wird.

4. Durch Erteilung einer beliebig kleinen Ladung können wir einen Planeten zu einem fiktiven Elektron machen und dann aus dessen Strahlung die Bewegung des Planeten erschließen. Nötig ist dieser Schritt aber nicht.

5. Mit dem Versagen des Invarianzprinzips verliert Einstein jede Grundlage zur Berechnung von Vorgängen im

Schwerefelde und man erkennt die Notwendigkeit ein außerhalb der Relativität der Bewegungen liegendes Prinzip hinzuzuziehen. Es genügt der Satz, daß die Energie eines Lichtquants proportional seiner Frequenz ist.

Bonn, den 12. Oktober 1923.

(Eingegangen 15. Oktober 1923.)

6. Über die Beziehung zwischen der Gleichung von van der Waals und der Formel von Trouton;

von A. Brandt.

Die Gleichung von van der Waals hat folgende Form:

(1) $$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=\frac{H}{m}T,$$

wo H eine für alle Substanzen gleiche Konstante ist und m das Molekulargewicht.

Es sei T_1 die absolute Siedetemperatur der Flüssigkeit bei dem Druck p_1, σ_1 das spezifische Volumen der siedenden Flüssigkeit und s_1 das spezifische Volumen ihres gesättigten Dampfes.

Dann sind die folgenden Gleichungen gültig:

(2) $$\left(p_1+\frac{a}{\sigma_1^2}\right)(\sigma_1-b)=\frac{H}{m}T_1,$$

(3) $$\left(p_1+\frac{a}{s_1^2}\right)(s_1-b)=\frac{H}{m}T_1.$$

Wenn p_1 genügend klein ist, so können in der Gleichung (2) p_1 im Verhältnis zu a/σ_1^2 und in der Gleichung (3) a/s_1^2 im Verhältnis zu p_1 und b im Verhältnis zu s_1 vernachlässigt werden. Dann erhalten wir:

(4) $$\left(\frac{a}{\sigma_1^2}\right)(\sigma_1-b)=\frac{H}{m}T_1,$$

(5) $$p_1 s_1=\frac{H}{m}T_1.$$

Für den kritischen Punkt der Flüssigkeit besteht die folgende Gleichung:

(6) $$T_k=\frac{8}{27}\,\frac{a\,m}{b\,H}.$$

Wenn die Größe a aus Gleichung (6) in Gleichung (4) eingesetzt wird, so erhalten wir:

$$\frac{b}{\sigma_1} - \left(\frac{b}{\sigma_1}\right)^2 = \frac{8}{27}\,\frac{T_1}{T_k}$$

und hieraus:

$$\frac{b}{\sigma_1} = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - \frac{8}{27}\,\frac{T_1}{T_k}}\,. \tag{7}$$

In diesem Ausdruck ist nur das Additionszeichen beizubehalten, weil, laut Gleichung (4), bei $T_1 = 0$ die Größe b/σ_1 gleich 1 sein muß und nicht gleich Null.

Die Gleichungen von **Clapeyron** und **Clausius-Maxwell** ergeben für die latente Verdampfungswärme bei der Temperatur T_1:

$$r_1 = A\int\limits_{\sigma_1}^{s_1} T\,\frac{dp}{dt}\,d\,v = A\int\limits_{\sigma_1}^{s_1}\left(p_1 + \frac{a}{v^2}\right)d\,v$$

$$= A\left[p_1\,(s_1 - \sigma_1) + \frac{a}{\sigma_1} - \frac{a}{s_1}\right].$$

Wenn wieder σ_1 im Verhältnis zu s_1 und a/s_1 im Verhältnis zu a/σ_1 vernachlässigt wird, so erhalten wir, nach Einstellung der Größen $p_1 s_1$ und a aus den Gleichungen (5) und (6):

$$r_1 = A\left[\frac{H\,T_1}{m} + \frac{27}{8}\,\frac{T_k\,H\,b}{m\,\sigma_1}\right].$$

Nach Einstellung von $A = \frac{1}{427}$, $H = 845{,}2$ und b/σ_1 aus Gleichung (7) erhalten wir

$$\frac{r_1\,m}{T_1} = 2\left(1 + \frac{0{,}5 + \sqrt{0{,}25 + \frac{8}{27}\,\frac{T_1}{T_k}}}{\frac{8}{27}\,\frac{T_1}{T_k}}\right). \tag{8}$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß die Formel von **Trouton**:

$$\frac{r_1\,m}{T_1} = \text{const}$$

nur in dem Falle aus der Gleichung von **van der Waals** erhalten werden kann, wenn T_1/T_k für verschiedene Flüssigkeiten konstant ist, d. i. wenn die Temperaturen T_1 und T_k korrespondierende Temperaturen sind.

Guldberg hat gezeigt[1]), daß annähernd die kritischen Temperaturen und die Siedetemperaturen bei Atmosphärendruck für die verschiedensten Flüssigkeiten korrespondierende Temperaturen sind und daß annähernd für alle Substanzen

---

[1]) C. **Guldberg**, Zeitschr. f. physik. Chemie 5. S. 536. 1895.

$$\frac{T_1}{T_k} = 0{,}6\,.$$

Wenn dieser Wert in Gleichung (8) eingesetzt wird, so erhalten wir:

$$\frac{r_1 m}{T_1} = 10{,}8\,,$$

also nur etwa die Hälfte des Wertes der Konstanten der Formel von Trouton, welcher zwischen 20 und 22 variiert.

Übrigens läßt sich eine genauere Übereinstimmung auch nicht erwarten, da weder die Gleichung von van der Waals noch die Formel von Trouton auf genaue Wiedergabe der Eigenschaften der verschiedenen Substanzen Anspruch erheben können.

(Eingegangen 14. September 1923.)

7. *Über die Verdampfungswärme und den Druck gesättigter Dämpfe bei sehr niedrigen Temperaturen;*

von A. Brandt.

Das Wärmetheorem von W. Nernst hat in Frankreich nicht viel Anklang gefunden. Die Kritik, welche geübt wird, ist aber nicht frei von Fehlern, was an folgendem Beispiel gezeigt werden soll.

In den Heften vom 26. Februar Nr. 9 und 19. März Nr. 12 der Comptes rendus für 1917 hat E. Ariès zwei Artikel veröffentlicht unter den Titeln: „L'entropie des gaz parfaits au zéro de la température absolue“ und „Sur la tension de la vapeur saturée aux basses températures et sur la constante chimique“.

Die Betrachtungen von E. Ariès können in folgendem zusammengefaßt werden:

Die Gleichung von Clapeyron für die Verdampfungswärme lautet:

$$\frac{r}{u} = A T \frac{dp}{dt} .$$

Bei niedrigen Temperaturen folgen die Dämpfe der Zustandsgleichung der idealen Gase $p u = R T$. E. Ariès ist der Meinung, daß bei niedrigen Temperaturen:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p}{T} .$$

Die Differenz der Entropien eines Kilogrammes Dampf und eines Kilogrammes Flüssigkeit ist dann:

$$s_1 - s_2 = \frac{r}{T} = A \frac{R T}{p} \frac{p}{T} = A R = \frac{A H}{m} = \frac{2}{m} .$$

Also ist:

$$r = \frac{2}{m} T .$$

Daraus folgert E. **Ariès** die folgenden zwei Sätze:

1. Wenn die Temperatur sich dem absoluten Nullpunkt nähert, so strebt die Änderung der Entropie bei der Verdampfung einer Flüssigkeit zum Werte $2/m$.
2. Bei der Temperatur des absoluten Nullpunktes ist die Verdampfungswärme gleich Null.

Also ist beim absoluten Nullpunkte:

$$r_0 = 0, \qquad \frac{r_0 m}{2T} = 1 .$$

Daher findet E. **Ariès** auch, daß die bekannte Formel von W. **Nernst**

$$\ln \cdot p = -\frac{m r_0}{2T} + \frac{m c_p}{2} \ln T + \ln R + \frac{m}{2}(k - c_p)$$

die einfachere Gestalt annehmen muß:

$$\ln \cdot p = -1 + \frac{m c_p}{2} \ln \cdot T + \ln \cdot R + \frac{m}{2}(k - c_p) .$$

Jedoch sind die Betrachtungen von E. **Ariès** durchaus fehlerhaft.

Wenn $pu = RT$ ist, wo u und p Funktionen von T sind, so ist:

$$\frac{d(pu)}{dt} = p\frac{du}{dt} + u\frac{dp}{dt} = R .$$

Also ist

$$\frac{dp}{dt} = \frac{R}{u} - \frac{p}{u}\frac{du}{dt} = \frac{p}{T} - \frac{p}{u}\frac{du}{dt} .$$

Die Größe $\frac{p}{u}\frac{du}{dt}$ kann nicht gleich Null gesetzt werden, wie E. **Ariès** es tut, weil du/dt bis zur Unendlichkeit wächst, wenn p/u sich der Null nähert. Daher ist:

$$r = ATu\frac{dp}{dt} = ART - ATp\frac{du}{dt} ,$$

d. h. r besteht aus zwei Größen:

1. der Wärme $ART = Apu$, welche der äußeren Arbeit bei der Verdampfung äquivalent ist und bei $T = 0$ verschwindet;
2. der Wärme $-ATp\frac{du}{dt}$, welche bei $T = 0$ nicht verschwindet.

Diese Wärme ist die innere latente Verdampfungswärme

$$\varrho = -ATp\frac{du}{dt} ,$$

welche sogar bei sehr niedrigen Temperaturen und bei dem absoluten Nullpunkte nicht der Null gleich zu setzen ist, weil sie bei der Verdampfung zur Überwindung der inneren Kohäsionskräfte verbraucht wird.

Diese inneren Kohäsionskräfte wirken zwischen den Molekeln auch bei sehr niedrigen Temperaturen; sie müssen überwunden werden, da bei der Verdampfung eine Vergrößerung des Volumens stattfindet.

Die Gleichung von W. Nernst für $\ln \cdot p$ bleibt natürlich zu Recht bestehen und die von E. Ariès unternommene Vereinfachung dieser Formel ist fehlerhaft.

(Eingegangen 14. September 1923.)

8. *Die thermodynamische Fläche des Wassers;*
von A. Brandt.

Die thermodynamische Fläche des Wassers hat ein viel komplizierteres Aussehen als die thermodynamischen Flächen der normalen Substanzen. Auf Fig. 1 ist sie perspektivisch dargestellt und auf Fig. 2 im Grundriß.

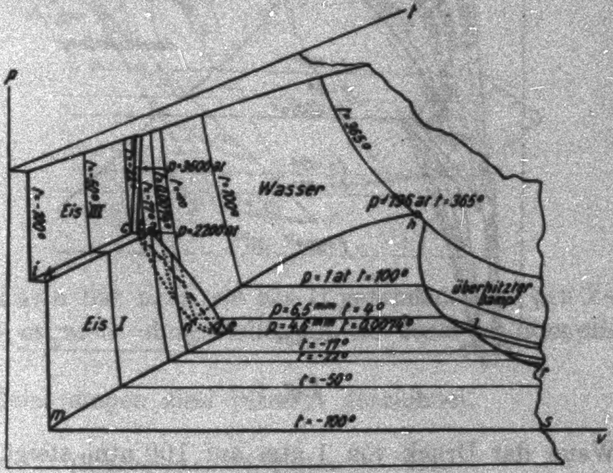

t
p
t=-180°
Eis III
t=-60°
Eis
p=3600 at
t=-17°
t=100°
Wasser
t=365°
p=196 at t=365°
h
p=2200 at
p=1 at t=100°
überhitzter Dampf
p=6,5mm t=4°
p=4,6mm t=0,0074°
t=-17°
t=-22°
t=-50°
t=-100°
Eis I
m
r
s
v

Fig. 1.

Auf den Zeichnungen ist *eduhl* die Zylinderfläche der Verdampfung des Wassers. Die Grenzkurven dieser Fläche sind *hl* und *dnh*; *h* ist der kritische Punkt. Die Zylinderfläche *elrsm* entspricht der Verdampfung des Eises; die Grenzkurven dieser Fläche sind *lr* und *em*. Die Zylinderfläche *aedb* entspricht dem Schmelzen des Eises; sie ist auf Fig. 1 von der thermodynamischen Fläche des Eises bedeckt, weil das spezifische Volumen des Eises größer ist als das spezifische Volumen des Wassers. Die drei Zylinderflächen schneiden sich in der dem Tripelpunkt entsprechenden Geraden *del*.

Das Wasser hat bei Atmosphärendruck seine größte Dichte bei +4° C; bei höheren Drucken entspricht die größte Dichte geringeren Temperaturen. Daher bildet die thermodynamische Fläche des Wassers eine nach vorn und nach rechts gewandte Falte. Auf Fig. 3 ist die thermodynamische Fläche des Wassers mit dieser Falte in größerem Maßstabe dargestellt; die untere Begrenzung ist die Grenzlinie Wasser—gesättigter Dampf. Auf Fig. 3 sind die Isothermen zwischen $t = -15^0$ und $t = +12^0$ angegeben.

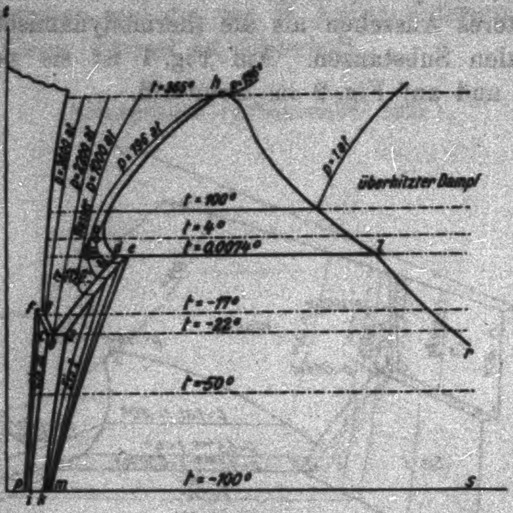


Fig. 2.

Wenn der Druck von 1 atm auf 100 atm steigt, so sinkt die Schmelztemperatur des Eises um 0,74° C; wenn dt/dp konstant wäre, so könnte man erwarten, daß bei dem Druck von 3000 atm die Schmelztemperatur gleich $-0{,}74 \times 30 = -22^0$ C wäre. Tammann hat aber gezeigt, daß die Schmelztemperatur schon bei 2200 atm gleich -22^0 ist und daß bei dieser Temperatur das Wasser einen zweiten Tripelpunkt besitzt.

Bei Drucken, welche höher als 2200 atm sind, geht das gewöhnliche Eis (von Tammann Eis I genannt) in eine andere allotropische Form über, das Eis III, welches dichter ist als Wasser bei demselben Druck und derselben Temperatur. Daher schneiden sich in der Geraden *cba* drei Zylinderflächen *abde*, *bgfc* und *caki*, welche beziehungsweise dem Schmelzen des

Eises I, dem Schmelzen des Eises III und der Verwandlung des Eises I in das Eis III entsprechen.

Um die Zeichnungen klarer zu machen, sind auf Fig. 1 Isothermen für mehrere Temperaturen und auf Fig. 2 Isobaren für mehrere Drucke eingezeichnet.

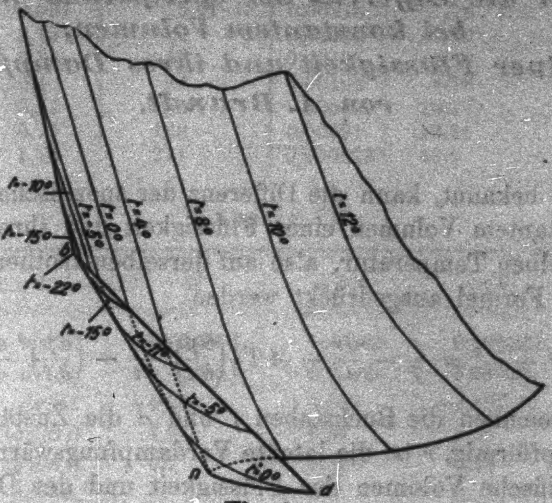


Fig. 8.

Tammann hat noch ein Eis II gefunden. Auf den Zeichnungen ist es nicht dargestellt, da sie sonst zu kompliziert wären.

Alle Zeichnungen sind verzerrt gezeichnet.

(Eingegangen 14. September 1923.)

9. *Über die Differenz der spezifischen Wärmen, bei konstantem Volumen, einer Flüssigkeit und ihres Dampfes;*

von A. Brandt.

Wie bekannt, kann die Differenz der spezifischen Wärmen bei konstantem Volumen einer Flüssigkeit und ihres Dampfes bei derselben Temperatur, also auf derselben Isotherme, durch folgende Formel ausgedrückt werden:

$$c_v^f - c_v^d = \frac{r}{T} - \frac{dr}{dt} - A\,T\left[\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^f \frac{d\sigma}{dt} - \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)^d \frac{ds}{dt}\right].$$

Hier bezeichnen die Buchstaben f und d die Zustände flüssig und dampfförmig, r ist die latente Verdampfungswärme, σ und s das spezifische Volumen der Flüssigkeit und des Dampfes.

Diese Formel ist von M. **Planck**¹) schon 1897 abgeleitet. Viel später (1906) hat sie **Amagat**²) als neu entwickelt.

Alle Größen der rechten Seite der Formel sind für Kohlensäure in den beiden Tabellen I (nach **Zeuner**) und II (nach **Amagat**) gegeben.

Tabelle I.

t	p atm	s	σ	r
−10	26,2	0,0143	0,00104	61,47
− 5	30,0	0,0122	0,00107	58,63
0	34,3	0,0104	0,00110	55,45
5	39,0	0,0089	0,00113	51,86
10	44,2	0,0075	0,00117	47,74
15	50,0	0,0063	0,00123	42,89
20	56,3	0,0052	0,00131	36,93
25	63,8	0,0042	0,00142	28,98

---

1) M. **Planck**, Vorlesungen über Thermodynamik. S. 137. 1897.

2) E. H. **Amagat**, Compt. rend. 142. S. 1120. 1906.

Tabelle II.

Volumen m^3	$\partial p/\partial t$ atm	$T\frac{\partial p}{\partial t} - p$ atm	Volumen m^3	$\partial p/\partial t$ atm	$T\frac{\partial p}{\partial t} - p$ atm
0,50885	0,037	0,11	0,00218	1,72	450
0,01214	0,195	22	0,00162	2,90	804
0,00832	0,31	43	0,00127	4,74	1324
0,00661	0,4	64	0,00102	8,73	2254
0,00509	0,57	105	0,000952	10,77	2614
0,00391	0,79	168	0,00091	12,25	2825
0,00214	1,14	271	0,000873	13,5	2956

Tabelle III.

t	-5^0	$+10^0$	$+25^0$
$d\sigma/dt$	0,000006	−0,00001	0,000037
ds/dt	−0,00089	−0,00026	−0,00023
dr/dt	−0,602	−0,897	−2,193
$(\partial p/\partial t)^f$	7,9	6,34	3,95
$(\partial p/\partial t)^d$	0,2	0,358	0,74
$c_v{}^f - c_v{}^d$	0	0	0

Wie aus Tabelle III zu ersehen ist, gibt die Formel bei den Temperaturen -5^0, $+10^0$ und $+25^0$ C das Resultat, daß $c_v{}^f - c_v{}^d = 0$ ist.

Ein gleiches Resultat geben übrigens auch andere sogenannte normale Substanzen wie Pentan, Isopentan usw.

Aus dieser Gleichheit der Werte $c_v{}^f$ und $c_v{}^d$ für normale Substanzen kann aber nicht gefolgert werden, daß ihre spezifische Wärme bei konstantem Volumen nur von der Temperatur und nicht vom Volumen abhängt, daß also für diese Substanzen $(\partial c_v / \partial v)_t = 0$ ist.

Dagegen sprechen die Versuche von Joly usw. Sie zeigen, daß die spezifische Wärme bei konstantem Volumen der normalen Flüssigkeiten auf derselben Isotherme eine mit dem Volumen veränderliche Größe ist: sie wächst erst bei Verringerung des Volumens (ungefähr bis zum kritischen Volumen) und wird darauf wieder kleiner bei weiterer Verringerung des Volumens.

Zu ähnlichem Resultate gelangte auch A. J. Swart[1]) auf theoretischem Wege für dissoziierende Gase. Er fand, daß die Größe c_v ein Maximum hat auf jeder Isotherme in dem Punkte, in welchem ungefähr 59 Proz. des Gases schon dissoziiert sind.

Mit einer solchen Veränderlichkeit von c_v korrespondieren auch die Veränderungen der Größe $(\partial p/\partial t)_v$ der normalen Substanzen. Umfangreiche Versuche von Amagat, Ramsay und Young usw. haben gezeigt, daß diese Größe sich bei Erwärmung verringert, wenn das Volumen größer ist als das kritische Volumen. Also sind bei großem Volumen die Größen $\partial^2 p/\partial t^2$ und auch $(\partial c_v/\partial v)_t$ negativ und c_v muß bei Vergrößerung des Volumens kleiner werden. Dagegen wachsen die Größen $(\partial p/\partial t)_v$ bei Erwärmung, wenn das Volumen kleiner ist als das kritische; also sind bei sehr kleinem Volumen die Größen $\partial^2 p/\partial t^2$ und $(\partial c_v/\partial v)_t$ positiv und c_v muß bei Vergrößerung des Volumens wachsen.

Die annähernde Gleichheit der c_v^f und c_v^d der normalen Substanzen kann wie folgt erklärt werden:

Die spezifische Wärme bei konstantem Volumen besteht aus zwei Größen: a) der konstanten wahren spezifischen Wärme c der Substanz, b) der veränderlichen Wärmemenge, welche bei Erhöhung der Temperatur um 1° zur Dissoziation verbraucht wird.

Wenn u_v die molekulare Dissoziationswärme ist, m das Molekulargewicht und wenn in 1 kg Substanz x kg schon dissoziiert sind, so ist:

$$c_v = c + \frac{u_v}{m}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_v .$$

Also ist für die Gleichheit der c_v^f und c_v^d nur nötig, daß bei gleicher Temperatur die Größen $(\partial x/\partial t)_v^f$ und $(\partial x/\partial t)_v^d$ gleich sind, d. h. daß bei Erwärmung der gleichen Gewichtseinheit der Flüssigkeit und des Dampfes bei konstantem Volumen die gleiche Anzahl assoziierter Molekel in einfache Molekel zerfällt.

Für nicht normale Substanzen sind c_v^f und c_v^d und also auch $(\partial x/\partial t)^f$ und $(\partial x/\partial t)^d$ durchaus nicht gleich. Z. B. ist für Wasser bei 100° C. annähernd $c_v^f - c_v^d = 0{,}5$ cal.

---

[1]) A. J. Swart, De Wetten der dissocieerende Gassen. Amsterdam 1890.

(Eingegangen 14. September 1923.)

10. *Betrachtungen über den Kohäsionsdruck;*
von A. Brandt.

Die Gase und Flüssigkeiten werden meist in zwei Klassen geteilt. Zu der ersten Klasse gehören die sogenannten normalen Substanzen — Kohlensäure, Pentan, Isopentan, Fluorbenzol usw.; sie gehorchen mehr oder weniger genau der Gleichung von van der Waals, und es wird angenommen, daß ihr molekularer Bau im gasförmigen und flüssigen Zustande derselbe ist. Zu der zweiten Klasse gehören Wasser, Alkohole, Säuren. Es wird angenommen, daß diese Substanzen im dampfförmigen Zustande aus einzelnen Molekeln bestehen, daß aber bei dem Übergange in den flüssigen Zustand Assoziation stattfindet, und daß sich aus den einzelnen Molekeln Molekülgruppen bilden, welche aus zwei, drei oder mehr Molekeln bestehen können.

Zur Unterscheidung dieser zwei Klassen dient die größere oder geringere Abweichung der Substanzen von der Zustandsgleichung von van der Waals und den bekannten Formeln von Trouton, Ramsay-Eötvös usw.

Jedoch genügen auch die normalen Substanzen der Zustandsgleichung von van der Waals nur qualitativ und nicht quantitativ; es ist also kaum möglich anzunehmen, daß die normalen Flüssigkeiten und Dämpfe durchaus monomolekular sind.

Daher hat sich in der letzten Zeit, etwa seit 1906, eine radikalere Assoziationshypothese Bahn gebrochen.

Diese Hypothese nimmt an, daß die Assoziation auch im dampfförmigen Zustande besteht und daß sie allmählich bei Temperaturerniedrigung und Verminderung des Volumens wächst, so daß der Assoziationsgrad eine Funktion zweier der drei Veränderlichen p, v und T ist.

Daher muß auch das Molekulargewicht der Substanz sich allmählich ändern und ist auch eine Funktion der Koordinaten.

Es dürfte sogar deutschen Physikern und Chemikern wenig bekannt sein, daß der Philosoph Eugen Dühring und sein Sohn Ulrich Dühring schon 1886 die Assoziationshypothese konsequent durchgeführt haben. Ihre Schrift[1]) darüber ist vielleicht schwer zugänglich gewesen; das ist wohl die Ursache, warum E. und U. Dühring nicht als die Begründer der Assoziationshypothese bekannt sind.

Der Zustandsgleichung aller Substanzen geben E. und U. Dühring die folgende Form:

$$(p + z)(v - b) = nHT,$$

wo $H = 845{,}2$ ist und $n = \frac{1}{m}$ die veränderliche Anzahl der Moleküle in 1 kg der Substanz vom Molekulargewichte m.

Außerdem formulieren sie die folgenden Gesetze:

1. Die Molekülzahl ändert sich mit der Skala der Zustände und weist in den verschiedenen Aggregatzuständen ein ganzes Vielfaches ihres ursprünglichen Wertes auf.

2. Bei Gleichheit von Zwischenvolumen $v - b$, Temperatur T und Wärmedruck $p + z$ ist die Anzahl der Moleküle immer die nämliche, nicht bloß in den Gasen, sondern überhaupt in allen Körpern.

3. Die Anzahl der Moleküle nimmt in der Regel zu mit wachsendem Volumen und wachsender Temperatur.

Über die Größen z und b sagen E. und U. Dühring folgendes: „Bezüglich des b sei bemerkt, daß, obgleich wir es als annähernde Konstante zu behandeln das Recht haben, doch die eindringlichere Analyse lehren wird, wie diese Voraussetzung keine allgemeine sein darf. Für z ist wesentlich, daß es ausschließlich als eine Funktion des Volumens angesehen werden kann, weil die Verleitung, es auch als Funktion der Temperatur zu nehmen, dadurch wegfällt, daß sich alle scheinbaren Einflüsse der Temperatur nach der Einführung der Funktion n durch die Abhängigkeit dieser Molekülzahl von der Temperatur und dem Volumen erklären."

„Auch ist es das natürlichste, die Zugkräfte zwischen den Molekeln als etwas Selbständiges zu denken, was nur von dem

---

[1]) E. und U. Dühring, Neue Grundgesetze zur rationellen Physik und Chemie. 2. Folge. Leipzig 1886, Fues.

Volumen abhängt, mit der Temperatur aber nichts Direktes zu schaffen hat. Uns scheint es sogar ebenso unberechtigt, die Kohäsion unmittelbar als von der Temperatur bestimmt denken zu wollen, als wenn man es sich einfallen ließe, die Schwere als von der Temperatur abhängig zu fingieren."

Weiter finden E. und U. Dühring eine maximale Größe für z auf folgendem Wege:

„Differenzieren wir unsere Grundgleichung

$$(p + z)(v - b) = HnT$$

zunächst nach t unter Vernachlässigung der etwaigen kleinen Veränderung des Molekularvolumens b, so erhalten wir:

$$(v - b)\,dp = Hn\,dt + HT\,dn$$

und hieraus

$$Hn = (v - b)\frac{dp}{dt} - HT\frac{dn}{dt}\,.$$

Setzt man den so erhaltenen Ausdruck für Hn in die rechte Seite der Stammgleichung ein, so ergibt sich:

$$p + z = T\frac{dp}{dt} - \frac{HT^2}{v - b}\,\frac{dn}{dt}\,.\text{“}$$

Darauf finden E. Dühring und U. Dühring, daß $p + z$ und also auch z kleiner sein muß als $T\frac{dp}{dt}$, da dn/dt gewöhnlich positiv ist.

Erst viel später als 1886 ist die Assoziationshypothese für alle Substanzen im dampfförmigen und flüssigen Zustande von anderen Physikern aufgestellt worden, so z. B. von J. D. van der Waals (1906), P. Bogdan (1907), H. von Jüptner (1908), G. van Rij (1908), J. J. van Laar (1909), Herbert Lévy (1910, nur für Wasserdampf) usw.

Gewöhnlich wird ebenso wie von E. und U. Dühring außer der Assoziation auch gravitierende Molekularattraktion vorausgesetzt.

Eine radikalere Form der Assoziationshypothese wird seit 1909 von K. Drucker vertreten, der jede Abweichung der Stoffe von der idealen Gasgleichung

$$pv = nHT$$

durch eine Veränderung von n erklärt.

Im folgenden wollen wir die gravitative Molekularattraktion als vorhanden annehmen.

Verhältnis v zum Normalvolumen	v	$\frac{a}{v^2}$	10333 $(v-b)$	0°	10°	20°	30°	40
1	0,50855	0,0049	5249,9	*1* 43,8	*1,037* 43,7	*1,073* 43,8	*1,111* 43,9	*1,1* 43,7
0,02385	0,01214	8,5	117,4	*31,0* 49,8	*33* 49,1	*35* 48,5	*37* 47,9	*39* 47,4
0,01636	0,00832	18,2	77,92	— —	*41,8* 51,2	*45,1* 50,2	*48* 49,5	*51,1* 48,8
0,01300	0,00661	28,9	60,24	— —	— —	*51,1* 51,4	*55,5* 50,4	*59,7* 49,6
0,01000	0,00509	48,6	44,54	— —	— —	— —	*62,8* 51,6	*68,6* 50,7
0,00768	0,00391	82,3	32,34	— —	— —	— —	— —	*76,6* 51,5
0,00578	0,00294	145,6	22,32	— —	— —	— —	— —	*83,1* 51,8
0,00428	0,00218	261,7	14,47	— —	— —	— —	— —	*87,8* 52,3
0,00316	0,00162	473,4	8,68	— —	— —	— —	— —	*98* 52,8
0,00250	0,00127	780,0	5,06	— —	— —	*64,4* 57,9	*109* 56,9	*155* 55,9
0,00200	0,00102	1209,3	2,48	*125,5* 69,7	*279* 68,0	*300* 66,2	*384* 64,3	*470* 63,5
0,00187	0,000952	1388,1	1,78	*307,9* 76,6	*404* 75,1	*520* 73,0	*627,5* 71,5	*750* 69,6
0,00178	0,00091	1519,8	1,34	*510* 84,7	*638* 82,6	*776* 80,3	*900* 78,3	*1000* 78,2
0,001716	0,000873	1650,8	0,96	*730* 100	*865* 98,9	*1000* 97,2	— —	— —
	845,2 T			230740	239192	247644	256046	2645

Die Assoziationshypothese genügt vollständig, um alle Abweichungen der wirklichen Gase von der Zustandsgleichung von **van der Waals** zu erklären. So z. B. können alle Zustände der Kohlensäure, für die sehr umfangreiche Versuchsdaten von **Amagat** vorliegen, sehr wohl durch die **van der Waals**sche Gleichung

$$10333\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=\frac{845,2}{m}T$$

dargestellt werden, wenn das Molekulargewicht m als veränderlich vorausgesetzt wird.

50°	60°	70°	80°	90°	100°	137°	198°	258°	$T\frac{\partial p}{\partial t} - p$
1,185	*1,221*	*1,258*	*1,295*	*1,332*	*1,369*	*1,506*	*1,733*	*1,945*	0,11
43,7	43,8	43,7	43,7	43,7	43,7	43,7	43,6	43,7	
40,9	*42,8*	*44,7*	*46,6*	*48,5*	*50,5*	*57,0*	*68,0*	*78,5*	22
47,1	46,1	46,4	46,1	45,9	45,5	45,1	44,4	44	
54,5	*57,6*	*60,6*	*63,5*	*66,5*	*69,5*	*80*	*97*	*112*	43
48,2	47,7	47,2	46,9	46,5	46,1	45,3	44,8	44,2	
63,8	*67,8*	*71,8*	*75,7*	*79,6*	*83,6*	*97,5*	*120*	*140*	64
48,9	48,3	47,8	47,4	46,9	46,5	45,5	44,4	44,1	
74,5	*80,2*	*85,8*	*91,3*	*96,7*	*102,3*	*121,5*	*153,5*	*181*	105
49,8	49,1	48,4	47,9	47,4	46,9	45,7	44,2	43,9	
84,8	*98,8*	*100,6*	*108,2*	*116*	*123,8*	*151*	*195*	*234,5*	168
50,5	49,7	49,0	48,4	47,8	47,3	45,9	44,4	43,8	
94,7	*106,2*	*117,5*	*128,8*	*140,2*	*151,3*	*191*	*257*	*316*	271
50,9	50,1	49,4	48,7	48,1	47,6	46,1	44,3	43,6	
104,8	*121,9*	*138,9*	*156,3*	*173,5*	*191,1*	*252,5*	*356*	*449,5*	450
51,2	50,7	50,0	49,3	48,7	48,1	46,6	44,6	43,4	
125,3	*153,8*	*183,2*	*211,5*	*240,5*	*271*	*376*	*554,5*	—	804
51,5	51,2	50,4	49,8	49,1	48,4	46,7	44,4	—	
201	*250,5*	*298*	*346,9*	*394,5*	*443,5*	*619*	*909*	—	1324
55,0	53,9	53,1	52,3	51,9	50,9	48,9	46,5	—	
560	*651*	*745*	*832*	*918*	*998*	—	—	—	2254
62,2	61,0	59,8	58,9	58,2	57,6	—	—	—	
856,5	*953,5*	—	—	—	—	—	—	—	2614
68,4	67,6	—	—	—	—	—	—	—	
—	—	—	—	—	—	—	—	—	2828
—	—	—	—	—	—	—	—	—	
—	—	—	—	—	—	—	—	—	2956
—	—	—	—	—	—	—	—	—	
273000	281452	289904	298356	306808	315260	346532	398089	448801	

In der fünften bis achtzehnten vertikalen Reihe der obigen Tabelle sind bei verschiedenen Temperaturen in Kursivdruck die Drucke p in Atmosphären gegeben, welche den in der zweiten Vertikalreihe gegebenen Volumen v (eines Kilogrammes in Kubikmetern entsprechen.[1])

---

[1] Die Werte von v sind nicht von **Amagat** direkt gegeben. Er gibt die in der ersten Vertikalreihe gegebenen Verhältnisse der Volumen zum Normalvolumen, d. h. zum Volumen eines Kilogramms bei Atmosphärendruck und 0° C. Die Ziffern der zweiten Vertikalreihe sind aus den Ziffern der ersten erhalten durch Multiplikation mit der Größe $\frac{273 \times 845,2}{10333 \times 44} = 0,50885$ (das Molekulargewicht der Kohlensäure ist 44).

Es möge vorausgesetzt werden, daß bei 258° C die Dissoziation der Kohlensäure schon vollständig beendigt ist. Wir wollen nun für die Koeffizienten der Grundgleichung a und b solche Werte wählen:

1. daß bei der Temperatur 258° und bei allen Volumen die Größe m ungefähr den Wert 44 des Kohlensäuregases erhält.

2. daß bei dem großen Volumen $v = 0{,}50885$ cbm die Größe m auch den Wert 44 bei allen Temperaturen erhält.

Dabei müssen aber die folgenden Gesichtspunkte nicht aus den Augen gelassen werden:

a) die Größe b muß ungefähr einem Drittel des kritischen Volumens der Kohlensäure gleich sein,

b) es muß sein:

$$\frac{a}{v^2} < T\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v - p.$$

Die Größen von $T\frac{\partial p}{\partial t} - p$ sind auch von **Amagat** gegeben und in der letzten Vertikalreihe der Tabelle angeführt. Wenn wir hieraus a berechnen, so erhalten wir, daß a zwischen den Werten $\frac{13}{10333}$ und $\frac{33}{10333}$ liegt.

Ich habe angenommen, daß:

$$b = 0{,}00078 \text{ cbm.}; \quad a = \frac{13}{10333} = 0{,}00126\,.$$

Dann erhält die Grundgleichung die folgende Gestalt:

$$10\,333\left(p + \frac{0{,}00126}{v^2}\right)(v - 0{,}00078) = \frac{845{,}2}{m}\,T\,.$$

Aus dieser Gleichung sind die Größen m berechnet; in der Tabelle stehen sie in Gradschrift unter den Drucken. Bei Betrachtung der Tabelle sehen wir, daß die Veränderung des Molekulargewichtes genau so geschieht, wie nötig ist im Falle der Richtigkeit der Assoziationshypothese: bei konstantem Volumen wächst das Molekulargewicht (also die Assoziation), wenn Druck und Temperatur fallen; bei konstanter Temperatur wächst das Molekulargewicht und die Assoziation bei Verminderung des Volumens.

Die Möglichkeit einer die Assoziationshypothese befriedigenden Wahl der Größen a und b beweist natürlich nicht, daß die Assoziationshypothese unstreitig richtig ist. Es ist ja auch möglich, die Koeffizienten a und b so zu wählen, daß m in allen Kolumnen der Tabelle ziemlich konstant gleich 44 bleibt.

Jedoch zeigt die von mir berechnete Tabelle jedenfalls, daß die Assoziationshypothese der Wirklichkeit durchaus nicht widerspricht.

Andere normale und nicht normale Substanzen geben ungefähr dasselbe Bild wie die Kohlensäure.

Der allgemeinste Ausdruck für den inneren Druck (Kohäsionsdruck) kann in folgender Weise gefunden werden.

Es ist:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(T\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v dt = \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v dt + T\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}dt.$$

Die Integration dieser Gleichung von $T = 0$ bis $T = T$ ergibt, da $T\frac{\partial p}{\partial t}$ bei 0° gleich Null ist:

$$T\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v = p - p_0 + \int_0^T T\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}dt.$$

Hier ist p der Druck, welcher auf die Einheit der Oberfläche wirken muß, damit die Substanz bei gegebenem v und T im Gleichgewicht ist. Also ist p_0 der äußere Druck, welcher wirken muß, damit die Substanz bei dem früheren Volumen v und der Temperatur $T = 0$ im Gleichgewicht bleibt. Der Druck p_0 muß negativ sein, da sonst bei T_0 die Substanz ein kleineres Volumen einnehmen würde, als bei T. Dieser negative Druck ist im Gleichgewicht mit den Kohäsionskräften der Substanz bei dem Volumen v. Also ist $-p_0 = z$ und $p - p_0 = p + z$ ist die Summe des äußeren Druckes p und des Kohäsionsdruckes $-p_0 = z$, welcher die Kohäsionskräfte vertreten kann. Also ist:

$$-p_0 = z = T\frac{\partial p}{\partial t} - p - \int_0^T T\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}dt.$$

Wenn die Substanz der Gleichung von E. und U. Dühring genügt, so ist:

$$(p + z)(v - b) = HnT.$$

Wir erhalten:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v = \frac{H}{v-b}\left(T\frac{\partial n}{\partial t} + n\right); \quad \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{H}{v-b}\left(T\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} + 2\frac{\partial n}{\partial t}\right).$$

Also:

$$\int_0^T T\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,dt = \frac{H}{v-b}\int_0^T\left(T^2\frac{\partial^2 n}{\partial t^2} + 2\,T\frac{\partial n}{\partial t}\right)dt = \frac{H}{v-b}\,T^2\frac{\partial n}{\partial t}$$

und, wie schon von E. und U. Dühring gefunden:

$$z = T\frac{\partial p}{\partial t} - p - \frac{HT^2}{v-b}\,\frac{\partial n}{\partial t}.$$

Die betrachteten Beziehungen können auch graphisch dargestellt werden.

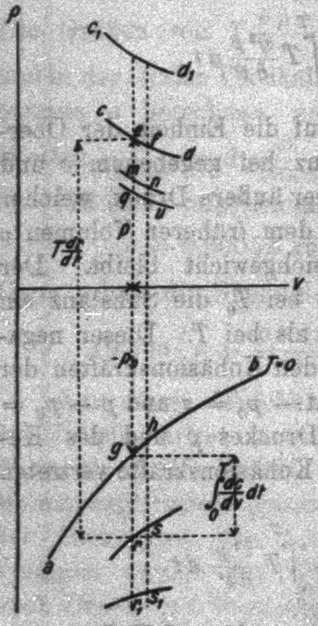


Fig. 1.

Auf der Zeichnung Fig. 1 ist *cd* die Isotherme einer beliebigen Substanz bei der Temperatur *T*. Die Ordinaten der Isotherme bei $T = 0$ sind gleich $-p_0$, liegen also unter der Abszissenachse und ergeben auf der Zeichnung die Kurve *ab* als Isotherme des absoluten Nullpunktes.

Betrachten wir nun den unendlich kleinen Kreisprozeß, welcher durch die zwei Isohoren *eg* und *fh* und die zwei unendlich kleinen Strecken *ef* und *gh* der zwei Isothermen *cd* und *ab* gebildet ist.

Auf der Strecke *ef* wird die Wärmemenge $l\,dv = AT\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v dv$ zugeführt; auf der Strecke *gh* der Isotherme des absoluten Nullpunktes wird Wärme weder zu-, noch abgeführt. Die Differenz der Wärmemengen, welche auf der Isohore *eg* zugeführt und auf der Isohore *fg* abgeführt werden, ist:

$$-\,dv\int_0^T\left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_t dt.$$

Bei Anwendung des ersten Hauptsatzes ergibt also der Kreisprozeß *efgh*, da die Länge $eg = p + (-p_0) = p - p_0$ ist:

$$l\,dv - dv\int_0^T \frac{\partial c_v}{\partial v}\,dt = A(p - p_0)\,dv.$$

Es ist aber auch:

$$-p_0 = z;\quad \left(\frac{\partial c_v}{\partial v}\right)_t = AT\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}.$$

Daher erhalten wir

$$l\,dv = A\,p\,dv + A\,z\,dv + A\,dv\int_0^T T\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,dt.$$

Die latente Wärme

$$l\,dv = AT\frac{\partial p}{\partial t}\,dv$$

bei isothermer Expansion wird also verwandelt:

1. in die äußere Arbeit $A\,p\,dv$,
2. in die Arbeit $A\,z\,dv$ gegen die Kohäsionskräfte zwischen den Molekeln,
3. in die Arbeit $A\,dv\int_0^T T\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,dt$ zur Spaltung der assoziierten Molekeln in einzelne Molekel.

Aus der Zeichnung Fig. 1 ersieht man folgendes:

Wenn aus verschiedenen Punkten der Isotherme cd die Größen $T\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v$ abgetragen werden, so erhält man die Kurve rs; die volle latente Expansionswärme $l\,dv$ wird durch die Fläche $efsr$ dargestellt.

Diese Expansionswärme bewirkt:

1. die äußere Arbeit $p \times ef$,
2. die Arbeit $z \times hg$ gegen die Kohäsionskräfte,
3. die Dissoziationsarbeit $ghsr$.

Auf derselben Zeichnung Fig. 1 ist eine zweite Isotherme $c_1\,d_1$ eingezeichnet, welche einer anderen Temperatur T_1 entspricht. Wenn aus verschiedenen Punkten dieser Isotherme die Größen $T_1\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v$ abgetragen werden, so erhält man eine neue Kurve $r_1\,s_1$. Dagegen behält natürlich die Isotherme ab des absoluten Nullpunktes ihre frühere Lage. Die Dissoziationsarbeit ist jetzt gleich der Fläche $g\,h\,s_1\,r_1$.

Amagat hat auf Grund umfangreicher Versuche die Größen $T\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v - p$ für Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff und Luft bei verschiedenen Volumen v bestimmt und gefunden:

1. daß für die drei letzten Gase die Größe $T\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v - p$ bei Verringerung des Volumens erst wächst (für Sauerstoff bis 1293 Atm., für Stickstoff bis 513 Atm. und für Luft bis 489 Atm.) und darauf fällt,

2. daß für Wasserstoff die Größe $T\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v - p$ bei Verringerung des Volumens nur bis 16 Atm. wächst, bei einem gewissen Volumen gleich Null wird und bei weiterer Verringerung des Volumens negative Werte erhält, welche bis $-$ 578 Atm. abfallen.

Amagat meinte[1]) daß die Größe $T\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v - p$ der Kohäsionsdruck sei; die negativen Werte des Kohäsionsdruckes für Wasserstoff erklärt Amagat durch eine Reaktion der zusammengedrückten Molekels bei geringen Volumen.

Jedoch ist eine solche Erklärung durchaus unnötig, da der Kohäsionsdruck, wie oben gezeigt, nicht gleich ist $T\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v - p$, sondern

$$z = T\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v - p - \int_0^T T\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}\,d\,t.$$

Die negativen Werte der Größe $T\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v - p$ finden folgende Erklärung:

Bei Vergrößerung des Volumens findet (bei sehr kleinen Volumen) nicht Dissoziation, sondern Assoziation der Moleküle des Wasserstoffes statt. Es wird also Assoziationswärme frei; diese Wärme zusammen mit der latenten Expansionswärme $T\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v d\,v$ bewirkt die äußere Arbeit $A\,p\,d\,v$ und die zur Überwindung der Kohäsionskräfte nötige Arbeit $A\,z\,d\,v$. Dabei ist die Assoziationswärme so groß, daß auf der Isotherme bei Ex-

---

1) E. H. Amagat, Compt. rend. 118. S. 326. 1894.

pansion nur sehr geringe Wärmemengen $AT\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v dv$ zuzuführen sind, so daß sogar die Differenz $AT\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_v - p$ negativ ausfällt.

Bei größeren Volumen des Wasserstoffes wird diese Größe wieder positiv.

Sauerstoff, Stickstoff und Luft dissoziieren bei Expansion, und nur bei sehr kleinen Volumen scheint die Expansion von Assoziation begleitet zu sein.

(Eingegangen 14. September 1928.)

11. *Übernahme von photometrischen Registrierungen durch die Physikalisch-Technische Reichsanstalt.*

Photographisch-photometrische Registrierungen, wie sie von dem Physikalischen Institut der Universität Hamburg gemäß der Mitteilung[1]) vom Dezember 1921 vorgenommen werden, führt nunmehr, soweit das Übersetzungsverhältnis 1 : 1 in Frage kommt, die Physikalisch-Technische Reichsanstalt aus. Der hierfür durch das Entgegenkommen der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft der Reichsanstalt zur Verfügung gestellte Komparator[2]) ist der gleiche, wie er in der genannten Mitteilung unter Nr. 2 beschrieben ist; er dient für die Photometrie von Röntgenspektrogrammen, Absorptionsspektren von Farbstoffen usw.

Die Prüfungsgebühren für eingesandte Platten oder sonstige Objekte werden vorläufig nach der zu der Arbeit verbrauchten Zeit berechnet.

Die Ausführung von mikrophotometrischen Registrierungen mit dem Übersetzungsverhältnis 1 : 8 und 1 : 47 [vgl. a. a. O.[1])] erfolgt *nicht* in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt, sondern kann nach näherer Vereinbarung bis auf weiteres im Physikalischen Institut der Universität Hamburg ausgeführt werden.

Charlottenburg, Hamburg, im Oktober 1923.

Der Präsident der Physikal.-Technisch. Reichsanstalt Nernst.	Der Direktor des Physikal. Instituts der Universität Hamburg P. P. Koch.

---

[1]) Zeitschr. f. Phys. 8. 1922; Ann. d. Phys. 66. S. 497. 1921; Phys. Zeitschr. 23. S. 105. 1922; Zeitschr. f. techn. Phys. 4. S. 41. 1923; Zeitschr. f. wiss. Photogr. 22. S. 120. 1923; Zeitschr. f. Elektrochemie 28. S. 151. 1922; Zeitschr. f. physikal. Chemie 101. S. 323. 1922.

[2]) F. Goos, Phys. Zeitschr. 22. S. 648. 1921.

(Eingegangen 12. November 1923.)

12. *Über eine neue Methode zur Messung von Drahtwiderständen bei sehr schnellen Schwingungen;*

von Günter Wuckel.

(Jenaer Dissertation.)

I. Einleitung.

Für das Studium der Eigenschaften ferromagnetischer Materialien ist die Frage nach der Frequenzabhängigkeit der Permeabilität μ bei sehr schnellen Schwingungen von grundlegender Bedeutung. Diesbezügliche experimentelle Untersuchungen an Drähten speziell im Gebiet sehr kurzer Wellen sind bereits von **Gans** und **Loyarte**[1]) einerseits, von **Arkadiew**[2]) und **Kartschagin**[3]) andererseits ausgeführt worden. In allen drei Arbeiten wurde die Permeabilität ermittelt aus der Widerstandserhöhung infolge der Stromverdrängung (Skineffekt); es kam also darauf an, eine Methode zur genauen Messung des Widerstandes bei sehr hohen Frequenzen auszuarbeiten.

Die beiden erstgenannten Forscher führten diese Widerstandsbestimmung auf die Messung des logarithmischen Dekrementes eines Schwingungskreises zurück: Auf zwei parallelen, an beiden Enden durch Kupferbrücken geschlossenen Drähten, die einmal aus Kupfer, dann aus dem Ferromagnetikum bestanden, wurden stehende elektrische Wellen erzeugt. Durch Verschieben der einen Kupferbrücke konnte beidemal eine Resonanzkurve aufgenommen und so die Differenz zwischen dem Dekrement des ferromagnetischen Schwingungskreises δ_{Fe} und dem des Kupferkreises δ_{Cu} ermittelt werden. Infolge der genau gleichartigen Anordnung und Dimensionierung der beiden Schwingungskreise kann diese Differenz $\delta_{Fe} - \delta_{Cu}$ im wesentlichen nur durch den verschiedenen Widerstand der beiden Drahtsorten bedingt sein; vom Kupferkreis ist der Widerstand aber berechenbar, infolgedessen derjenige vom Ferromagnetikum und damit die gesuchte Permeabilität aus der Messung bestimmt.

---

[1]) R. Gans u. Loyarte, Ann. d. Phys. 64. S. 209.

[2]) W. Arkadiew, Ann. d. Phys. 58. S. 105. 1919.

[3]) W. Kartschagin, Ann. d. Phys. 67. S. 325. 1922.

Als Nachteil bezeichneten Gans und Loyarte selbst den Umstand, daß mit abnehmender Wellenlänge sich δ_{Fe} den Werten von δ_{Cu} beträchtlich nähert; so nimmt die zur Auswertung benutzte Differenz $\delta_{Fe} - \delta_{Cu}$ immer kleinere Werte an, und die Methode verliert mit wachsender Frequenz an Genauigkeit. Außerdem sind die angestrebten gleichen Verhältnisse in beiden Schwingungskreisen nie vollständig erreichbar, da gerade durch den verschiedenen Widerstand und die verschiedene Permeabilität der Drähte im ferromagnetischen Schwingungskreis eine etwas andere Stromverteilung hervorgerufen wird wie im Kupferkreis.

Einen anderen Weg schlugen Arkadiew und Kartschagin ein: Aus Messungen der Intensitätsabnahme elektrischer Wellen an zwei parallelen Drähten bestimmten sie den Absorptionsindex $\varkappa$, der durch eine einfache Beziehung mit dem Wechselstromwiderstand der Drähte zusammenhängt und so zur Berechnung der Permeabilität dienen kann. Um das Abklingen der Intensität messen zu können, ist es aber erforderlich, daß sich auf dem verwendeten Drahtsystem keine stehenden Wellen, sondern nur fortlaufende ausbilden können; es dürfen also am Leitungsende keine Reflexionen auftreten. Arkadiew und Kartschagin suchten das dadurch zu erreichen, daß sie ihre Messungen nur in größerer Entfernung vom Leitungsende ausführten, wo die rücklaufenden Wellen bereits fast ganz abgeklungen waren; sie mußten sich jedoch trotz Verwendung eines recht langen Drahtsystems (bis 63 m) auf die Untersuchung sehr dünner Drähte beschränken, weil nur dann infolge der starken räumlichen Dämpfung der Wellen die Reflexionen am Ende genügend gering wurden, um wenigstens in einem gewissen Bereiche des Drahtsystems die Absorptionsmessungen ausführen zu können.

Auf Vorschlag von Hrn. Prof. Busch versuchte ich nun, diese Methode dadurch zu verbessern und zu vereinfachen, daß die Wellenreflexion am Ende der Paralleldrähte zwangsweise durch einen passend gewählten, an die Leitung angeschlossenen Widerstand verhindert wurde, der die ankommenden Wellen vollkommen absorbiert. Für Messungen an Niederfrequenzleitungen ist dieser Weg bereits beschritten worden[1]); die Kabeltheorie zeigt, daß zur Reflexionsvermeidung ein Widerstand von der Größe der „Charakteristik“ $\mathfrak{Z}$, einer durch die Daten der Leitung gegebenen Konstanten, erforderlich ist. Es liegt aber kein Grund vor, die Resultate der Kabeltheorie nicht auch auf Hochfrequenzleitungen anzuwenden, da jene Berechnungen nur voraussetzen, daß der Drahtabstand klein im Verhältnis zur Wellenlänge ist.

So kann uns also die Kabeltheorie, von der wir im folgenden ausgehen, ein Wegweiser für die Ausarbeitung einer Methode zur Bestimmung von Wechselstromwiderständen werden, die von den Beschränkungen der **Arkadiew**schen frei ist.

II. Problemstellung.

Ist ein **Lecher**sches Drahtsystem mit einer Quelle sinusförmigen Wechselstromes von der Frequenz ω verbunden, so gelten für die Verteilung der Spannung V und des Stromes J längs der Drähte die bekannten Kabelgleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial V}{\partial x} = J(R + j\omega L) \\[2mm] -\dfrac{\partial J}{\partial x} = V(A + j\omega K), \end{cases}$$

wenn R den Leitungswiderstand, L die Selbstinduktion, K die Kapazität und A die Ableitung pro Zentimeter Doppelleitung darstellen; x ist die Längenkoordinate. Durch Einführung der Größen

$$(2)\qquad \gamma^2 = (R + j\omega L)(A + j\omega K)$$

und

$$(3)\qquad \mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega K}}$$

kann die Lösung der Differentialgleichungen (1) geschrieben werden:

$$(4)\qquad \begin{cases} J = a_1 e^{\gamma x} + a_2 e^{-\gamma x} \\ V = \mathfrak{Z}(-a_1 e^{\gamma x} + a_2 e^{-\gamma x}). \end{cases}$$

---

[1] K. **W. Wagner**, E. T. Z., S. 383. 1919.

Herrscht am Anfang der Leitung eine Stromstärke J_0, und setzen wir das Drahtsystem als unendlich lang voraus, so bestimmen sich die Konstanten a_1 und a_2 zu:

$$a_1 = 0; \qquad a_2 = J_0 .$$

Die Gleichungen (4) reduzieren sich demnach auf:

$$\begin{cases} J = J_0 e^{-\gamma x} \\ V = \mathfrak{Z} J_0 e^{-\gamma x}; \end{cases} \tag{5}$$

oder es besteht längs der ganzen Leitung zwischen Strom und Spannung die Beziehung:

$$\frac{V}{J} = \mathfrak{Z} = \text{const.}. \tag{6}$$

Der Wellenwiderstand V/J eines unendlich langen Paralleldrahtsystems ist also gleich $\mathfrak{Z}$, der „Charakteristik“ der Leitung.

Schließt man demnach eine Doppelleitung von endlicher Länge durch einen Widerstand von der Größe $\mathfrak{Z}$, so muß sie sich genau wie eine unendlich lange Leitung verhalten, d. h. es wird die Strom- und Spannungsverteilung den Gleichungen (5) gehorchen. Schreibt man schließlich noch die „Fortpflanzungskonstante“ γ in der Form:

$$\gamma = \beta + j\alpha, \tag{7}$$

so ergibt sich für den Momentanwert von J und V:

$$\begin{cases} \mathfrak{J} = J_0 e^{-\beta x} e^{j\omega\left(t - \frac{\alpha}{\omega} x\right)} . \\ \mathfrak{V} = \mathfrak{Z} J_0 e^{-\beta x} e^{j\omega\left(t - \frac{\alpha}{\omega} x\right)} ; \end{cases} \tag{8}$$

d. h. es entstehen auf dem Lechersystem fortschreitende Wellen, deren Amplituden nach einem Exponentialgesetz abnehmen. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen ist $\frac{\omega}{\alpha}$.

Die Größen α und β berechnen sich aus den Gleichungen (7) und (2) und lassen sich noch vereinfachen, wenn berücksichtigt wird, daß für eine Freileitung stets die Ableitung A gleich 0 gesetzt werden darf. Arbeitet man außerdem mit Wechselströmen so hoher Frequenz, daß man das Quadrat von $\frac{R}{\omega L}$ gegen 1 vernachlässigen kann, so läßt sich (2) in Annäherung schreiben:

$$\gamma = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{K}{L}} + j\omega\sqrt{LK} = \beta + j\alpha . \tag{9}$$

Die räumliche Dämpfung der Wellen wird also durch den „Dämpfungsfaktor“

$$\beta = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{K}{L}} \tag{10}$$

bestimmt, und es folgt, daß Strom und Spannung auf einer Strecke $x_0 = \frac{1}{\beta}$, d. h. auf einer solchen Leitungslänge, für die der Ohmsche Widerstand R *eines* Drahtes gleich der Charakteristik $\sqrt{\frac{K}{L}}$ der völlig verlustlosen Leitung ist, bis zum e-ten Teil ihres Anfangswertes herabsinken.

Auf Grund dieser Folgerungen aus der Kabeltheorie muß es demnach möglich sein, auf einem Lecherschen Drahtsystem nach richtiger Wahl und Anordnung eines Endwiderstandes $\mathfrak{Z}$ das Abklingen der Energie messend zu verfolgen, also den Dämpfungsfaktor β direkt zu bestimmen. Aus den Messungen von β kann dann der Leitungswiderstand R für die betreffende Frequenz, außerdem bei magnetischem Material mit Hilfe der Rayleighschen Formeln für den Skineffekt[1]) die Permeabilität μ berechnet werden.

Die Ausarbeitung einer geeigneten Meßmethode von β für hochfrequente ungedämpfte Schwingungen auf Grund vorstehender Überlegungen bildete das Ziel dieser Arbeit.

III. Die Apparatur.

a) Der Sender.

Für die geplanten Untersuchungen war ein Sender nötig, der ungedämpfte Schwingungen von möglichst hoher Frequenz und großer Konstanz der Wellenlänge lieferte. Als geeignet erwies sich die Ecclessche Schaltung in der von Holborn[2]) angegebenen Form: Zwei Senderöhren (AEG Type RS5) sind in der aus Fig. 1 ersichtlichen Weise geschaltet. Den Anoden- und Gitterkreis bilden rechteckig gebogene, posaunenartig ausziehbare Messingrohre, in deren Mitten die Gleichspannungen zugeführt werden. So sind Selbstinduktion und Kapazität des Schwingungskreises auf ein Minimum herabgedrückt, und es gelingt, mit dieser Anordnung Schwingungen von 3,5—6 m Wellenlänge zu erzeugen, wenn an der Anode eine Spannung von 400—600 Volt liegt und das Gitter eine Vorspannung von etwa 15 Volt gegenüber der Kathode erhält. Diese Spannungen lieferten Hochspannungsbatterien. — Die erforderliche Heizbatterie von 24 Volt mußte einen sehr konstanten Strom liefern. Bevor mir geeignete Akkumulatoren zur Verfügung standen, verwendete ich eine Gleichstrommaschine, die bei 64 Volt Klemmenspannung eine Stromentnahme von 4 A. gestattete. Die Schwankungen des mit Stadtspannung gespeisten Antriebmotors ließen sich gut beseitigen durch Anwendung einer von Hrn. Prof. Busch angegebenen Kompensationsschaltung, wie sie Fig. 2 zeigt: Der Erregerspannung ist ein Teil der Stadtspannung entgegengeschaltet, so daß bei richtiger Einstellung des Abzweigpunktes *A* ein rascheres Laufen des Motors durch eine entsprechende Verringerung der Erregung gerade ausgeglichen wird. Schwankungen der Stadtspannung von 10% hatten so nur eine Änderung der Klemmenspannung um 0,6% zur Folge. Besonders leicht und sicher ließ sich der Punkt *A* einregulieren bei Verwendung von Fremderregung (die Hausbatterie des Institutes konnte hierzu benutzt werden); auch ein Nachregulieren war dann selbst bei großen Störungen nie nötig. Die letzten geringen Schwankungen der Klemmenspannung fanden einen guten Ausgleich durch eine aus alten Akkumulatoren bestehende Pufferbatterie und durch Einschalten mehrerer Eisenwiderstände in den Heizkreis.

---

[1]) Lord Rayleigh, Phil. Mag. 21. 1886; J. Zenneck, Ann. d. Phys. 11. S. 1135. 1903.

[2]) F. Holborn, Zeitschr. f. Phys. 6. S. 328. 1921.

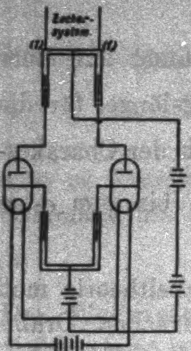


Fig. 1.

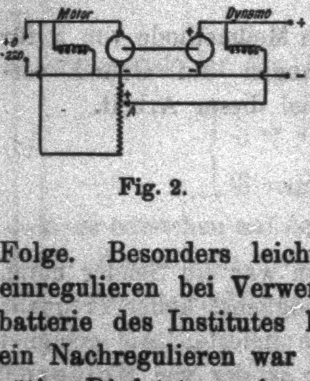


Fig. 2.

Ein Vorzug dieses Senders besteht in der geringen Abhängigkeit der Wellenlänge λ vom Heizstrom; steigert man letzteren von 2,5 bis 3 A., also von der Stromstärke, bei der die Schwingungen einsetzen, bis zur zulässigen Grenze, so wächst λ nur um 1,5 %. Von der Anodenspannung ist die Wellenlänge praktisch unabhängig.

b) Das Lechersystem.

Um ein genügend starkes Abklingen der Energie für die Messungen zu erhalten, mußte die Länge der verwendeten Doppelleitung groß sein; daher fand das Lechersystem seinen Platz in dem 25 m langen Korridor des Kellergeschosses vom Physikalischen Institut. Zwischen zwei eingemauerten Balken waren die Drähte $^1/_2$ m unterhalb der Decke ausgespannt; zur Befestigung und Isolierung an beiden Enden diente paraffinierte Schnur. Zwei Spannvorrichtungen ließen die Drähte so straff anziehen, daß ihre Durchbiegung nur gering war und sich eine Unterstützung in der Mitte erübrigte. Auch ein überall gleichmäßiger Drahtabstand war so gewahrt.

Dieses Lechersystem hatte ich direkt mit dem Anodenkreis des Senders verbunden; es war in den Punkten (1) (1) (vgl. Fig. 1), also in einem Spannungsknoten, an die Messingholme angelötet. Eine solche Koppelung erwies sich deshalb als zweckmäßig, weil der Sender infolge seiner starken Strahlung (die Wellen konnten noch im nächsten Stockwerk aufgefangen werden) zur Vermeidung von Störungen mit sämtlichen Batterien in einen völlig geschlossenen Zinkblechkasten gesetzt werden mußte. Gerade in jenem Spannungsknoten traten die Lecherdrähte durch eine Öffnung aus dem Kasten, so daß letzterer die Wellenausbildung auf dem Drahtsystem nicht beeinflussen konnte.

c) Die Empfangsanordnung.

Für die Ausarbeitung der Meßmethode war von vornherein ein Gesichtspunkt maßgebend: Es durfte durch den Empfänger nur soviel Energie dem Lechersystem entzogen werden, daß an der betreffenden Stelle der Doppelleitung keine merkliche Reflexion der Wellen auftrat. So kam nur ein ganz lose mit den Lecherdrähten gekoppelter, sehr empfindlicher Indikator in Frage.

Diesen Anforderungen genügte ein Thermoelement aus 0,015 mm starkem Manganin- und Konstantandraht, das unter gleichzeitiger, 1 Stunde lang währender Erwärmung in einem Heizofen auf 350° C mittels einer Diffusionspumpe bis zu

$1 \cdot 10^{-5}$ mm Hg ausgepumpt wurde. Um eine möglichst geringe Beeinflussung des Galvanometerkreises durch den Heizkreis zu erreichen, wurde das Thermoelement folgendermaßen konstruiert: Die 4 Zuführungsdrähte lagen nicht wie gewöhnlich in *einem* Glasfüßchen nebeneinander, sondern die Galvanometerzuleitungen traten auf der entgegengesetzten Seite aus dem Glasgehäuse, so daß auf ihnen vom Heizkreis aus keine merklichen Wechselströme induziert werden konnten. Diese Form bewährte sich gut. Der innere Widerstand der Thermoelemente betrug im Durchschnitt 8 bis 10 Ω, eine Empfindlichkeit von etwa $1 \cdot 10^{-3}$ Volt bei 10 Milliamp. Belastung wurde erreicht.

An den Heizkreis des Thermoelementes angeschlossen war eine 10 cm lange Drahtschleife, die in einem Abstand von 5 cm unterhalb der Lecherdrähte hing und so eine ganz schwache induktive Koppelung mit diesen bildete. Thermoelement samt Koppelschleife waren an dem Drahtsystem selbst mittels eines starren Glasschlittens (vgl. Fig. 3) aufgehängt, der eine stets konstante Koppelung gewährleistete und zugleich eine bequeme Entlangführung des Indikators an den Drähten gestattete.

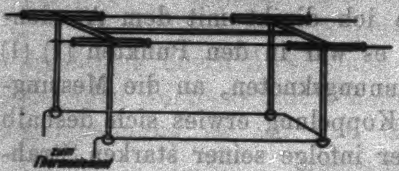


Fig. 3.

So konnte der anfangs gestellten Bedingung hinreichend entsprochen werden: der im Thermoelement induzierte Strom genügte, um im Galvanometer gut meßbare Ausschläge zu erzeugen, während andererseits die Rückwirkung so gering war, daß die Wellenausbildung auf dem Lechersystem nicht wesentlich beeinflußt wurde. Zur Kontrolle einer solchen Beeinflussung war am Anfang der Doppelleitung ein festliegendes Thermoelement II angebracht, das zu einem Spiegelgalvanometer mit Lichtzeigerablesung führte. Wurde der oben beschriebene bewegliche Indikator längs der Drähte verschoben, so trat in Intervallen von $\lambda/4$ eine Änderung des vom Thermoelement II hervorgerufenen Ausschlages um 3—4 % ein, was offenbar seinen Grund in kleinen Reflexionen am Thermoelement I hatte. Mehr verringert werden konnte diese Rückwirkung des Indikators I nicht, wenn noch meßbare Energien in ihn gelangen sollten. Beim Arbeiten mit geringeren Sendeenergien war ein Koppelabstand von 3 cm angängig.

Der im ganzen Raum sichtbare, vom festliegenden Thermoelement II bewirkte Lichtzeigerausschlag diente zugleich als Kontrolle für die Konstanz der Sendeenergie während der Messungen.

Einen schwierigen Punkt bildete das für den beweglichen Indikator zu verwendende Galvanometer. Anfangs wurde das Thermoelement mit einem Spiegelgalvanometer verbunden. Diese Anordnung bewährte sich indessen nicht, da die Galvanometerzuleitung mit dem Thermoelement verschoben werden mußte; sobald sich aber die Lage der Leitung änderte, trat im Galvanometerausschlag eine Abweichung vom ursprünglichen Wert ein. Einschalten von Drosselspulen und Einhüllen der Litze in einen geerdeten Metallmantel nützten gar nichts; selbst der oben erwähnte elektrostatische Schutz des Senders durch einen allseitig geschlossenen Blechkasten beseitigte diese Störungen nur unvollkommen.

Eine günstige Lösung fand diese Frage erst, als dem Institut von der Firma Zeiss in freundlicher Weise eins ihrer neuen Schleifengalvanometer[1]) zur Verfügung gestellt wurde. Der wesentliche Vorteil dieses Instrumentes besteht darin, daß es trotz seiner Empfindlichkeit, die bei einem inneren Widerstand von $6\,\Omega$ $3 \cdot 10^{-7}$ A. pro Teilstrich der im Okular angebrachten Skala beträgt und durch Anwendung stärkerer Vergrößerungen bis zu $7{,}5 \cdot 10^{-9}$ A. pro Skalenteil gesteigert werden kann, ohne Anwendung irgendwelcher Vorsichtsmaßregeln transportabel ist. So ließ sich dieses Instrument ohne Schwierigkeiten mit dem Thermoelement an dem Lechersystem entlang führen. Es wurde zu diesem Zweck auf einen kleinen fahrbaren Tisch gesetzt, mit dem durch eine Holzleiste das Thermoelement starr verbunden war; während der Messungen konnte sich also nichts an dieser Empfangsanordnung verändern, was zu Störungen hätte Anlaß geben können. An ihrem unteren Ende trug die Holzleiste eine Marke, die an einem auf dem

---

[1]) **R. Mechau**, Phys. Zeitschr. **24**. S. 242. 1923. — Es sei mir auch an dieser Stelle gestattet, der Firma **Zeiss** für ihr freundliches Entgegenkommen zu danken.

Fußboden liegenden Bandmaß die jeweilige Stellung des Thermoelementes bis auf $^1/_2$ cm genau anzeigte.

Wie wenig diese ganze Meßeinrichtung die Wellenausbildung auf den Lecherdrähten störte, ist oben bereits erwähnt worden. Nunmehr konnte die experimentelle Untersuchung des zur Reflexionsvermeidung am Ende der Leitung nötigen Widerstandes begonnen werden.

IV. Der Endwiderstand.

Der kompexe Widerstand $\mathfrak{Z}$, durch den das Lechersystem am Ende geschlossen werden soll, um die Bildung von stehenden Wellen zu vermeiden, hat nach Gl. (3) die Größe:

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega K}}.$$

Wie schon erwähnt, ist A stets gleich 0 und außerdem für alle bei den Messungen benutzten Drahtsorten $R < \omega L$, so daß für $\mathfrak{Z}$ die Annäherung gilt:

$$\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{L}{K}}\left(1 - j\,\frac{R}{2\omega L}\right). \tag{11}$$

Das ist aber der Operator eines Widerstandes $\sqrt{\frac{L}{K}}$, dem eine kleine Kapazität

$$C' = \frac{R}{2\omega^2 L}\sqrt{\frac{K}{L}}\ \text{c.g.s.} = \frac{\lambda^2 R}{8\pi^2 L}\sqrt{\frac{K}{L}}\ \text{cm} \tag{12}$$

parallel geschaltet ist.

C' ist verschwindend klein; für 0,5 mm starken Konstantandraht beträgt z. B. der Wert von C' nur 0,0425 cm bei einer Wellenlänge von 450 cm. So lag es nahe, die gestellte Aufgabe dadurch zu lösen, daß man C' ganz unberücksichtigt ließ und an das Ende des Lechersystems einen reinen Ohmschen Widerstand von der Größe $\sqrt{\frac{L}{K}}$ anlötete; 400—500 Ω kamen in Betracht je nach der Drahtsorte.

Versuche mit einem Elektrolytwiderstand aus $CuSO_4$-Lösung führten so zu einem teilweisen Erfolg. Fig. 4a zeigt den Intensitätsverlauf längs zweier am Ende offener Konstantandrähte von 0,5 mm Durchmesser; bei Aufnahme der Kurve 4b ist das Drahtsystem durch den berechneten $CuSO_4$-Widerstand von 533 Ω geschlossen gewesen. Die wiedergegebene Kurve ist die glatteste, die durch Variieren des Endwiderstandes und der Versuchsanordnung zu erhalten war. Man sieht, wie die Wellenreflexion am Ende des Drahtsystems beträchtlich verringert ist. Daß sie sich nicht vollkommen beseitigen ließ, mag daran liegen, daß der Flüssigkeitswiderstand selbst eine gewisse Kapazität besitzt, die bei der Kürze der benutzten Wellen nicht unberücksichtigt bleiben darf.

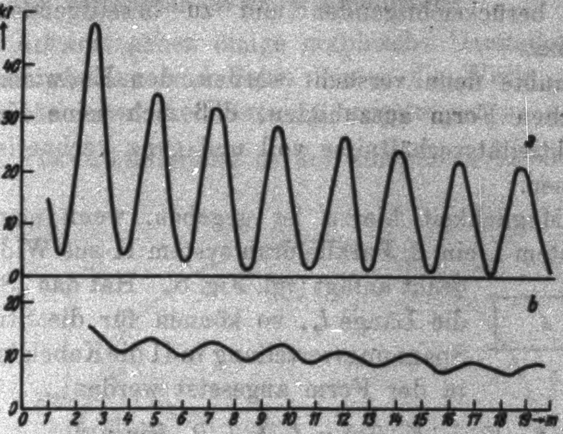


Fig. 4.

Ein anderer Weg schien durch Benutzung eines dünnen, möglichst skineffektfreien Widerstandsdrahtes gegeben; ich arbeitete mit 0,05 mm starkem Manganindraht. Doch der Erfolg blieb bei dieser Methode lange Zeit gänzlich aus. Sorgfältigstes Abgleichen des Widerstandes, Variieren seines Wertes in weitesten Grenzen, Versuche mit einem selbstinduktions- und kapazitätsfrei gewickeltem Draht, geradliniges und zickzackförmiges Ausspannen des ungefähr 2 m langen Manganindrahtes — nichts führte zum Ziel. Der Grund dafür konnte nur darin zu suchen sein, daß auch hier selbst ganz geringe Kapazitäts- und Selbstinduktionswirkungen den Wert des Endwiderstandes beträchtlich beeinflußten, ohne daß es jedoch möglich gewesen wäre, experimentell solche Beeinflussungen auszuschalten. Es wurde z. B. der Widerstandsdraht absichtlich so gewickelt, daß er möglichst viel Selbstinduktion besaß und die unerwünschten Kapazitätswirkungen infolgedessen überwogen werden mußten; ein parallel geschalteter, variabler Kondensator sollte dann die überflüssige Selbstinduktion wieder ausgleichen. Das Resultat blieb auch bei diesen Versuchen negativ. Die Schwierigkeit liegt eben darin, daß zwei Komponenten des Widerstandes, sein reeller und imaginärer Teil auf einen vorgeschriebenen Wert eingestellt werden müssen, was auf empirischem Wege wohl nur möglich ist, wenn man durch Rechnung schon Anhaltspunkte über die Größenordnung der dabei zu berücksichtigenden und zu beseitigenden Nebeneinflüsse hat.

So mußte denn versucht werden, den Endwiderstand in einer solchen Form auszubilden, daß sich seine Kapazitäts- und Induktivitätsverhältnisse voll und ganz rechnerisch übersehen lassen.

Die Möglichkeit hierzu ist gegeben, wenn man an das Lechersystem I ein 2. Paralleldrahtsystem II aus Widerstandsdraht anfügt (vgl. Fig. 5). Hat das „System“ II die Länge l_2, so können für die Strom- und Spannungsverteilung in II die Kabelgleichungen in der Form angesetzt werden:

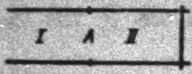


Fig. 5.

$$\left\{\begin{aligned} V_{a_2} &= V_{e_2}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma_2 l_2 + J_{e}\,\mathfrak{Z}_2\,\mathfrak{Sin}\,\gamma_2 l_2 \\ J_{a_2} &= J_{e_2}\,\mathfrak{Cof}\,\gamma_2 l_2 + \frac{V_{e_2}}{\mathfrak{Z}_2}\,\mathfrak{Sin}\,\gamma_2 l_2, \end{aligned}\right. \tag{13}$$

wenn der Index *a* die Werte am Anfang, *e* die am Ende der Leitung II bezeichnet. γ_2 ist analog wie früher die Fortpflanzungskonstante, $\mathfrak{Z}_2$ die Charakteristik von II. Schließt man System II am Ende durch eine widerstandslose Brücke kurz, so wird

$$V_{e_2} = 0,$$

und durch Division der Gleichungen (13) ergibt sich:

$$\frac{V_{a_2}}{J_{a_2}} = \mathfrak{Z}_2\,\mathfrak{Tg}\,\gamma_2 l_2. \tag{14}$$

Dieser Ausdruck stellt den Scheinwiderstand des Systems II im Punkte *A* dar; er muß gleich $\mathfrak{Z}$ sein, wenn das Widerstandssystem seinen Zweck erfüllen soll.

Um die Bedingungen hierfür festzustellen, lösen wir in (14) die Funktion $\mathfrak{Tg}$ des komplexen Argumentes $\gamma_2 l_2$ auf; dabei ist nach (7)

$$\gamma_2 = \beta_2 + j\alpha_2$$

zu setzen, und wir erhalten:

$$\frac{V_{a_2}}{J_{a_2}} = \mathfrak{Z}_2 \frac{\mathfrak{Sin}\, 2\beta_2 l_2 + j\, 2 \sin 2\alpha_2 l_2}{\mathfrak{Cof}\, 2\beta_2 l_2 + 2 \cos 2\alpha_2 l_2} = x + jy\,. \tag{15}$$

Zwei Größen in dieser Gleichung können bei gegebener Drahtsorte variiert werden: l_2 und der Abstand d_2 der Drähte; die letzte Größe beeinflußt L_2 und K_2, ist also in β_2 und α_2 enthalten. Es fragt sich nun: Kann $\frac{V_{a_2}}{J_{a_2}}$ durch Verändern von l_2 oder d_2 den verlangten Wert $\mathfrak{Z}$ annehmen?

Die Antwort geben einige graphische Darstellungen. Auf der Abszissenachse sind dabei immer die Werte von x, auf der Ordinatenachse die Werte jy aufgetragen, so daß wir für $\frac{V_{a_2}}{J_{a_2}}$ eine Vektordarstellung in der komplexen Ebene erhalten.

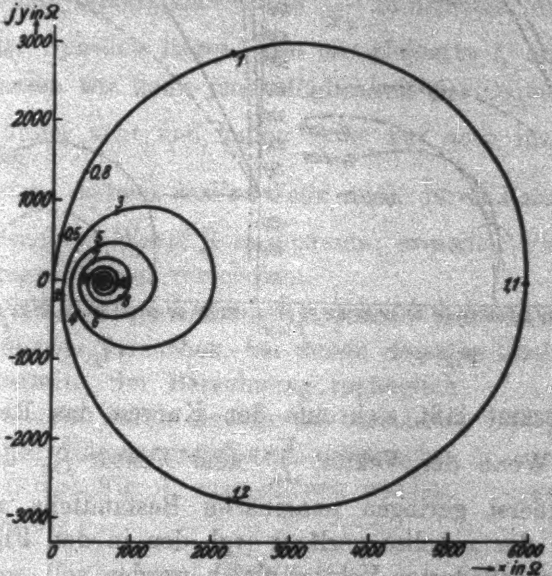


Fig. 6.

Fig. 6 zeigt zunächst für 0,1 mm starken Konstantandraht den gesamten Verlauf des Widerstandswertes $\frac{V_{a_2}}{J_{a_2}}$, wenn der Drahtabstand $d_2 = 1$ cm ist und l_2 variiert wird; als Frequenz ist $\lambda = 450$ cm gewählt. Die beigeschriebenen Zahlen geben das für den betreffenden Kurvenpunkt geltende l_2 in m an. Hiernach nähert sich mit wachsender Länge l_2 der Scheinwiderstand spiralenförmig einem Grenzwert, nämlich der Größe $\mathfrak{Z}_2$, die für die unendlich lange Leitung nach Gl. (6) den Wellenwiderstand darstellt.

Fig. 7 gibt dieselben Kurven für verschiedene Abstände d_2 wieder; dabei sind nur diejenigen Kurvenstücke gezeichnet, die für Erfüllung der Bedingung $\frac{V_{a_2}}{J_{a_2}} = \mathfrak{Z}$ in Frage kommen.

Schließlich kann noch die Drahtdicke $2\,\varrho_2$ variiert werden; entsprechende Kurven finden sich in Fig. 8.

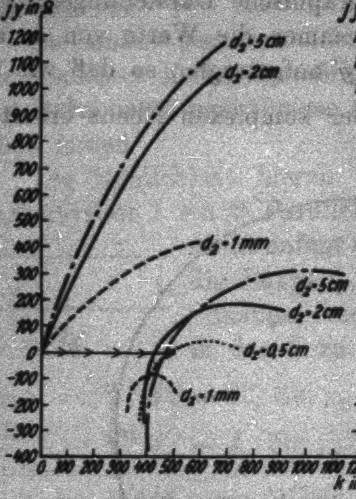


Fig. 7.

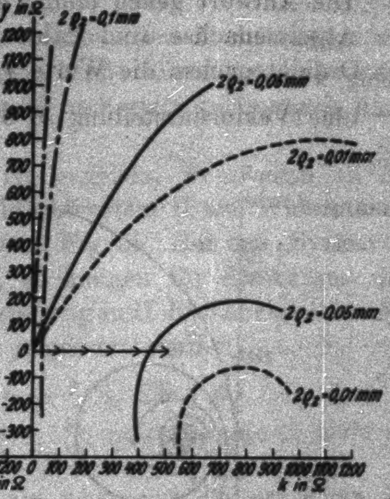


Fig. 8.

Insgesamt läßt sich aus den Kurven das Resultat gewinnen: Wenn der Vektor $\frac{V_{a_2}}{J_{a_2}}$ dem Vektor $\mathfrak{Z}$, der infolge seines äußerst geringen imaginären Bestandteils ganz flach unterhalb der x-Achse verläuft (vgl. den in den Figuren eingetragenen gefiederten Vektor) gleich werden soll, so wird entsprechend den Kurven der Fig. 8 am ehesten die Wahl eines möglichst dünnen Widerstandsdrahtes ($2\,\varrho_2 = 0{,}05$ mm und kleiner) zum Ziele führen. Richtet man dann die Versuchsanordnung so ein, daß d_2 und l_2 zugleich variiert werden können, so muß es, wie Fig. 7 lehrt, in der Tat möglich sein, durch genaue Einstellung von l_2 (ca. 250—300 cm) und d_2 (kleiner 0,5 cm) dem Endwiderstand die verlangte Größe zu geben.

Vom experimentellen Standpunkt aus sprechen jedoch zwei Gründe gegen diese Methode: Einmal findet eine genaue und stetige Veränderung von d_2 deshalb Schwierigkeiten, weil, wie später noch zu besprechen sein wird, es erforderlich ist, daß das Lechersystem I und das Widerstandssystem II stets gleichen Drahtabstand besitzen; mit einer steten Veränderlichkeit von d_2 müßte also auch eine solche von d_1 verbunden sein, was unausführbar ist; denn ein neues d_1 zieht auch stets einen anderen Wert von $\mathfrak{Z}$ nach sich, verändert also gerade die gesuchte Größe.

Außerdem ist es natürlich für die Versuchsanordnung wenig wünschenswert, daß das Widerstandssystem Längen von 2—3 m annehmen müßte; man wird vielmehr bestrebt sein, möglichst mit Widerstandswerten $\frac{V_{a_2}}{J_{a_2}}$ zu arbeiten, die auf dem Anfang der Spiralen liegen, also ein kleineres l_2 erfordern.

So lassen wir denn jene Möglichkeit der Darstellung von $\frac{V_{a_2}}{J_{a_2}} = \mathfrak{Z}$ außer acht und haben es so nur noch in der Hand, $\frac{V_{a_2}}{J_{a_2}}$ höchstens seinem reellen Teile nach durch Verändern von l_2 dem gesuchten Werte $\mathfrak{Z}$ anzupassen; in seiner Phase bleibt es stets gegen diesen verschoben.

Diese Phasenverschiebung ist jedoch jetzt im Gegensatz zu den früheren Versuchen, bei denen derselbe Übelstand den Erfolg vereitelte, der Berechnung zugänglich und kann leicht durch eine genau berechenbare, an der Übergangsstelle A angebrachte Kapazität C (vgl. Fig. 9) ausgeglichen werden.

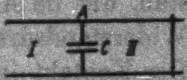


Fig. 9.

Setzen wir

$$\mathfrak{Z} = a + j\,b \tag{16}$$

und wie oben

$$\frac{V_{a_2}}{J_{a_2}} = x + j\,y,$$

so lautet die Bedingungsgleichung dafür, daß das jetzige Widerstandssystem im Punkte A einen Scheinwiderstand von der Größe $\mathfrak{Z} = a + j\,b$ besitzt:

$$\frac{1}{a + j\,b} = j\,\omega\,C + \frac{1}{x + j\,y}\,. \tag{17}$$

Durch Trennung des reellen und imaginären Teiles ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{a}{a^2 + b^2}, \tag{18}$$

$$\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{b}{a^2 + b^2} + \omega\, C. \tag{19}$$

Die Werte x und y sind andererseits bei gegebenem d_2 abhängig vom Parameter l_2, müssen also auf einer der in den Figg. 6—8 dargestellten Kurven

$$f(x, y) = 0 \tag{20}$$

liegen.

Man kann demnach in den Gl. (18) bis (20) C, x und y als die drei Unbekannten auffassen, aus dem Schnitt des Kreises (18), der die y-Achse im Nullpunkt berührt und dessen Mittelpunkt auf der x-Achse liegt, mit der Spirale (20) x und y, also die Länge l_2, ermitteln und schließlich aus (19) den Wert von C berechnen.

So ist in der jetzigen Form unser Endwiderstand der Rechnung vollkommen zugänglich. Die praktische Ausführung fand wenig Schwierigkeiten: Ich lötete den Widerstandsdraht am Ende des Lechersystems I an und spannte ihn in Verlängerung der Lecherdrähte auf einem kleinen Brettchen aus; so war der Abstand d_2 von vornherein festgelegt. Als widerstandslose Brücke am Ende diente ein 5 mm dicker Messingstab, der im Abstande d_2 2 Rillen enthielt, in denen sich der Widerstandsdraht zur Veränderung von l_2 aufwickeln ließ. Der Kontakt in den Rillen erwies sich bei straffem Aufwickeln als vollkommen ausreichend. Der Messingstab war leicht drehbar in einem mit einer Führung versehenen, auf dem Brettchen verschiebbaren Holzklötzchen angebracht. Diese Anordnung ermöglichte ein genaues und bequemes Einstellen bzw. Variieren von l_2.

Um dasselbe auch bei der Kapazität C zu erreichen, wurde ein Funkenmikrometer benutzt, dessen Elektroden durch 2 parallele Platten ersetzt waren. Die Plattengröße betrug 36 qcm, da nur Kapazitäten von etwa 10 cm in Frage kamen. Die Zuleitungen waren möglichst kurz gehalten und ebenfalls direkt am Leitungsende des Lechersystems I angelötet.

Auf diese Weise hatte man es in der Hand, den Endwiderstand durch zwei voneinander unabhängige Einstellungen stetig zu variieren und so seinem imaginären wie seinem reellen Bestandteil die erforderliche Größe zu geben. Wichtig ist es, zwei variable Teile zur Verfügung zu haben; denn man muß von vornherein erwarten, daß das theoretische, idealisierte Widerstandssystem sich beim Experiment nicht ganz streng nachbilden läßt und so nur auf empirischem Wege der richtige Wert des Komplexwiderstandes eingestellt werden kann.

In der Tat gelang es, mit dieser Methode die Reflexion der Wellen am Ende der Lecherdrähte zu vermeiden und eine annähernd glatte Kurve für die Intensitätsabnahme längs der Leitung zu erhalten. Eine an etwa 0,45 mm starkem Konstantandraht für $\lambda = 500$ cm durchgeführte Messung möge als Beispiel die beschriebene Methode zur Bestimmung des erforderlichen Widerstandssystems erläutern und die erreichbare Meßgenauigkeit darlegen:

Die genauen Daten des Lechersystems waren:

Drahtabstand $d = 2$ cm;
Drahtradius $r = 0{,}0228$ cm;

$$\left.\begin{array}{l}\text{Gleichstromwiderstand } R_{Gl} = 5{,}3\ \Omega: \\ \text{Selbstinduktion } L = 1797 \text{ cm}; \\ \text{Kapazität } C = 0{,}631 \cdot 10^{-20} \text{ c. g. s.}\end{array}\right\} \text{für 1 m Doppelleitung.}$$

Aus R_{Gl} ergibt sich nach der Zenneckschen Näherungsformel[1]) $R_w = R_{Gl}\,(0{,}997\,k + 0{,}277)$, in der

$$k = \sqrt{\frac{\omega\,\mu}{R_{Gl} \cdot 10^{-7}}}$$

ist, als Wechselstromwiderstand für 1 m Doppelleitung $R_w = 15{,}3\ \Omega$.

So berechnet sich schließlich die Charakteristik der Leitung, also der erforderliche Endwiderstand in Ω nach Gl. (11) zu: $\mathfrak{Z} = 533{,}9 - j\,5{,}98 = a + j\,b$.

Als Widerstandsdraht für das Lechersystem II wurde 0,05 mm starker Manganindraht verwendet; seine Daten sind für einen Zentimeter Doppelleitung:

$R_{Gl_2} = 4{,}28\ \Omega$; $L_2 = 277$ cm; $C_2 = 0{,}004155 \times 10^{-20}$ c. g. s.

---

1) J. Zenneck, a. a. O.

Hieraus ergibt sich:

$$R_w = 4{,}3\ \Omega;\quad \mathfrak{Z}_2 = 816{,}1 - j\,168;$$
$$\gamma_2 = 0{,}00263 + j\,0{,}0128 = \beta_2 + j\,\alpha_2 .$$

Zur Bestimmung der Gl. (20), also eines Kurvenstückes der Spirale, die den Scheinwiderstand $\frac{V_{a_2}}{J_{a_2}}$ in Abhängigkeit von l_2 darstellt, werden die entsprechenden Zahlen aus obigen Angaben in Gl. (15) eingesetzt, während l_2 der Reihe nach gleich 10, 15, 20, 25 cm gewählt wird. So ergeben sich für $\frac{V_{a_2}}{J_{a_2}}$ die Werte in Ω:

l_2	V_{a_2}/J_{a_2}
10 cm	$48{,}4 + j\ 100$
15 „	$67{,}0 + j\ 151{,}4$
20 „	$90{,}8 + j\ 204{,}6$
25 „	$114{,}8 + j\ 257{,}8$.

Auf Grund dieser Berechnungen ist in Fig. 10 die Kurve I gezeichnet, die also die Gl. (20) $f(x, y) = 0$ darstellt.

Aus dem oben angegebenen $\mathfrak{Z} = 533{,}9 - j\,5{,}98 = a + j\,b$ wird nunmehr mit Hilfe der Gl. (18) der Kreis berechnet, der mit der Spirale (20) zum Schnitt gebracht werden soll. Die Kurve II in Fig. 10 ist das Stück dieses Kreises, das wir hier brauchen. Als Schnittpunkt von I und II, also von (18) und (20), entnehmen wir der Figur:

$$x = 85{,}5\ \Omega;\quad y = 194\ \Omega .$$

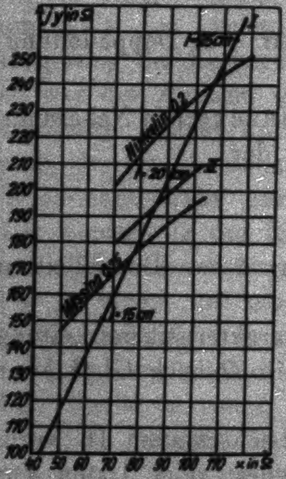


Fig. 10.

Außerdem ergibt die Kurve I zu dem gefundenen Wert von x durch graphische Interpolation sofort die für das Widerstandssystem erforderliche Länge $l_2 = 19$ cm. So kann Fig. 10 für alle Messungen bei $\lambda = 500$ cm benutzt werden; man hat nur immer aus den Daten des zu untersuchenden Lechersystems den Kreis (18) zu berechnen und in das Kurvenblatt einzutragen, um x und l ablesen zu können. In Fig. 10 sind als weitere Beispiele die Kurven II noch für einige andere Drahtsorten angegeben.

Wir haben schließlich noch den Wert der Kapazität C zu bestimmen; er ergibt sich durch Einsetzen der entsprechenden Zahlengrößen in die Gl. (19) zu $C = 10{,}35$ cm; der Plattenabstand d des Kondensators muß hiernach bei einer Plattengröße $S = 36$ qcm 2,77 mm betragen, falls man ihn nach der Formel $C = \frac{S}{4\pi d}$ berechnet.

So ist unser Endwiderstand vollkommen bestimmt.

Mit wie großer Annäherung die bei offenem Drahtsystem wellenförmige Intensitätsverteilung sich bei Benutzung des eben berechneten Widerstandsystemes in eine gleichmäßig abnehmende verwandeln läßt, zeigen die in Fig. 11 wiedergegebenen Messungen, aus denen zugleich hervorgeht, wie genau der Endwiderstand eingestellt werden muß, damit man die gewünschten Resultate erhält. In der ersten Meßreihe hat der Plattenabstand d des Kondensators seinen „günstigsten" Wert $d = 4{,}0$ mm, während die Länge l_2 des Widerstandssystems variiert worden ist; bei den Messungen der 2. Spalte wurde umgekehrt verfahren; wir sehen, daß sich durch die bei $l_2 = 19$ cm und $d = 4$ mm gemessenen Punkte zwanglos eine glatte Kurve legen läßt. Der durchschnittliche Unterschied zwischen einem Maximum und dem darauf folgenden Minimum der gemessenen Intensität, der bei offenem Drahtsystem 95% und bei den Messungen mit einem $CuSO_4$-Widerstand noch 28% betrug (vgl. Fig. 4), ist hier auf 9% reduziert. Man muß jedoch beachten, daß die bei der günstigsten Widerstandseinstellung erhaltenen Kurven nicht mehr eine ausgesprochene Wellenbildung, sondern unregelmäßigere Schwankungen aufweisen; diese können offenbar kaum noch von Reflexionen am Leitungsende herrühren, sondern müssen ihre Ursache in irgendwelchen Störungen haben, die durch die Draht- und Rohrleitungen an der Decke des Versuchsraumes sowie durch Wellen, die sich direkt vom Sender durch die Luft fortpflanzen, bedingt sind. Außerdem sahen wir früher, daß kleine Reflexionen am Indikator infolge seiner Rückwirkung auf das Lechersystem unvermeidlich sind und Schwankungen der Energiewerte von etwa 4% zur Folge haben; auf Rechnung dieses Übelstandes muß auch ein Teil jener im Resultat noch vorhandenen Unregelmäßigkeiten gesetzt werden.

Wenn man alle diese Umstände berücksichtigt, darf wohl gesagt werden, daß der gefundene Endwiderstand tatsächlich die Wellenreflexion am Leitungsende unterbindet, also seinen Zweck erfüllt. Jedenfalls ist es möglich, die Intensitätsabnahme längs der Lecherdrähte als annähernd glatte Kurve, die nur noch Schwankungen von wenig Prozenten aufweist, zu messen.

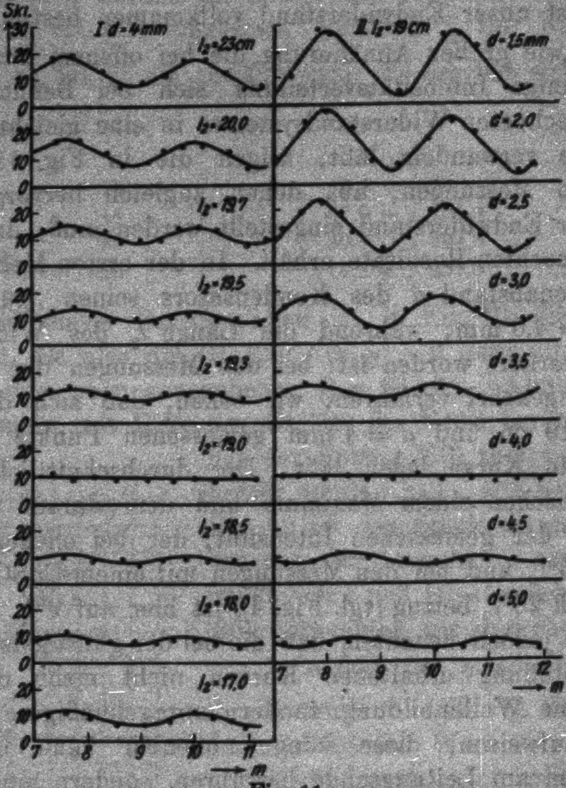


Fig. 11.

Als Voraussetzung für dieses Resultat ist aus den Kurven der Fig. 11 zu entnehmen: Die Länge l_2 des Widerstandssystems muß bis auf 1 mm, d. i. $^1/_2$%, der Plattenabstand d des Kondensators C bis auf $^1/_{10}$ mm oder $2^1/_2$% genau eingestellt werden. Bemerkt sei hierbei, daß die günstigste Länge $l_2 = 19$ cm bei den Messungen der Fig. 11 genau dem theoretischen Wert gleich ist, während dem günstigsten Plattenabstand $d = 4$ mm eine etwa 30% kleinere Kapazität entspricht, als die Rechnung ergeben hatte. Der Grund dieser Abweichung ist wohl in der Kapazität der Zuleitung zu suchen.

Bevor nun diese Ergebnisse zu Widerstandsmessungen verwertet wurden, erschien es zweckmäßig, die gefundene Methode der Reflexionsvermeidung noch unter anderen Versuchsbedingungen auf ihre Brauchbarkeit hin zu prüfen, um so die Grenzen ihrer Anwendungsmöglichkeiten kennen zu lernen.

V. Wirkung des Endwiderstandes unter verschiedenen Versuchsbedingungen.

Es sei an dieser Stelle zunächst kurz ein Versuch erwähnt, der ohne positive Resultate geblieben ist. Die Frage liegt nahe, ob für die Darstellung des Endwiderstandes nicht auch ein am Ende offenes Lechersystem II geeignet ist. Theoretisch muß das allerdings der Fall sein; es ändert sich in den Berechnungen nur die Gl. (14) um in

$$\frac{V_{a_2}}{J_{a_2}} = \mathfrak{Z}_2\,\mathfrak{Ctg}\,\gamma_2 l_2\,,$$

und wenn man bei der graphischen Auswertung analog wie früher verfährt, so ergibt sich hier ebenfalls bei Verwendung von 0,05 mm starkem Manganindraht für das Widerstandssystem ein Schnittpunkt des Kreises (18) mit den aus der obigen Gleichung zu berechnenden Kurven $f(x, y) = 0$; d. h. die Darstellung von $\mathfrak{Z}$ muß auf die hier behandelte Art möglich sein. Experimentell war jedoch mit dieser Methode kein Erfolg zu erzielen, was vielleicht daran liegen mag, daß gerade in dem am offenen Leitungsende vorhandenen Spannungsbauch leicht durch die Umgebung, insbesondere durch die Spannschnüre kapazitive Beeinflussungen entstehen können.

Bei einer systematischen Untersuchung des im vorigen Abschnitte ausgearbeiteten Widerstandssystems, das sich gut bewährt hatte, mußte man sich zunächst fragen, in welcher Weise der Endwiderstand von der Frequenz abhängig ist. Da aus den oben angestellten Berechnungen der Einfluß des Gliedes ω nicht in übersichtlicher Form abgeleitet werden kann, wurde auch hier wieder eine graphische Darstellung benutzt: In Fig. 12a ist die berechnete Länge l_2 des Widerstandssystems, in Fig. 12b die erforderliche Kapazität C als

Funktion von λ gezeichnet. Diese Kurven gelten für Manganindraht von 0,05 mm Durchmesser. Aus ihnen ist eine beträchtliche Abhängigkeit der Daten des Widerstandsystems von der Frequenz ersichtlich; es muß daher bei den Messungen auf eine große Konstanz der benutzten Wellenlänge geachtet werden.

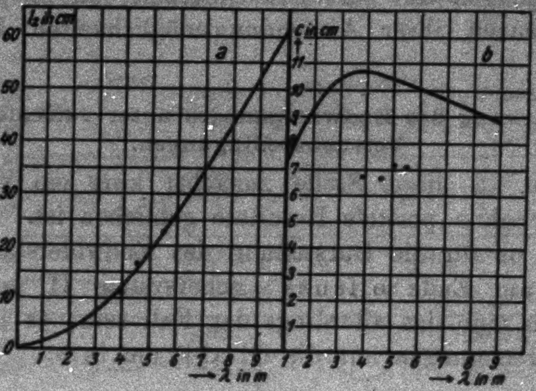


Fig. 12.

Bei der experimentellen Prüfung ergab sich eine gute Übereinstimmung mit den Berechnungen: Die in Fig. 12a eingetragenen Punkte geben die Längen l_2 an, bei denen für die betreffende Frequenz die Wellenreflexion durch den Widerstand beseitigt werden konnte; die dabei nötigen Kapazitäten C sind der Fig. 12b zu entnehmen. Wieder zeigt sich, daß beim Experiment immer die Kapazität C um einen konstanten Betrag kleiner sein muß als die berechnete, während das erforderliche l_2 genau mit dem theoretischen Wert übereinstimmt. Die Genauigkeit, mit der der Widerstand bei diesen Versuchen die Reflexion der Wellen verhinderte, war für alle untersuchten Frequenzen ungefähr die gleiche, so daß gesagt werden kann: Die im vorigen Abschnitt ausgearbeitete Form des Endwiderstandes entspricht mindestens in dem Wellenlängenbereich von 3 – 6 m den gestellten Anforderungen.

Eine andere Reihe von Versuchen sollte klarlegen, ob der Drahtabstand d_2 des Widerstandssystems einen Einfluß auf die Wirkungsweise des Endwiderstandes hat. Bisher war das zweite Lechersystem stets genau in Verlängerung des ersten ausgespannt, besaß also auch denselben Drahtabstand wie dieses. Theoretisch scheint das nicht unbedingt erforderlich, wohl aber ergab das Experiment jene Anordnung als die einzig brauchbare. Es gelang nicht, den stetig abnehmenden Kurvenverlauf wie in Fig. 11 zu erhalten, wenn d_2 kleiner als der Abstand d_1 beim ersten Lechersystem gewählt wurde; für $d_2 = 1$ cm und $d_1 = 2$ cm betrugen z. B. die geringsten Unterschiede zwischen Energiemaximum und folgendem Minimum etwa 30%; noch wesentlich schlechtere Resultate ergab die Wahl d_2 größer d_1. Es tritt in diesen Fällen eben offenbar eine teilweise Reflexion der Wellen an der Übergangsstelle von System I zu System II auf, die nicht zu beseitigen ist; selbst wenn der Abstand d_1 allmählich in d_2 übergeführt wurde, war der Erfolg nicht besser.

Ein wesentlicher Punkt ist schließlich die Wahl des Widerstandsdrahtes selbst. Daß der Einfluß des Drahtdurchmessers kein geringer ist, war nach den Kurven der Fig. 8 zu erwarten und wurde vom Experiment auch bestätigt. Versuche mit 0,2 und 0,1 mm starkem Konstantandraht scheiterten, und erst bei Verwendung von Manganindraht, $\Phi = 0{,}05$ mm, ließen sich die mitgeteilten Resultate erzielen. Weshalb sich die genannten Konstantandrähte als ungeeignet erwiesen, erklärt Fig. 13: I und II stellen bzw. für den Konstantandraht von 0,2 mm und 0,1 mm Durchmesser Stücke der Spiralen (20) $f(x, y) = 0$ bei einem Drahtabstand von 2 cm dar; die angeschriebenen Zahlen bedeuten die Längen l_2 für die betreffenden Punkte in Zentimeter. Zum Vergleich ist in III die entsprechende Kurve des 0,05 mm starken Manganindrahtes gezeichnet. Die Figur zeigt, daß I und II gerade eben noch mit dem Kreis zum Schnitt gelangen, daß wir uns also bereits an der Grenze der Anwendungsmöglichkeit unserer Methode befinden. Außerdem

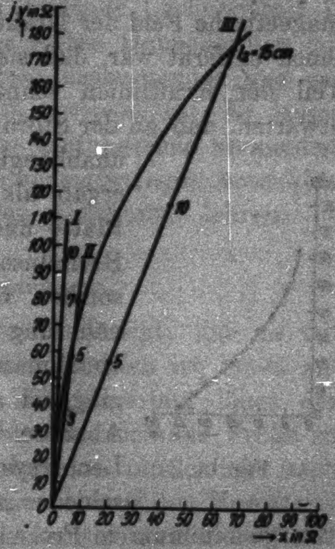


Fig. 13.

muß beachtet werden, daß die Benutzung stärkerer Widerstandsdrähte größere Kapazitäten C zur Folge hat; bei den Versuchen mit Konstantandraht war z. B. ein etwa 5 mal so großes C erforderlich wie bei denen mit Manganindraht. Es ist aber nicht ausgeschlossen, daß die Verwendung größerer Kondensatorplatten eine Beeinflussung des Lechersystems zur Folge hat und so Anlaß zu Störungen gibt.

Man hat demnach bei der Ausarbeitung des Endwiderstandes auf eine ganze Reihe wichtiger Punkte zu achten. Von Interesse ist es schließlich noch, zu untersuchen, ob die Anordnung des Lechersystems selbst zu Wellenreflexionen Veranlassung geben kann, bzw. inwieweit benachbarte Gegenstände sich störend bemerkbar machen. Zweierlei Versuche galten der Entscheidung dieser Frage:

Als erster Versuch wurde über dem Drahtsystem in einigen Metern Entfernung von seinem Ende eine 0,5 × 1,5 m große Kupferplatte horizontal aufgehängt. Diese durfte das elektromagnetische Feld der Drähte nicht stören, wenn sie soweit von ihnen entfernt war, daß sie nur einen verschwindend geringen Teil der Kraftlinien schneiden konnte. Andernfalls war zu erwarten, daß an der Störungsstelle Reflexionen auftraten, ganz unabhängig vom Endwiderstand. Die Messung ergab als den geringsten Abstand zwischen Platte und Drähten, bei dem keine merkliche Beeinflussung mehr vorhanden war, einen solchen von 25 cm. Wie bei weiterer Annäherung der Platte die vorher stetige Energieabnahme allmählich in eine wellenförmige überging, ist aus Fig. 14 zu ersehen, in der als Abszisse die Abstände a der Platte vom Lechersystem, als Ordinate die Unterschiede Δ zwischen Energiemaximum und Energieminimum in Prozenten aufgetragen sind; vernachlässigt wurden hierbei die geringen unregelmäßigen Schwankungen im Intensitätsverlauf, die bereits an Hand der Fig. 11 diskutiert worden sind. Ein stark störender Einfluß der Wände des Versuchsraumes und insbesondere der an der Decke entlang laufenden Drähte und Rohrleitungen war also bei der be-

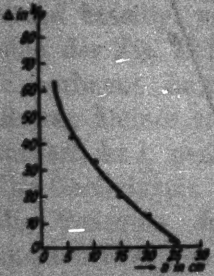


Fig. 14.

nutzten Anordnung (das Lechersystem befand sich $^1/_2$ m unterhalb der Decke) nicht gut möglich.

Anders lag jedoch der Fall, wenn man — das war der zweite Versuch — den Abstand d_1 der Lecherdrähte, der bisher 2 cm betrug, vergrößerte. Es zeigte sich, daß bei einem Drahtabstand von 3 cm noch keine merkliche Änderung in den für $d_1 = 2$ cm erhaltenen Resultaten auftrat; dagegen hatte bereits eine gegenseitige Entfernung $d_1 = 5$ cm der Drähte eine wellenförmige Schwankung der Energiewerte um etwa 15% zur Folge, die sich durch Regulieren am Endwiderstand nicht verringern ließen. Es sind diese Reflexionen wohl sicher auf Rechnung der Umgebung des Lechersystems zu setzen.

Zusammenfassend lassen sich also folgende Richtlinien für eine richtige Anordnung der Apparatur gewinnen:

Der Drahtabstand des Lechersystems darf 3 cm möglichst nicht überschreiten, wenn ein störender Einfluß von Gegenständen in etwa 30 cm Umgebung der Drähte ausgeschaltet sein soll. Das den Endwiderstand bildende Lechersystem II ist als unmittelbare Fortsetzung der ersten Doppelleitung mit dem gleichen Drahtabstand wie diese auszuspannen und aus möglichst dünnem Widerstandsdraht herzustellen. Es lassen sich dann die Wellenreflexionen am Leitungsende vermeiden. Inwieweit diese Methode zu Widerstandsmessungen brauchbar ist, sollen die Beispiele des folgenden Abschnittes lehren.

VI. Widerstandsmessungen.

Die vorigen Kapitel haben bereits gezeigt, daß es mit Hilfe des angegebenen Endwiderstandes möglich ist, einen annähernd gleichmäßig abnehmenden Energieverlauf längs der Lecherdrähte zu erzielen. So bleibt nur noch die Frage zu erörtern übrig, ob die Intensitätsabnahme tatsächlich nach einem Exponentialgesetz erfolgt, und wie sich aus den Messungen der Absorptionsindex $\varkappa$ bzw. der Wechselstromwiderstand der Drähte ermitteln läßt.

Es ist daher in Fig. 15a zunächst eine für Konstantandraht von 0,5 mm Durchmesser bei einer Wellenlänge von 458 cm erhaltene Meßreihe durch die eingetragenen Punkte wiedergegeben und zum Vergleich damit der für diesen Draht theoretisch sich ergebende Intensitätsverlauf durch die ausgezogene Kurve dargestellt.

Der theoretischen Berechnung des Intensitätsverlaufes lag dabei die Formel für die Abnahme der Stromamplitude längs der Drähte

$$J = J_0 e^{-\beta(x - x_0)} \tag{21}$$

zugrunde, in der J die Stromamplitude im Punkte x, J_0 die Stromstärke am Anfang x_0 der Leitung bedeutet. Da durch das Thermoelement Galvanometerausschläge hervorgerufen werden, die proportional dem Quadrat der Stromamplitude sind, so müssen wir statt (21) die Gl.

$$A = A_0 e^{-\varkappa(x - x_0)} \tag{22}$$

benutzen, wenn mit A der der Stromamplitude J, mit A_0 der dem Strom J_0 entsprechende Galvanometerausschlag bezeichnet wird. Der Absorptionsindex $\varkappa$ ist demnach gleich 2β und hat, wie aus Gl. (10) folgt, die Größe

$$\varkappa = R\sqrt{\frac{K}{L}}\,. \tag{23}$$

K und L sind durch die Formeln

$$K = \frac{\varepsilon}{4c^2 \ln \frac{d}{r}} \qquad \text{bzw.} \qquad L = 4 \ln \frac{d}{r} + L_i$$

aus den gegebenen Daten des Drahtes berechenbar; dabei ist L_i der Teil der Selbstinduktion, der vom Feld im Drahtinnern herrührt u. mit Hilfe der Zenneckschen Näherungsformel

$$L_i = \frac{R}{\omega}\,(1{,}007\,k - 0{,}04)\ ^{1)}$$

berechenbar ist. Speziell in unserem Beispiel ist

$$K = 0{,}631 \cdot 10^{-20}\ \text{c. g. s.}; \qquad L = 1797\ \text{cm}.$$

Für R wurde der mit Hilfe der schon früher erwähnten Formel

$$R_w = R_{Gl}\,(0{,}997\,k + 0{,}277)$$

aus dem gemessenen Gleichstromwiderstand $R_{Gl} = 5{,}17\ \Omega$ ermittelte Wert $R_w = 15{,}98\ \Omega$ eingesetzt und so $\varkappa$ berechnet zu $\varkappa = 0{,}000299$.

---

1) J. Zenneck, a. a. O.

Die Übereinstimmung zwischen den gemessenen und berechneten Werten ist gut; es würde sich ohne Mühe in Fig. 15 a durch die gemessenen Punkte eine glatte Kurve legen lassen, die von der theoretischen nur wenig abweicht. Prinzipielle Fehler können demnach wohl kaum noch in der Methode enthalten sein.

Um nun umgekehrt aus den einzelnen beobachteten Ausschlägen A_1, A_2 ... mit Hilfe der Gl. (22) $\varkappa$ zu ermitteln, wendet man zweckmäßig die Methode der kleinsten Quadrate

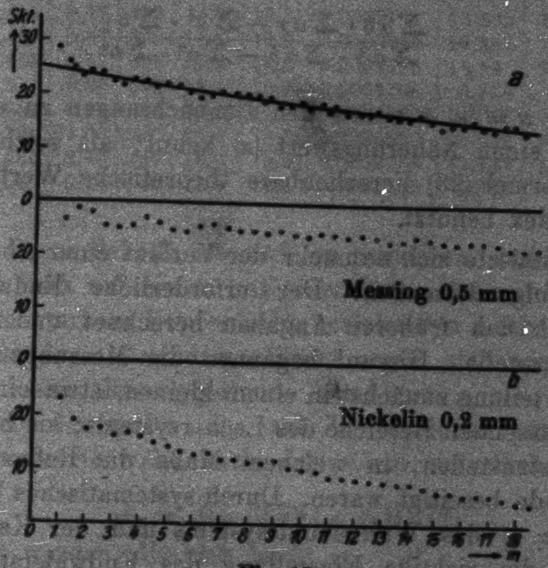


Fig. 15.

an, und zwar kommt das im „Lehrbuch der prakt. Phys." von Kohlrausch (12. Aufl.) auf S. 16ff. angegebene Verfahren mittels eingeführter Näherungswerte in Frage; denn die Anwendung der Methode der kleinen Quadrate unmittelbar auf Gl. (22) führt zu Gleichungen, die nicht direkt auflösbar sind.

Wir führen analoge Bezeichnungen ein, wie sie Kohlrausch benutzt:

Nach Gl. (22) ist

$$A = A_0 e^{-\varkappa(x - x_0)} = f(A_0, \varkappa, x).$$

Die Näherungswerte seien mit $\{A_0\}$ und $\{\varkappa\}$ bezeichnet, so daß

$$A = \{A_0\} + \delta, \qquad \varkappa = \{\varkappa\} + \varepsilon$$

ist. Ferner sei:

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial A_0}\right\} = a; \qquad \left\{\frac{\partial f}{\partial \varkappa}\right\} = b;$$

$\{A\}$ der Wert von A, der durch Einsetzen von $\{A_0\}$ statt A_0 und $\{\varkappa\}$ statt $\varkappa$ in Gl. (22) entsteht;

$$r = A - \{A\}.$$

Damit ergibt sich für das Korrektionsglied ε der Wert

$$\varepsilon = \frac{\sum ab \cdot \sum ar - \sum a^2 \cdot \sum br}{\sum ab \cdot \sum ab - \sum a^2 \cdot \sum b^2}. \tag{24}$$

So ist $\varkappa = \{\varkappa\} + \varepsilon$ aus den Beobachtungen zu ermitteln, wenn man einen Näherungswert $\{\varkappa\}$ kennt; als solcher wurde der aus Formel (23) berechenbare theoretische Wert des Absorptionsindex benutzt.

So gestaltete sich nunmehr der Verlauf einer Absorptionsmessung folgendermaßen: Der erforderliche Endwiderstand wurde nach den früheren Angaben berechnet und möglichst genau eingestellt. Hierauf begannen die Messungen der Intensitätsverteilung zunächst in einem kleinen, etwa eine Wellenlänge umfassenden Bereiche des Lechersystems; sie hatten den Zweck, festzustellen, in welchem Maße die Reflexionen am Leitungsende beseitigt waren. Durch systematisches Verändern der Länge l_2 des Widerstandssystems und der Kapazität C wurde so die richtige Einstellung des Endwiderstandes ermittelt, bei der die Intensitätsschwankungen auf das erreichbare Minimum herabgedrückt waren. Nach diesen etwas mühseligen Vorbereitungen konnte die Messung längs der ganzen Lecherdrähte beginnen; gewöhnlich wurde in Abständen von je 50 cm eine Beobachtung ausgeführt. Zwei Beispiele für die so erhaltenen Meßreihen zeigt noch Fig. 15b.

Für die Auswertung erwies es sich als nötig, die im Bereiche der ersten 3 m des Lechersystems gemachten Beobachtungen nicht mit zu verwenden, weil hier noch eine direkte Beeinflussung des Thermoelements vom Sender aus stattfand, die sich in den Messungen durch zu große Werte bemerkbar machte; vgl. Fig. 15a.

So standen für die Bestimmung von $\varkappa$ immer ungefähr 35 Beobachtungen zur Verfügung; aus ihnen wurde $\varkappa$ auf die angegebene Art berechnet.

Die gewonnenen Ergebnisse aus Messungen an verschiedenartigen, unmagnetischen Drahtsorten sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

Material	Φ in mm	R_{Gl} pro m	λ in cm	l_1 in cm	C in cm	$\varkappa$ gem.	R_w aus $\varkappa$ ber.	R_w nach Zenneck ber.	Diff.	Diff in %
Konstantan	0,455	5,17	458	15,15	10,57	0,0002971	15,835	15,98	−0,14	−0,91
"	0,455	5,17	389	11,8	10,7	0,0003255	17,347	17,22	+0,13	+0,74
"	0,455	5,17	553	22,5	10,2	0,0002723	14,54	14,67	−0,13	−0,89
Messing	0,51	0,88	505	19,1	10,29	0,0001108	5,856	5,97	−0,11	−1,92
"	0,685	0,40	500	17,45	11,31	0,00008406	4,018	4,00	+0,02	+0,45
Nickelin	0,19	24,00	503	23,4	8,36	0,0005599	36,242	36,12	+0,12	+0,34
Neusilber	0,485	2,80	449	19,0	9,27	0,0002166	11,547	11,58	−0,03	−0,37
"	1,01	0,74	508	16,3	12,24	0,0001195	5,328	5,43	−0,10	−1,87

Zu dieser Tabelle ist noch zu bemerken, daß die Wellenlängen λ stets auf einem auf einer festen Bank ausgespannten, aus 2 mm starkem Kupferdraht bestehenden Lechersystem gemessen wurden. Auf diese Weise ergibt sich annähernd der für den leeren Raum geltende Wert von λ. — Die Widerstandswerte der Spalte „R_w nach Zenneck ber.“ sind aus den Gleichstromwerten R_{Gl} nach der schon mehrfach erwähnten Formel

$$R_w = R_{Gl}\,(0{,}997\,\varkappa + 0{,}277)$$

berechnet worden, die sich leicht in

$$R_w = 13{,}688 \sqrt{\frac{\mu R_{Gl}}{\lambda_m}} + 0{,}277\,R_{Gl}$$

umformen läßt. Sie ist jedoch entsprechend der Angabe von Zenneck nur für $\varkappa = 1{,}5 \ldots 10$ verwendbar; für andere Werte von $\varkappa$ kann der Faktor von R_{Gl} aus den graphischen Darstellungen in der Zenneckschen Arbeit entnommen werden. Auf diese Weise mußte in den obigen Messungen bei dem Nickelindraht ($\varkappa = 1{,}25$) verfahren werden.

Die angeführten Messungen zeigen: Der angegebene Endwiderstand verhindert die Reflexion der Wellen am Leitungsende in genügendem Maße, um das Abklingen der Intensität längs des Lechersystems messend verfolgen und aus diesen

Messungen R_w bis auf mindestens 0,15 Ω/m, d. i. je nach Drahtsorte auf 1—2$^0/_0$, genau ermitteln zu können.

Ferner ist ersichtlich, daß durch die hier ausgearbeitete Methode eine Untersuchung dünner wie dicker Drähte mit gleicher Genauigkeit durchführbar ist, daß also tatsächlich Beschränkungen, wie sie bei der eingangs erwähnten Arkadiewschen Methode vorhanden waren, hier nicht in Betracht kommen.

Zusammenfassung.

1. Es wurde eine Methode zur Messung von Wechselstromwiderständen bei sehr hohen Frequenzen (Wellenlängen von einigen Metern) ausgearbeitet; als Grundlage dieser Methode diente das Ergebnis der Kabeltheorie, daß auf einem Lecherschen Drahtsystem das Abklingen der Wellenintensität in einfacher Weise von ihrem Widerstand abhängt, wenn die Drähte am Ende durch einen Widerstand von der Größe der Charakteristik $\mathfrak{Z}$ der Leitung geschlossen sind.

2. Die Hauptschwierigkeit bildete die Herstellung des Endwiderstandes; ein einfacher Draht- oder Flüssigkeitswiderstand war nicht brauchbar. Dagegen erwies sich als geeignet ein zweites, am Ende geschlossenes Lechersystem aus Widerstandsdraht mit parallel geschalteter Kapazität. Es wurde ein graphisches Verfahren zur Ermittlung der Drahtlänge dieses zweiten Lechersystems und der Kapazität angegeben und gezeigt, daß die Reflexionen am Ende der Leitung durch dieses Widerstandsystem bis auf wenige Prozent beseitigt werden.

3. Die Methode wurde angewandt zur Messung des Widerstandes von Konstantan-, Messing-, Neusilber- und Nickelindrähten von 0,2—1 mm Durchmesser bei Wellen von 3,9—5,5 m Länge; es ergaben sich die von der Theorie geforderten Werte der Widerstände mit einer Fehlergrenze von ±0,15 Ω/m.

Die vorliegende Arbeit ist am Physikalischen Institut der Universität Jena ausgeführt worden. Es ist mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Geheimrat Prof. Dr. M. Wien für seine freundliche Unterstützung und Förderung der Arbeit, sowie Hrn. Prof. Dr. Busch für die Anregung zu dieser Aufgabe und sein ständiges reges Interesse an dem Fortgang derselben herzlichst zu danken.

(Eingegangen 29. August 1923.)

13. *Zur Photophorese;*
von Otto Halpern.

In der vorliegenden Arbeit[1]) wird zuerst eine kurze Übersicht über die bisherigen Versuche zur Deutung der Photophorese gegeben. Hieran schließt sich die Aufstellung eines allgemeinen thermodynamischen Kriteriums für Radiometerkräfte, aus dem sich Abschätzungen über die Temperatursprünge an Radiometern ergeben. Die Diskussion dieser auftretenden Temperatursprünge führt zu einem Deutungsversuch einer Reihe bisher ungeklärter Schwierigkeiten.

I. Die Bemühungen, die von **Ehrenhaft** entdeckte negative Photophorese[2]) durch strahlungstheoretische Überlegungen zu erklären, haben sich, wie vorauszusehen, gar bald als unmöglich herausgestellt[3]) und damit die Auffassung der Photophorese als negativer Radiometereffekt besonders nahegelegt. Die Arbeiten von **Rubinowicz** und **Laski** und **Zerner** suchen nun dieses Problem durch exakte Rechnung zu lösen.[4])

Der Rechnungsgang ist bei beiden Autoren etwa der folgende: Es wird aus dem gegebenen elektromagnetischen Felde des einfallenden Lichtstrahles die Absorption im Innern der Kugel als Funktion des Ortes bestimmt, die Wärmeleitungsgleichung für die hierdurch gegebenen Quellen und eine bestimmte Randwertbedingung integriert und schließlich die auftretende Radiometerkraft durch einen gaskinetischen Ansatz mit den Temperaturerhöhungen an der Kugeloberfläche in Verbindung gebracht. Der elektromagnetische Teil der Rechnung ist in beiden Arbeiten prinzipiell der gleiche. Sie unterscheiden sich in physikalischer Hinsicht lediglich in der Randbedingung des Wärmeleitungsproblems und in dem Kraftansatz für die Radiometerkraft. Rubinowicz nämlich setzt unter der Voraussetzung $l >> a$ (a Kugelradius, l freie Weglänge des umgebenden Gases) die Temperatur im Gas an der Kugeloberfläche gleich der im Unendlichen und verwendet für die Radiometerkraft einen von Knudsen aus seinen Versuchen an Platten[1]) abgeleiteten Kraftausdruck. Zerner und Laski hingegen verlegen unter der Voraussetzung $l << a$ nicht den ganzen Temperatursprung in die unmittelbare Umgebung der Kugeloberfläche, sondern nehmen außerdem einen allmählichen Temperaturausgleich im Gase an. Den Ausdruck für die Radiometerkraft gewinnen sie durch Berechnung der Bewegungsgröße, die beim Wärmeausgleich an der Kugeloberfläche und im Gase auf die Kugel übertragen wird. Die Arbeit von Rubinowicz ist bei Atmosphärendruck und der gewöhnlich für Beobachtungen verwendeten Partikelgröße von etwa 10^{-5} cm nur angenähert gültig und beansprucht die Erscheinungen mit abnehmenden Druck immer besser wiederzugeben; hingegen hat die Zerner-Laskische Theorie wegen Bedingung $l << a$ für die Photophorese *keine direkte* Bedeutung. Nichtsdestoweniger wollen wir, wie dies ja auch die Autoren tun, ihre Resultate zur Deutung der photophoretischen Erscheinungen heranziehen und sie also auf ein Gebiet anwenden, für das sie nicht abgeleitet sind; es wird sich dabei das für das folgende nicht unwesentliche Resultat herausstellen, daß die beiden Theorien zwar numerisch verschiedene Werte ergeben mögen, jedoch für die Abhängigkeit vom Druck und der chemischen Natur des umgebenden Gases übereinstimmende Resultate liefern.

---

[1]) Die Arbeit erscheint sehr verspätet. Ihr wesentlicher Inhalt wurde bereits im Dezember 1920 in der Wiener Chemisch-physikalischen Gesellschaft vorgetragen, vgl. auch Anz. d. Wiener Akad. der Wissenschaften vom 14. X. 1920.

[2]) F. **Ehrenhaft**, Ann. d. Phys. **56**. S. 81. 1918; I. **Parankiewicz**, Ann. d. Phys. **57**. S. 489. 1918; I. **Mattauch**, Ber. d. Wiener Akad. d. Wissenschaften physik.-naturw. Klasse IIa. **129**. S. 867. 1920.

[3]) Vgl. die bei **Mattauch** a. a. O. S. 867, 868, Anm. zitierte Literatur.

[4]) Im folgenden zitiert als R. bzw. L. u. Z., I. u. II. I. A. **Rubinowicz**, Ann. d. Phys. **62**. S. 691. 1920; II. Zeitschr. f. Phys. **6**. S. 405. 1921; I. **Laski** u. **Zerner**, Zeitschr. f. Phys. **3**. S. 224. 1920; II. **6**. S. 411. 1921.

Das wichtige Ergebnis dieser Arbeiten und zwar in erster Reihe der von Rubinowicz ist der Nachweis der Möglichkeit eines negativen Radiometerdruckes. Wenn wir aber

---

1) R., I. S. 693 u. 695, Anmerkungen.

sonst einen Vergleich der gewonnenen Ergebnisse mit den Beobachtungen vornehmen, so fällt dieser sehr zu Ungunsten der Theorie aus.

Kein besonderes Gewicht wollen wir hierbei auf den Umstand legen, daß die photophoretischen Kräfte nach beiden Theorien von der Art des umgebenden Gases nicht ganz unabhängig sind, sondern sich um Faktoren von der Größenordnung 1 unterscheiden, während die Beobachtung Unabhängigkeit von der Art des umgebenden Gases ergab. (Auch in der Theorie von Laski und Zerner ergibt sich nämlich bei Auswertung ihrer Schlußformel[1]) die Radiometerkraft in *H* anders als in *Ar*. Die Autoren haben nämlich den Faktor

$$\frac{1}{1 + 2\,\frac{\lambda_a}{\lambda_i}}$$

übersehen, der in den genannten Gasen wie 1 : 1,5 variiert. Es ergibt sich also auch aus der klassischen Theorie eine ähnliche Abhängigkeit wie nach der Knudsenschen Theorie des Temperatursprunges, die etwa 1 : 3 liefert.[2])) Wir wollen uns nämlich der Ansicht von Rubinowicz anschließen, daß die vorliegenden spärlichen Messungen[3]) nicht ausreichen und neue zur Entscheidung dieser Frage erforderlich sind.

Dagegen besteht in der Frage des Druckeinflusses zwischen Theorie und Experiment ein scharfer Widerspruch. Sowohl die älteren provisorischen Messungen von Ehrenhaft und Parankiewicz, die *Druckunabhängigkeit* erhielten, als auch die neueren exakten von Mattauch[4]), welcher relativ *schwache Druckabhängigkeit* festzustellen vermochte, widersprechen der von der Theorie geforderten Proportionalität zwischen Radiometerkraft und Gasdruck.[5])

---

[1]) L. u. Z., I. S. 236.

[2]) Vgl. zu diesem Punkte L. u. Z., II. S. 413, Anm.

[3]) Parankiewicz, a. a. O., S. 513, fünf qualitative Beobachtungen.

[4]) Phys. Zeitschr. **23**. S. 444. 1922.

[5]) Auch an dieser Stelle ist darauf hinzuweisen, daß die Laski-Zernerschen Rechnungen trotz ihrer prinzipiellen Unanwendbarkeit auf den vorliegenden Fall bei richtiger Auswertung der Radiometerformel praktisch dasselbe Gesetz für die Druckunabhängigkeit ergeben, wie die Rubinowiczsche Theorie; vgl. zu diesem Punkte die vom Verf. in einem Vortrage gegebene Korrektur der Laski-Zernerschen Kurven, die bei R. II. S. 407 und L. u. Z., II. S. 412 erwähnt ist.

Gerade dieser Schwierigkeit der Druckunabhängigkeit bzw. geringen Druckabhängigkeit, welche seit jeher den Haupteinwand gegen die Auffassung der negativen Photophorese als Radiometereffekt gebildet hat, stehen die Theorien recht hilflos gegenüber. Rubinowicz sucht auf zwei Wegen zu einer Deutung dieser Schwierigkeit zu gelangen. Da nämlich (laut beiden Theorien) Druckunabhängigkeit dann eintritt, wenn $\lambda_i < < h\,a$ (λ_i = Wärmeleitvermögen der Kugel, h Übergangsleitfähigkeit definiert bei Rubinowicz I, S. 696, Formel 3), vermutet er erstens, daß λ_i kleiner ist als allgemein angenommen wird und zweitens, daß der von Ehrenhaft und seinen Schülern angegebene Kugelradius zu klein ist.[1]

Dagegen sei schon hier darauf hingewiesen, daß besonders durch die in der Zwischenzeit erschienene Arbeit von Erich Schmid[2] ein beträchtlicher Fehler in der Radienbestimmung ziemlich ausgeschlossen erscheint. (Es würde sich hier etwa um den Faktor 40 handeln.) Auf eine zweite noch größere Schwierigkeit, die mit diesen Annahmen verbunden wäre, kommen wir unten noch zurück.

Einen numerischen Vergleich hat lediglich Rubinowicz nach Überwindung bedeutender mathematischer Schwierigkeiten durchgeführt und hierbei eine Übereinstimmung der Größenordnung nach zu finden geglaubt. Doch hat sich in seine Rechnungen ein Versehen eingeschlichen, welches das Schlußresultat um zwei Zehnerpotenzen fälscht. Es liefert nämlich die Auswertung seiner Formel (I, S. 734, Nr. 33) den Wert von 10^{-5} dyn und nicht 10^{-7} dyn, während die beobachtete photophoretische Kraft etwa 10^{-9} dyn beträgt. Die Radiometerkraft ergibt sich also, allerdings unter bedeutenden Vernachlässigungen, die alle auf eine Vergrößerung des Schlußresultates hinwirken, um etwa vier Zehnerpotenzen zu groß. Wieder hofft Rubinowicz (I, S. 737) durch die Annahme, daß der Ehrenhaftsche Teilchenradius und mit ihm die beobachtete photophoretische Kraft zu klein angegeben sei, eine Verbesserung herbeizuführen. Doch wurde dabei übersehen, daß in die erwähnte Schlußformel für die Radiometerkraft (Nr. 33) der Radius mit der vierten Potenz eingeht und also seine Vergrößerung die Diskrepanz nur noch verschärfen würde. Hier spielen nun auch die Schwierigkeiten hinein, welche die Rubinowiczsche Erklärung der Druckunabhängigkeit als wenig geeignet erkennen lassen. Wird nämlich mit Rubinowicz entweder λ_t verkleinert oder der Radius vergrößert, um $\lambda_t << h\,a$ zu machen, so wird durch beide Annahmen, sofern sie hinreichen sollen, die Radiometerkraft um mehr als eine Zehnerpotenz gesteigert und die Diskrepanz unüberbrückbar.

---

[1] Vgl. R., I. S. 712.

[2] Ber. d. Wiener Akad. naturw. Klasse IIa. 129. S. 813. 1920.

Wir glauben also mit der Behauptung nicht fehl zu gehen, daß die Rubinowiczsche Theorie in ihrer vorliegenden Form trotz des bedeutsamen Resultates einer negativen Radiometerkraft nicht imstande ist, die Beobachtungen einwandfrei wiederzugeben. Wir wollen infolgedessen auf einem anderen Wege zu einer wenigstens partiellen Deutung der Schwierigkeiten zu gelangen versuchen.

II. Nach der kinetischen Gastheorie werden Radiometerkräfte bekanntlich durch die Differenz der Bewegungsgrößen erklärt, die bei der Reflexion der Gasmoleküle am ungleich temperierten Körper übertragen werden. Wir wollen jedoch vorläufig von dieser molekulartheoretischen Deutung absehen und lediglich folgenden makroskopischen Vorgang ins Auge fassen: es strömt Wärme von höherer zu tieferer Temperatur und erteilt dabei einem mechanischen System kinetische Energie, d. h. leistet Arbeit im Sinne der Thermodynamik. Die maximale Arbeit bei einem derartigen Prozeß ist bekanntlich durch die Carnotsche Ungleichung gegeben. Wir wollen also hier einen mit Arbeitsgewinn verbundenen Prozeß angeben und auf diesen die erwähnte Ungleichung anwenden, dies wird zu einer Ungleichung für die bei Temperaturausgleichen auftretenden Radiometerkräfte führen.[1])

Wir betrachten eine die Ladung e tragende Kugel, ausgeschwebt in einem homogenen, vertikal gerichteten elektrischen Felde $\mathfrak{E}$, welches die Wirkung der Schwerkraft aufhebt. Wenn nun durch horizontal auffallendes Licht auf die

---

1) Wir wollen nicht behaupten, daß der im folgenden zu betrachtende Vorgang reversibel ist, also wirklich das Maximum der gewinnbaren Arbeit liefert, wenn wir auch trotz aller Bemühungen nicht imstande waren, einen „günstigeren" Prozeß zu finden. Doch würde eine Verbesserung des Prozesses die unten aufgestellte Ungleichung und somit auch alle an sie geknüpften Folgerungen nur noch verschärfen.

Kugel die Radiometerkraft R ausgeübt wird, so schalten wir ein zweites homogenes, der Radiometerkraft *entgegengerichtetes* elektrisches Feld $\mathfrak{E}_2$ ein, dessen Stärke so bemessen sei, daß $e\,\mathfrak{E}_2 = \alpha\,R$ sei, wobei $0 < \alpha < 1$. Unter dem Einfluß dieser Kräfte wird sich das Partikel mit der Geschwindigkeit $v = B\,R\,(1 - \alpha)$ bewegen (B Beweglichkeit des Partikels). Hierbei wird in der Zeiteinheit die Arbeit $B\,R^2\,\alpha\,(1 - \alpha)$ gegen das elektrische Feld geleistet. Bezeichnen wir nun die in der Zeiteinheit überströmende Wärmemenge mit Q, die Temperatur der Umgebung mit T und die durchfallene Temperaturdifferenz mit τ, so gilt:

$$B\,R^2\,\alpha(1 - \alpha) \leqq \frac{Q\,\tau}{T + \tau};$$

die linke Seite dieser Gleichung wird ein Maximum für $\alpha = \frac{1}{2}$, die Ungleichung erhält dann unter der Voraussetzung $\tau << T$ die Form

$$\boxed{\frac{R^2 B}{4} < \frac{Q\,\tau}{T}\,.}$$

An dieser Stelle seien zwei naheliegende Einwände kurz erörtert. Man könnte nämlich die Anwendung thermodynamischer Formeln in submikroskopischen Gebieten mit Rücksicht auf die Schwankungserscheinungen für unerlaubt halten. Dagegen ist zu bemerken: Einer der Begründer der Lehre von den Schwankungserscheinungen M. v. Smoluchowski hat den Satz aufgestellt[1]), daß die Leistung einer Maschine, zu deren Betrieb Schwankungserscheinungen nicht erforderlich sind, von diesen unbeeinflußt bleibt; der Satz vom ausgeschlossenen Perpetuum mobile zweiter Art (und nur dieser findet hier Verwendung) gilt auch in der durch die statistischen Erkenntnisse modifizierten Thermodynamik, in der die strenge Gültigkeit des Satzes von der Zunahme der Entropie aufgehoben ist. Deshalb ist es auch berechtigt, wenn die kinetischen Theorien mit den Begriffen einer Temperatur im Gase und in der Kugel operieren.

Auch der Umstand, daß zur Herstellung der Radiometerkräfte Strahlungsenergie in Wärme und diese dann erst partiell in Arbeit verwandelt wird, kann nicht gegen unsere Formel

---

1) Vgl. z. B. Vorträge über die kinetische Theorie der Materie. Teubner, Leipzig 1913. S. 116.

angeführt werden. Denn für das Auftreten einer Radiometerkraft R ist lediglich ein bestimmter Temperatursprung erforderlich, dessen Entstehungsgeschichte ganz belanglos ist; wir können ihn uns auch durch ein im Innern der Kugel angebrachtes Wärmereservoir der Temperatur $T + \tau$ hervorgebracht denken.

Es sei hervorgehoben, daß man auch für andre Formen des Radiometers eine analoge Ungleichung mit Hilfe eines passend gewählten Prozesses angeben kann und die Methode daher nicht auf den Spezialfall der im Gase suspendierten Kugel beschränkt ist.

III. Diese Ungleichung können wir nun auf zwei Arten weiter verwenden:

1. Wir setzen in die linke Seite den von der *kinetischen Theorie* gelieferten Wert für R als Funktion von τ ein und prüfen allgemein, ob die Bedingung erfüllt ist.

2. Bei *numerisch gegebenem* R bestimmen wir den kleinsten Temperatursprung, der zur Erfüllung der Ungleichung erforderlich ist. (Im folgenden sei die Rechnung nur für die von Rubinowicz gewählte Form des Kraftansatzes durchgeführt: sie gestaltet sich für die von Laski und Zerner angenommenen klassischen Ansätze ganz analog und liefert übereinstimmende Resultate mit nur wenig verschiedenen Zahlenfaktoren.)

1. Bei dieser Berechnung können wir die Überlegung noch in folgender Weise verschärfen: Maßgebend für die Gesamtkraft ist ja nicht der gesamte absolute Betrag des Wärmestromes, sondern lediglich dessen Komponente in der Strahlrichtung und zwar hängt die Radiometerkraft von dem Temperatursprung nach Rubinowicz[1]) in folgender Weise ab:

$$R_n \, d f = C \tau \cos \vartheta \, d f .$$

Wir konstruieren uns also eine derartige „Flächenbewellung“ an der Oberfläche der Kugel, daß bei gegebenem Q_s und also auch gegebenem R, Q und damit $Q \tau$ ein Minimum wird. Die Rechnung gestaltet sich nun folgendermaßen:

$$Q = \int h \tau \, d f = \int\limits_0^{\vartheta_0} \sin \vartheta \, d \vartheta \int\limits_0^{2\pi} h \tau \, d \varphi , \quad \vartheta_0 \leqq \pi ,$$

---

[1]) I. S. 694–695.

die Integration erstreckt über das mit „Wärmequellen“ belegte Gebiet der Kugeloberfläche (τ nach Voraussetzung konstant).

$$Q = h\,\tau\, 2\pi r^2 (1 - \cos\vartheta_0), \qquad Q = \frac{2\,Q_x(1-\cos\vartheta_0)}{\sin^2\vartheta_0},$$

$$Q_x = \int h\,\tau \cos\vartheta\, df = h\,\tau\,\pi r^2 \sin^2\vartheta_0,$$

$$Q\,\tau = \frac{2\,Q_x^2(1-\cos\vartheta_0)}{\pi r^2 h \sin^4\vartheta_0} = f(\vartheta_0).$$

$\frac{d f(\vartheta_0)}{d\vartheta_0} = 0$ liefert das gesuchte Minimum,

$f(\vartheta_0) =$ Minimum für $\cos\vartheta_0 = \frac{1}{3}$,

$$f(\vartheta_0)_{\mathrm{Min.}} = \frac{1{,}7\,Q_x^2}{\pi r^2 h},$$

$$\frac{R^2 B}{4} = \frac{\gamma^2 p^2 B\,Q_x^2}{64\,h^2\tau^2} < \frac{1{,}7\,Q_x^2}{\pi r^2 h\,T},$$

$$\frac{\gamma^2 p^2 C}{64\,T h \cdot 6\mu} < \frac{1{,}7}{r}.$$

Nun ist: $R = \frac{\gamma p}{4hT} Q_x$,

$B = \frac{C}{6\pi\mu r}$,

(p = Gasdruck,

γ = Akkommodationskoeffizient,

μ = Reibungskoeffizient; $2\cdot 10^{-4}$ für O_2,

C = Cunninghamsche Konstante ~ 2).

Nach Einsetzen numerischer Werte:

($T = 300^0$, $r = 10^{-5}$ cm, $h = \gamma\cdot 10^8$ erg grad^{-1} cm^{-1} sec^{-1},

$p = 10^6$ dyn)

$$\underline{\gamma < 100.}$$

Infolge dieser immer realisierten Bedingung erweist sich die **Rubinowiczsche** Theorie als verträglich mit dem zweiten Hauptsatz.

2. In zweiter Anwendung der Ungleichung setzen wir nun in die linke Seite den von **Rubinowicz** numerisch errechneten Wert von R ein und erhalten so unter der Annahme, daß die gesamte Wärme in einer Richtung abströmt, durch Ausrechnung der Ungleichung für

$$\underline{\tau > \frac{1{,}7}{\gamma}} \quad (R = 10^{-5}\,\text{dyn},\ B = 5\cdot 10^7,\ h = \gamma\cdot 10^8,\ \gamma < 1).$$

Dieser Betrag ist nun aus zwei Gründen überraschend, da wir es ja 1. beim Experiment keineswegs mit einem reversiblen Prozeß zu tun haben und 2. nur die Differenz der Wärmewirkungen an den beiden Hemisphären zur Geltung kommen. Diese beiden Umstände müßten eine Vervielfältigung des Temperatursprunges zur Folge haben. Nun ist bisher infolge mathematischer Schwierigkeiten noch nicht einmal eine Abschätzung der Temperaturdifferenzen an bestrahlten Kugeln vorgenommen worden, doch läßt sich diese in verhältnismäßig einfacher Weise durchführen, wenn man auf die Bestimmung der Temperaturunterschiede an den einzelnen Teilen der Kugeloberfläche verzichtet, was ja auch für unsere vorliegenden Zwecke ohne Belang ist. Wir nehmen also an, daß die gesamte, in der Zeiteinheit absorbierte Energie aus einer punktförmigen Quelle im Kugelmittelpunkt ausströmt und sind bei dieser Annahme sicher, daß in Wirklichkeit sich Stellen auf der Kugeloberfläche vorfinden werden, deren Temperatur unsere Durchschnittstemperatur noch übertreffen wird. Diese von dem früheren unabhängige Berechnung ist umso wichtiger, als mangels Übereinstimmung der beobachteten photophoretischen und berechneten Radiometerkräften Schlüsse aus diesen auf die tatsächlichen Temperaturverhältnisse nicht gezogen werden können. Es handelt sich also jetzt noch um Bestimmung der gesamten absorbierten Energie.

Hierfür sind die Formeln in einer Arbeit von G. Mie[1]) gegeben. Mie berechnet in dieser Arbeit das elektromagnetische Feld, das bei der Beugung einer ebenen Welle an einer Kugel beliebigen Materiales entsteht und zwar gibt er für die elektrische und magnetische Feldstärke Reihenentwicklungen nach Kugel- und Zylinderfunktionen an. Aus den Koefizienten dieser Entwicklung, die durch Wellenlänge des einfallenden Lichtes, Kugelradius und die optischen Materialkonstanten bestimmt sind, berechnet sich nach Formeln 98 und 99[2]) die absorbierte Energie. Für Gold wurde die Berechnung der Koeffizienten und der Absorption bereits von Mie durchgeführt, er erhielt hierbei[3]) das interessante Resultat, daß die absorbierte Energie infolge der Beugung größer ist, als die Wirkung des geometrischen Schattens, also größer als die bei Abwesenheit der Kugel durch den Kugelquerschnitt hindurchströmende Energie.

---

[1]) Ann. d. Phys. 25. S. 337. 1908.
[2]) a. a. O., S. 436.
[3]) a. a. O., S. 441.

Für $S\,e$ wurden die Koeffizienten einer von J. **Mattauch** angefertigten Tabelle entnommen.[1])

Nach Formel 98 und 99 beträgt nun die absorbierte Energie:

$$\frac{E\,c\,\lambda^2}{2\pi}\left[-J(a_1)+J(p_1)+J(a_2)-J(p_2)-\frac{|a_1|^2+|p_1|^2}{3}-\frac{|a_2|^2+|p_2|^2}{5}\right].$$

(E = Energiedichte des einfallenden Strahles, c = Lichtgeschwindigkeit, λ = Wellenlänge, $J\,(a_\nu)$ = imaginärer Bestandteil von a_ν, a_ν, p_ν = **Miesche** Koeffizienten.)

Nun beträgt der Klammerausdruck nach der **Mattau**schen Tabelle ungefähr 1, die Energiedichte beträgt nach **Ehrenhaft**schen Messungen[2]) 0,28 erg/ccm, λ (im Mittel) $6{,}10^5$ cm.

Also wird die absorbierte Energie:

$$\frac{0{,}28\cdot 3\cdot 10^{10}\cdot 36\cdot 10^{-15}}{6\cdot 3}\;\underline{=4{,}5\text{ erg.}}$$

Denken wir uns diesen Betrag einer Quelle im Kugelmittelpunkt entströmend, so berechnet sich die Oberflächentemperatur aus der Gleichung

$$Q=4\pi\,r^2\,h\,\tau,\ \tau=\frac{4{,}5}{12{,}5\cdot 10^8\,\gamma\,10^{-10}}\approx\frac{36}{\gamma}\text{ Grad.}\quad(\gamma<1!)$$

Dieses Ergebnis, welches also unsere früheren thermodynamischen Schätzungen noch übertrifft, bietet nun bedeutende physikalische Schwierigkeiten. Es ist bei Existenz derart hoher Temperatursprünge vor allem nicht gut möglich, Probekörper im Kondensator stundenlang auszuschweben, da die Temperaturdifferenzen starke seitliche Konvektionsströmungen zur Folge haben müßten. Eine zweite Schwierigkeit liegt in den Phänomen des Verdampfens der Partikel. Daß kleine Probekörper infolge ihres durch Oberflächenspannung gesteigerten Dampfdruckes verdampfen müssen, ist zuerst von **Ernst Rie**[3]) erkannt worden. Die tatsächlich beobachteten Verdampfungsgeschwindigkeiten sind aber um ein Vielfaches kleiner als die von Rie theoretisch berechneten. Nun ist die Dampfdrucksteigerung infolge der von uns berechneten Temperaturerhöhung um zwei bis drei Zehnerpotenzen höher als die Steigerung infolge Oberflächenspannung. Dabei ist noch zu beachten, daß die Innentemperatur der Kugel die Oberflächentemperatur bedeutend übertrifft. Bei den berechneten Temperatursteigerungen durch Strahlungswärme müßte nach der von Rie angegebenen Formel die Verdampfung geradezu blitzschnell vor sich gehen. Dagegen hat J. Mattauch[1]) in einer interessanten Beobachtung Verdampfungskurven von Selenpartikeln aufgenommen und ausdrücklich festgestellt, daß die Verdampfungsgeschwindigkeit im Dunkeln bzw. diffusen Strahl ebenso groß ist wie im konzentrierten Strahl der Bogenlampe. Besonders kraß gestalten sich jedoch die Verhältnisse, wenn wir zu niederen Drucken übergehen. Tatsächlich wurden Versuche, wenn auch qualitativer Art, von Parankiewicz und Ehrenhaft und Mattauch bis zu $^1/_{60}$ Atmosphärendruck hinunter ausgeführt. Da die Übergangsleitfähigkeit nach der von Rubinowicz angegebenen Formel dem Druck proportional ist, so wächst nach der Formel $Q = F\,h\,\tau$, τ bei konstantem Q und erreicht Werte von der Größenordnung $\frac{2000}{\gamma}$ Grad! ($\gamma < 1$).

---

[1]) Neuerliche Bestimmung der ungemein kompliziert zu berechnenden Koeffizienten vermochte die **Mattauch**schen Werte lediglich zu bestätigen.

[2]) a. a. O. S. 123.

[3]) Ann. d. Phys. **63**. S. 759. 1920.

IV. Wenn wir uns nach einer Erklärung umsehen, die diese neuen Schwierigkeiten womöglich zusammen mit früher erwähnten behebt, so drängt sich uns eine Hypothese auf, die bereits früher, allerdings in ganz anderem Zusammenhang, gemacht worden ist. Es hat nämlich Erich Regener[2]) unter Heranziehung makroskopischer Analogien zur Deutung des Auftretens von Subelektronen die Vermutung ausgesprochen, die kleinen Partikeln wären von einer gegen ihre Oberfläche zu sehr stark verdichteten Gasschichte umgeben. Die Brauchbarkeit dieser Annahme zur Lösung des Subelektronenproblems wollen wir hier unerörtert lassen und lediglich deren Konsequenzen für unsere thermischen Effekte untersuchen. Daß durch sie die Tatsache des hohen Temperatursprunges beseitigt wird, liegt auf der Hand. Durch eine Steigerung der

---

1) a. a. O. S. 887.

2) Berliner Berichte 1920. S. 632.

Dichte des Gases in der Umgebung der Kugel wird nach beiden Theorien nach der Formel $h \sim \delta$ die Übergangsleitfähigkeit gesteigert und der Temperatursprung $\tau \sim Q/h$ in gleichem Verhältnisse herabgesetzt. Wir sind also damit die anders kaum erklärliche Schwierigkeit los geworden, die in der von der Theorie geforderten Existenz derart enormer Temperatursprünge und der an sie geknüpften Konvektions- und Verdampfungserscheinungen gelegen ist.

Als eine weitere Leistung unserer Annahme möchten wir die Deutung der Verzögerung in der Verdampfung anführen, die durch die Oberflächenspannung allein hervorgerufen wird. Es handelt sich hier um einen *Gasmantel* um den Probekörper, der die *Diffusionsgeschwindigkeit* des Quecksilberdampfes stark verzögert. Wir setzen uns hier im Gegensatz zu der von Regener gegebenen Deutung der Verdampfungserscheinungen. Regener erklärt nämlich[1]) die Verdampfung als vorgetäuscht durch eine Vergrößerung des hydrodynamischen Partikelradius bei allmählicher Anlagerung einer Gashaut. Abgesehen davon, daß eine Gashaut, die solche Effekte vorzutäuschen in der Lage ist, von beträchtlicher Ausdehnung sein müßte, bleibt die von Rie nachgewiesene thermodynamische Notwendigkeit der Verdampfung ungedeutet. Wir halten also die Regenersche Hypothese für unzutreffend und erblicken im Gegensatze hierzu in der Gashaut ein die Verdampfung aufhaltendes Moment.

Auch zum Verständnis der photophoretischen Erscheinungen selbst trägt, wie wir glauben, unsere Annahme einiges bei. Vor allem erscheint es nicht mehr verwunderlich, daß der numerische Wert der Rubinowiczschen Rechnung von dem tatsächlich beobachteten so stark abweicht. Infolge der Variation der Dichte des umgebenden Gases haben wir es nicht mehr mit den idealen, von der Theorie geforderten Voraussetzungen zu tun, im besonderen ist der Kugelradius sicher nicht klein gegen die Weglänge in den Gaspartien in unmittelbarer Umgebung der Kugel.

Was die Abhängigkeit vom Gasdruck anbelangt, so scheint diese, wie bereits früher betont, von den speziellen Randbedingungen ziemlich unabhängig zu sein. Nach beiden Theorien ergibt sich nämlich $\lambda_i < < h\,a$. Unsere Annahme

---

1) a. a. O. S. 639.

macht nun die Erfüllung dieser Bedingung durch Vergrößerung von h möglich, andererseits aber scheint diese Vergrößerung durch die thermischen Effekte unbedingt geboten. Wir glauben also hierdurch verständlich gemacht zu haben, wieso die beobachtete Druckabhängigkeit nur ein kleiner Bruchteil der theoretisch geforderten ist.

Zusammenfassend können wir also sagen:

Die Radiometertheorien der Photophorese vermögen in ihrer vorliegenden Gestalt von einer Anzahl wichtiger Merkmale der Beobachtungen nur schlecht Rechenschaft zu geben. Die Aufstellung eines thermodynamischen Kriteriums, das sich in analoger Weise für andere Radiometer modifizieren ließe, ergibt erstens die Verträglichkeit der aufgestellten Theorie mit dem zweiten Hauptsatz und führt zweitens zur Untersuchung der bisher noch nicht einmal abgeschätzten Temperaturverhältnisse an der Kugeloberfläche.

Der sich ergebende enorme Temperatursprung ist mit den Beobachtungen unverträglich und läßt sich wohl kaum anders als durch Einführung der Hilfshypothese einer Gasverdichtung beheben. Diese Hypothese erklärt eine Reihe thermischer Anomalien und gibt gleichzeitig einen Anhaltspunkt dafür, in welcher Richtung die Gründe für die schlechte Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment zu suchen sind. Im besonderen wird durch sie die Tatsache der geringen Druckabhängigkeit der photographischen Kraft verständlich gemacht.

Wien, Inst. für Theoretische Physik d. Universität.

(Eingegangen 6. August 1923.)

14. *Über das Verhalten des Viellinienspektrums des Wasserstoffs bei tiefen Temperaturen;*

von L. Citron.

(Gekürzte Münchener Dissertation.)

Das Viellinienspektrum des Wasserstoffs verdient deswegen besonderes Interesse, weil wir von ihm Aufschlüsse über den Bau des Moleküls erwarten dürfen. Die Voraussetzung hierfür ist jedoch, daß es gelingt, das Spektrum zu ordnen, was bisher nur bei wenigen Linien der Fall ist. Einen Weg, um die Zusammengehörigkeit einzelner Linien zu finden, bieten die Änderungen bei verschiedenen Anregungsbedingungen; Zweck der vorliegenden Arbeit war, den Einfluß tiefer Temperaturen auf die Intensitäten der einzelnen Linien zu untersuchen.

Während bisher eine Änderung der Intensitätsverhältnisse der einzelnen Linien nicht gefunden war, läßt sich jetzt dieselbe einwandfrei in vielen Fällen feststellen und auch angenähert quantitativ bestimmen; für eine Ordnung der Linien in ein System genügte diese jedoch nicht. Der Gesamteindruck des Viellinienspektrums bleibt ungeändert, wie die früheren Untersuchungen[1][2][3] ergeben hatten.

Das Spektrum wurde teils in der Kapillare, teils in der positiven Säule des Geißlerrohres erzeugt, und dieses in flüssige Luft getaucht, um tiefe Temperaturen zu erhalten. Je eine gekühlte und eine ungekühlte Aufnahme unter sonst möglichst gleichen Bedingungen wurden verglichen; da aber nicht alle Bedingungen zugleich festgehalten werden konnten, mußte auf absolute Messungen verzichtet werden.

---

[1] K. R. Koch, Ann. d. Phys. u. Chem. 38. S. 213. 1889.

[2] J. Scheiner, Astrophys. Journ. 7. S. 231. 1898.

[3] J. P. Donaghay, Diss. München 1908.

Der Wasserstoff wurde elektrolytisch erzeugt und gründlich getrocknet, zur Herstellung des Vakuums diente Kokosnußkohle, die in flüssige Luft tauchte; hierdurch war zugleich eine hohe Reinheit des Gases gewährleistet. Im allgemeinen waren auf den Spektrogrammen keine andern Linien als die des Wasserstoffs zu sehen.

Es wurden drei Röhren benutzt, teilweise wurden sie auch mit verschiedenen Stromquellen betrieben. Das erste Rohr, wie es auch Angerer[1]) teilweise zu seinen Versuchen über die Änderung des Stickstoffspektrums bei tiefen Temperaturen benutzt hat, bestand aus einem vertikalen und einem horizontalen Schenkel; der erste tauchte in flüssige Luft, und mittels eines total reflektierenden Prismas wurde er dicht unter dem ungekühlten Schenkel und ebenso wie dieser in Längsdurchsicht auf den Spalt des Spektralapparates abgebildet. Die Vorteile sind, daß man mit Sicherheit gewisse Verhältnisse in beiden zu vergleichenden Aufnahmen völlig gleich hat, wie Druck, Stromstärke und event. Verunreinigungen. Dagegen ist die Dichte verschieden, der Temperatur entsprechend, und wahrscheinlich auch der Potentialabfall. Betrieben wurde dieses Rohr mit einem Induktor und Quecksilberunterbrecher. Als besonders störend ergab sich für die Ausphotometrierung, daß die Linien sehr kurz waren, da das Prisma von beiden Schenkeln einen Teil abdeckte.

Um dem abzuhelfen, wurde als zweites ein gewöhnliches grades Kapillarrohr benutzt; zur Kühlung diente ein Dewargefäß, in dessen Silberbelegung ein Streifen zur Durchsicht ausgespart war; es war also darauf verzichtet, beide Aufnahmen zu gleicher Zeit zu machen. Betrieben wurde es meist mit Induktor und Quecksilberunterbrecher; für je zwei Vergleichsaufnahmen wurde eine Influenzmaschine und ein Aggregat von Gleichstromdynamos, das bis 3500 Volt gab, benutzt.

Um unter möglichst wohldefinierten Verhältnissen zu arbeiten, wurden dann noch Aufnahmen in der positiven Säule gemacht, die in einem 2 cm weiten Rohr in der Nähe der Anode beobachtet wurde. Der Potentialverlauf konnte an einigen festen Sonden als Differenz gegen die geerdete Anode

---

1) E. Angerer, Ann. d. Phys. **32**. S. 549. 1910.

mittels eines multizellularen Elektrometers abgelesen werden. Die Temperatur wurde bolometrisch mit einem Platindraht bestimmt. Da derselbe an der Stelle der Entladungen liegen sollte, aber natürlich vor Kathodenstrahlen geschützt sein mußte, wurde das Entladungsrohr zwischen Anode und Kathode durch ein engeres Knierohr unterbrochen. Zum Betriebe diente hier stets das Dynamoaggregat.

Als Spektralapparat wurde ein großer Steinheilscher Dreiprismenspektrograph benutzt. Das Negativmaterial waren meist Agfa-Chromoisorapidplatten, die hauptsächlich das Spektralgebiet von 3900 A. bis 5000 A. erfaßten, bei längeren Belichtungszeiten auch ein Gebiet von etwa 5300 A. bis 5700 A.

Die Platten wurden mit dem Kochschen Registrierphotometer[1]) des physikalischen Instituts der Universität München ausgewertet; dazu waren auf jede Platte Intensitätsmarken gedruckt. Bei nicht völlig getrennten Linien wurde nur die größte Intensität der Gruppe gemessen; auch sonst wurde die Breite nicht mit berücksichtigt. Wellenlängen wurden nicht neu gemessen, da genügend Beobachtungen[2])[3]) vorliegen.

Die Auswertung der Photometerkurven geschah auf graphischem Wege; durch Kontrollen war festgestellt, daß die Genauigkeit völlig ausreichte. Da keine absoluten Messungen vorlagen, konnte man an sich nicht sagen, welche Linien ungeändert waren, sondern konnte nur relative Änderungen der Linien gegeneinander angeben. Um die Resultate übersehen zu können, war es vorteilhaft, anzunehmen, daß die Gesamtintensität des Spektrums ungeändert bleibt; dann ergibt sich für jede Linie eine bestimmte absolute Änderung. Stellt sich diese Annahme als falsch heraus, so sind die Änderungen leicht umzurechnen.

Es fragt sich jetzt, ob die beobachteten Änderungen auch tatsächlich dem Einfluß der tiefen Temperatur zuzuschreiben sind. Zunächst ist zu untersuchen, ob sie vielleicht durch

---

1) P. P. Koch, Ann. d. Phys. 39. S. 705. 1912.

2) H. E. Watson, s. H. Kayser, Handbuch d. Spektroskopie 5. S. 494.

3) C. Porlezza u. G. Norzi, Gazz. chim. it. 43. II. S. 97. 1913.

Verunreinigungen hervorgebracht sein könnten, die, durch die tiefe Temperatur ausfrierend, die Änderungen im Viellinienspektrum als sekundäre Wirkung nach sich ziehen. Dem widerspricht, daß keinerlei fremde Linien zu sehen waren, außer manchmal der stärksten Quecksilberlinie, $\lambda = 4358$ A., und daß die Änderung des Spektrums auch in dem ersten Rohr auftrat. Ein mäßiger Zusatz von Luft, die alle in Betracht kommenden Gase enthält, sowie eine Steigerung der Spannung, wodurch der Druck von kondensierbaren Dämpfen sehr stark erhöht wird, zeigten außerdem nur eine ganz geringe Änderung des Viellinienspektrums, die nichts mit der zu tun hat, die durch die Einwirkung der tiefen Temperatur hervorgerufen wird; auch zeigen bereits vorliegende Erfahrungen mit anderen Beimischungen[1][2], daß erst dann erhebliche Änderungen in dem Viellinienspektrum auftreten, wenn der Partialdruck des beigemischten Gases den des Wasserstoffs um ein vielfaches übertrifft. Ebenso ist die Intensitätsänderung nicht durch eine Änderung der Spannung hervorgerufen; die Sondenmessungen zeigten, daß der Potentialabfall annähernd konstant war, und geringe Änderungen, wie sie an verschiedenen Stellen der schwach ausgebildeten Schichten auftreten, waren ohne Einfluß.[3] Ebenso ergaben verschiedene Stromstärken keine Unterschiede.

Die Ergebnisse mehrerer Aufnahmen zeigen leider ziemlich starke Abweichungen voneinander, so wie sie nach der Versuchsanordnung und der Reproduzierbarkeit nicht erwartet waren. Die Richtung der Änderung ist bis auf ganz wenige Fälle stets die gleiche, die Größe stimmt bei manchen Linien sehr gut überein, bei anderen wieder recht schlecht. Es waren mit dem ersten Rohr, das nur zur Orientierung diente, 4 Doppelaufnahmen, mit dem zweiten 15 und mit dem letzten 9 gemacht; für die einzelnen Linien waren je nach ihrer Intensität einige Aufnahmen weniger zu gebrauchen. Im Durchschnitt beträgt der mittlere Fehler des Resultats bei 20 Doppelaufnahmen für eine Änderung von — 50 Proz. 5, für eine solche von + 75 Proz. 15. Betrachtet man eine Gruppe von Aufnahmen, die mit demselben Rohr gemacht sind, für sich, so ist der mittlere Fehler etwas kleiner.

---

[1] E. B. Frost, Astrophys. Journ. 116. S. 100. 1902.

[2] T. R. Merton, Proc. of the Royal Society 96. S. 382. 1920.

[3] Vgl. jedoch J. Stark, Jahrb. d. Radioaktivität 14. S. 139. 1917.

Zur bequemeren Übersicht sind die Ergebnisse in vier Gruppen geordnet, je nach der Änderung ihrer Intensität; da alle Werte von — 65 Proz. bis + 140 Proz. vorkommen, sind die Grenzen willkürlich gewählt. Die Linien, die keine oder nur eine geringe Änderung zeigen — zu diesen gehört die Mehrzahl der Linien des Spektrums — sind nicht mit aufgeführt, ebenso die, deren Änderung nicht genügend sicher erschien.

1. Linien, die bei tiefer Temperatur mehr als + 70 Proz. Änderung zeigen.

Wellenlänge	Schwingungszahl	Wellenlänge	Schwingungszahl	Wellenlänge	Schwingungszahl
5573,20	17 943,0	4714,10	21 212,9	4219,69	23 698,4
5519,12	18 118,8	4576,07	21 852,8	4199,95	23 809,8
5401,28	18 514,1	4477,27	22 335,0	4082,53	24 494,6

2. Linien, die + 25 Proz. bis + 70 Proz. Änderung zeigen.

Wellenlänge	Schwingungszahl	Wellenlänge	Schwingungszahl	Wellenlänge	Schwingungszahl
5836,28	17 134,2	4543,87	22 007,7	4246,85	23 546,9
5822,99	17 173,3	4517,62	22 135,5	4202,49	23 795,4
5579,66	17 922,2	4486,22	22 290,5	4180,80	23 921,7 }
5521,75	18 110,2	4479,77	22 322,6 }	4179,70	23 925,2 }
5456,79	18 325,8	4479,18	22 325,5 }	4159,49	24 041,4
5008,24	19 967,1	4438,61	22 529,6 }	4146,38	24 117,4 }
4867,16	20 545,9	4437,75	22 533,9 }	4145,77	24 121,0 }
4817,71	20 756,7	4429,35	22 576,7	4065,75	24 595,7
4756,89	21 022,1	4404,80	22 702,5	4021,89	24 863,9
4725,00	21 164,0	4381,68	22 822,3	3997,28	25 017,0
4675,41	21 388,5 } 1)	4318,35	23 157,0	3993,95	25 037,9 }
4674,62	21 392,1 }	4308,78	23 208,4	3993,36	25 041,6 }
4618,45	21 652,3 }				
4617,69	21 655,8 }				

---

1) Diese Linien sind nicht getrennt.

3. Linien, die — 20 Proz. bis — 40 Proz. Änderung zeigen.

Wellenlänge	Schwingungszahl	Wellenlänge	Schwingungszahl	Wellenlänge	Schwingungszahl
5812,82	17 203,4	4843,65	20 645,6	4450,99	22 466,9
5786,00	17 283,1	4838,39	20 668,0	4450,07	22 471,6
5775,28	17 315,2	4802,14	20 824,0	4417,48	22 637,6
5760,58	17 359,4	4781,12	20 915,6	4416,58	22 642,2
5759,76	17 361,8	4777,59	20 931,0	4415,25	22 648,8
5737,06	17 430,5	4770,87	20 960,5	4414,39	22 653,2
5728,76	17 455,8	4763,96	20 990,9	4412 42	22 663,3
5713,59	17 502,1	4625,35	21 620,0	4410,75	22 671,9
5703,50	17 533,1	4620,90	21 640,8	4347,58	23 001,3
5689,00	17 577,8	4563,88	21 911,2	4304,09	23 233,7
5688,00	17 580,9	4557,43	21 942,2	4303,60	23 236,4
5552,60	18 009,6	4521,63	22 115,9	4237,61	23 598,2
5499,84	18 182,3	4511,89	22 163,7	4163,67	24 017,3
5435,06	18 399,0	4511,11	22 167,5	4156,86	24 056,6
5016,53	19 934,1	4505,80	22 193,6	4074,25	24 544,4
4966,98	20 132,9	4488,00	22 281,6	4071,39	24 561,6
4873,20	20 520,4	4474,42	22 349,3	3987,06	25 081,1
4869,58	20 535,6	4461,14	22 415,8		

4. Linien, die mehr als — 40 Proz. Änderung zeigen.

Wellenlänge	Schwingungszahl	Wellenlänge	Schwingungszahl	Wellenlänge	Schwingungszahl
5543,71	18 038,5	4578,22	21 842,6	4212,67	23 737,9
5426,20	18 429,1	4572,90	21 868,0	4210,29	23 751,3
4723,17	21 172,2	4562,41	21 918,2	4209,34	23 756,7
4679,26	21 370,9	4493,86	22 252,6	4175,33	23 950,2
				4171,45	23 972,5

Leider gelang es jedoch nicht, mit Hilfe dieser Ergebnisse Liniengruppen aus dem Viellinienspektrum auszusondern, deren einzelne Schwingungszahlen einen systematischen Zusammenhang zeigen; auch ein Vergleich mit den andern untersuchten Eigenschaften des Viellinienspektrums — Zeemanneffekt[1][2], Starkeffekt[3][4] und Intensitätsänderungen bei höherem Potential[3][5] und bei Heliumbeimischung[6][7] — hatte keinen Erfolg. Wenn es aber gelungen sein wird, das Viellinienspektrum zu ordnen, dann wird sicher auch ein gesetzmäßiger Zusammenhang aller andern Eigenschaften und der Temperaturempfindlichkeit mit der Stellung der Linien im System deutlich hervortreten.

---

[1] A. Dufour, Ann. d. chim. et de phys. 9. S. 361. 1906.

[2] A. Dufour, Phys. Zeitschr. 10. S. 134. 1909.

[3] J. Stark, a. a. O.

[4] Takamine u. Kokubu, Mem. Kyoto imp. univ. 3. S. 271. 1919.

[5] G. S. Fulcher, Phys. Zeitschr. 13. S. 1137. 1912.

[6] E. B. Frost, a. a. O.

[7] T. R. Merton, a. a. O.

Zum Schluß ist es mir eine angenehme Pflicht, Hrn. Geheimrat Professor Dr. **Wien** für die Anregung zu dieser Arbeit sowie für die Überlassung der hierzu nötigen Apparate meinen besten Dank auszusprechen. Weiteren Dank schulde ich Hrn. Professor Dr. **Rau** und Hrn. Dr. **Rüchardt** für das lebhafte Interesse und die Förderung, die sie meiner Arbeit haben zuteil werden lassen. Der **Pulfrichsche** Komparator, der den genauen Vergleich zweier auf verschiedenen Platten befindlicher Spektren erlaubt, und mit dem die Untersuchungen vor der Photometrierung qualitativ vorgenommen wurde, ist von der Notgemeinschaft dem physikalischen Institut zur Verfügung gestellt.

(Eingegangen 20. September 1923.)

15. *Nachtrag zur Arbeit „Über die elektrische Polarisation des Dielektrikums“;*

von Georg Jacoby.

Durch folgendes soll eine früher gemachte Abhandlung über die Theorie des Dielektrikums[1]) ergänzt werden. Daselbst wurde angeführt, daß der Einfluß eines äußeren elektrischen Feldes auf ein Atom in einer Deformation der Elektronenschale und in einer Neueinstellung des Elektrons auf dieser Schale bestehen kann. Es wurde mit der letzten Möglichkeit gerechnet, welche für makroskopische Feldverhältnisse Proportionalität zwischen Feldstärke und Verschiebung der Elektronen ergab. Diese lautete:

$$\mathfrak{s} = -\frac{a^3}{e\,Z_{\text{eff.}}}\,\mathfrak{E}_a' . \tag{1}$$

Hierin ist a der Radius der Elektronenschale, $e\,Z_{\text{eff.}}$ die effektive Kernladung und $\mathfrak{E}_a'$ die auf der Bahnebene senkrecht stehende Komponente der Stärke $\mathfrak{E}_a$ des äußeren elektrischen Feldes. Die zu $\mathfrak{E}_a'$ senkrechte Komponente $\mathfrak{E}_a''$ bedingt eine Verzerrung der ursprünglich kreisförmigen Bahn, welche mit der oben erwähnten Deformation der Schale gleichbedeutend ist. Eine von $\mathfrak{E}_a'$ hervorgehobene Deformation der Schale ist bei den geringen Verschiebungen, wie sie tatsächlich vorkommen, ohne Einfluß auf die Bahn des Elektrons. Beschäftigen wir uns mit der Verzerrung der Elektronenbahn näher.

In Fig. 1 ist der Vektor $\mathfrak{E}_a''$ gleichgerichtet mit der X-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems eingetragen. Die ursprüngliche Bahn des Elektrons ist durch den Kreis $A_0 B_0 C_0 D_0$ und die verzerrte Bahn durch die Kurve $A B_0 C D_0$ angedeutet. Mit Rücksicht auf die in Wirklichkeit vorkommende sehr geringe Stärke des äußeren elektrischen Feldes im Vergleich zu der Stärke des von der Kernladung am Orte des Elektrons herrührenden Feldes dürfen wir von einer sehr kleinen

---

1) G. Jacoby, Ann. d. Phys. 72. S. 153. 1923.

Verzerrung der ursprünglichen Bahn sprechen. Es ist daher die Annahme gerechtfertigt, daß die auf das Elektron ausgeübte Zentrifugalkraft in Richtung des vom Koordinatenursprung O aus gezogenen Radiusvektors fällt. Die Gleichgewichtsbedingung zwischen der Zentrifugalkraft und den elektrischen Kräften lautet daher:

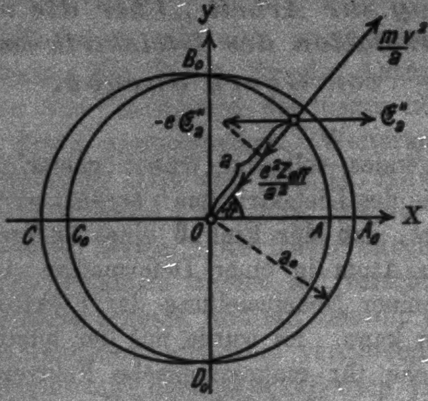


Fig. 1.

$$\frac{m v^2}{a} = \frac{e^2 Z_{\text{eff.}}}{a^2} + e\,\mathfrak{E}_a'' \cos\vartheta\,, \tag{2}$$

wobei ϑ der Winkel ist, welchen der Radiusvektor mit der positiven Richtung der X-Achse bildet.

Ist das äußere elektrische Feld unveränderlich, so ist die Gesamtenergie des Elektrons während der Bewegung konstant. Die Gesamtenergie setzt sich aus der kinetischen Energie $E_k = \frac{m v^2}{2}$, der potentiellen Energie im Kernfelde $E_p = -\frac{e^2 Z_{\text{eff.}}}{a}$ und der potentiellen Energie im äußeren Felde $E_f = -e\,\mathfrak{E}_a'\,\mathfrak{s}_x + e\,\mathfrak{E}_a''\,x$ zusammen, wobei $\mathfrak{s}_x$ ein mit der Abszisse x veränderlicher Wert ist, welchem ein Mittelwert $\mathfrak{s}$ nach Gl. (1) entspricht. Ist kein äußeres elektrisches Feld vorhanden, so nehmen die Energiebeträge die mit Index Null versehenen Werte an. Bezeichnet $\varDelta E$ die Energie, um welche sich die Gesamtenergie infolge des elektrischen Feldes ändert, so erhalten wir:

$$E_k + E_p + E_f = E_{k_0} + E_{p_0} + \varDelta E\,. \tag{3}$$

In einem Coulombschen Felde ist $E_{k_0} = -\frac{1}{2} E_{p_0}$. Es findet sich dann für Gl. (3):

(4) $$E_k + E_p + E_f = \tfrac{1}{2} E_{p_0} + \Delta E,$$

oder mit obigen Werten für die Energiebeträge und etwas umgeordnet:

(5) $$\frac{m v^2}{2} - \frac{e^2 Z_{\text{eff.}}}{a} + e\,\mathfrak{E}_a'' x = -\frac{e^2 Z_{\text{eff.}}}{2 a_0} + \Delta E + e\,\mathfrak{E}_a' \mathfrak{z}_x.$$

Wir setzen:

$$\Delta E + e\,\mathfrak{E}_a' \mathfrak{z}_x = U$$

und beachten

$$x = a \cos \vartheta.$$

Aus Gl. (2) und (5) folgt dann

(6) $$\frac{1}{a^2} + \left(2 \frac{U}{e^2 Z_{\text{eff.}}} - \frac{1}{a_0}\right) \frac{1}{a} - 3\,\frac{\mathfrak{E}_a'' \cos \vartheta}{e Z_{\text{eff.}}} = 0.$$

Da U sehr klein gegen $\frac{e^2 Z_{\text{eff.}}}{a_0}$ ist, dürfen wir $2 \frac{U}{e^2 Z_{\text{eff.}}}$ gegen $\frac{1}{a_0}$ vernachlässigen und schreiben:

(6a) $$\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a_0} \frac{1}{a} - 3\,\frac{\mathfrak{E}_a'' \cos \vartheta}{e Z_{\text{eff.}}} = 0.$$

Die einzige brauchbare Lösung dieser Gleichung lautet:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{2 a_0}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{12 a_0^2 \mathfrak{E}_a'' \cos \vartheta}{e Z_{\text{eff.}}}}\right).$$

Wir schreiben für die Wurzel eine Reihe und lassen die höheren Potenzen weg, da $\mathfrak{E}_a''$ sehr klein gegen $\frac{e Z}{a_0^2}$ ist, also

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{a_0}\left(1 + 3\,\frac{a_0^2 \mathfrak{E}_a'' \cos \vartheta}{e Z_{\text{eff.}}}\right)$$

oder

$$a = \frac{a_0}{1 + 3\,\frac{a_0^2 \mathfrak{E}_a'' \cos \vartheta}{e Z_{\text{eff.}}}}.$$

Hierfür dürfen wir setzen:

(7) $$a = a_0\left(1 - 3\,\frac{a_0^2 \mathfrak{E}_a'' \cos \vartheta}{e Z_{\text{eff}}}\right).$$

Wir errechnen den folgenden Mittelwert:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a \cos \vartheta \, d\vartheta = -\frac{3}{2}\,\frac{a_0^3}{e Z_{\text{eff.}}} \mathfrak{E}_a''.$$

Makroskopisch betrachtet kommt für die Verzerrung der Bahnkurve durch $\mathfrak{E}_a''$ eine Verschiebung des Elektrons in Betracht, welche den Wert

$$\mathfrak{u} = -\frac{3}{2}\,\frac{a_0^3}{e\,Z_{\text{eff.}}}\,\mathfrak{E}_a'' \tag{8}$$

hat.

Machen wir uns zunächst ein Bild von der Größe der Abweichung der verzerrten Kurve vom Kreise. Wir berechnen die Strecke $A_0 A$, welche gleich

$$a_0 - a_{\text{min.}} = 3\,\frac{a_0^3}{e\,Z_{\text{eff.}}}\,\mathfrak{E}_a'' \cdot a_0$$

ist. Diese Strecke wird für die Polarisationselektronen am größten. Setzen wir z. B. für a_0 den Radius der dritten Elektronenschale des Schwefelatoms ein, nämlich $1{,}15 \cdot 10^{-8}$ cm, für $Z_{\text{eff.}}$ 4,17, so erhalten wir für eine Feldstärke von 100000 Volt/cm^{-1}: $a_0 - a_{\text{min.}} = 0{,}067 \cdot 10^{-3} \cdot a_0$. Denken wir uns den Atomradius auf 1 m vergrößert, so macht die Abweichung $A_0 A$ vom Kreise weniger als ein 0,1 mm aus. Wegen der oben eingeführten vereinfachenden Annahme erhalten wir für $C_0 C = a_{\text{max.}} - a_0$ denselben Wert. Die Abweichung ist so gering, daß wir sie zeichnerisch nicht darstellen können. Wir dürfen daher für die durch $\mathfrak{E}_a'$ bedingte Verschiebung $\mathfrak{s}$ der Elektronenbahn, welche wie ein Vergleich der Gl. (1) und (8) zeigt, ebenfalls sehr klein ausfällt, die Elektronenschale weiterhin noch als kugelförmig voraussetzen. Es gilt daher noch unsere frühere Ableitung des Vektors $\mathfrak{s}$.

Für die Feldstärke $\mathfrak{E}_a'$, welche eine Verschiebung $\mathfrak{s}$ in Größe des Radius a_0 erzeugt, ergibt sich der Wert $\frac{e\,Z_{\text{eff.}}}{a_0^3}$, vorausgesetzt, daß $\mathfrak{E}_a'$ eine Verzerrung der Kugelschale nicht hervorruft. Diese Feldstärke ist gleich derjenigen, welche der Atomkern am Orte des Elektrons erzeugt. Sie beträgt für ein äußeres Elektron des Schwefelatoms 4,5 Milliarden Volt/cm^{-1}.

Makroskopisch beschreiben wir den Einfluß des elektrischen Feldes wie folgt: Wir verschieben das Elektron von dem in Punkt O der Fig. 2 gedachten Atomkern aus zunächst um die Strecke $\mathfrak{u}$ entgegengesetzt dem Vektor $\mathfrak{E}_a''$, wodurch wir die in der ursprünglichen Bahnebene stattfindende Verzerrung der

Elektronenbahn berücksichtigen. Sodann verschieben wir das Elektron um die Strecke $\mathfrak{s}$ entgegengesetzt dem Vektor $\mathfrak{E}_a'$, wodurch wir der Neueinstellung der Bahnebene Rechnung tragen. Eine von $\mathfrak{E}_a'$ hervorgerufene Verzerrung der Bahnkurve tritt in der makroskopischen Darstellungsweise nicht in Erscheinung. Anstatt die Verschiebungen einzeln durchzuführen, können wir auch das Elektron um die Resultierende $\mathfrak{z}$ aus $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{s}$ verschieben. Der Vektor $\mathfrak{z}$ ist dem Vektor $\mathfrak{E}_a$ entgegengesetzt gerichtet, fällt aber nicht mit der Achse des äußeren Feldes zusammen; $\mathfrak{z}$ ist proportional der Feldstärke $\mathfrak{E}_a$.

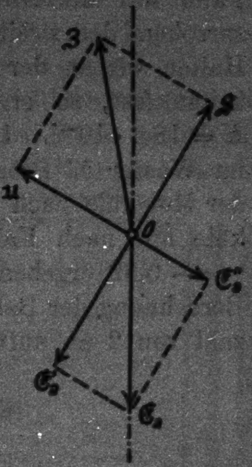


Fig. 2.

Wir projizieren die Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{s}$ auf die Achse des äußeren Feldes. Da für die Elektronen der einzelnen Atome die Vektoren $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{s}$ mit der Feldachse Winkel zwischen O und $\pi/2$ bilden, so errechnen wir durch einfache Integration für die Projektionen die Mittelwerte:

$$(9)\quad \mathfrak{s}_m = -\frac{1}{2}\frac{a_0^3}{e Z_{\text{eff.}}}\mathfrak{E}_a \quad \text{und} \quad (10)\quad \mathfrak{u}_m = -\frac{3}{4}\frac{a_0^3}{e Z_{\text{eff.}}}\mathfrak{E}_a .$$

Die beiden Mittelwerte der Projektionen von $\mathfrak{u}$ und $\mathfrak{s}$ auf eine zur Feldachse Senkrechten sind Null. Der Mittelwert der gesamten Elektronenverschiebung ist daher:

$$(11)\quad \mathfrak{z}_m = \mathfrak{s}_m + \mathfrak{u}_m = -\frac{5}{4}\frac{a_0^3}{e Z_{\text{eff.}}}\mathfrak{E}_a .$$

Statt der Gl. (5a) der früheren Abhandlung erhalten wir für die elektrische Polarisation

$$(12)\quad \mathfrak{P} = \frac{5}{4} K \mathfrak{E}_a$$

und statt Gl. (8) der früheren Abhandlung für die Dielektrizitätskonstante

$$(13)\quad \varepsilon = 1 + \frac{5\pi K}{1 - 5\pi K\left(\frac{1}{3} + s\right)} .$$

Für die Dielektrizitätskonstante des Wassers wurden in der früheren Abhandlung zwei Fälle in Rechnung gezogen.

Im ersten Falle waren an dem Sauerstoffatom die beiden Wasserstoffatome entsprechend dem ersten Bohrschen Kreise angelagert, was für K den Wert $2{,}87 \cdot 10^{-3}$ ergab. Im zweiten Falle war die Anlagerung des einen Wasserstoffatoms entsprechend dem zweiten Kreise. Hierfür fand sich $K = 34{,}57 \cdot 10^{-3}$. Halten wir an der Planckschen Annahme: $s = 0$ für Flüssigkeiten fest, so ergibt sich aus Gl. (13) für $\varepsilon = 80$ ein Wert $K = 18{,}4 \cdot 10^{-3}$. Letzter Wert kann nur dann entstehen, wenn im Wasser 51 Proz. der Moleküle nach Fall 1 und 49 Proz. der Moleküle nach Fall 2 vorhanden sind. Würden die Moleküle nur nach Fall 1 zusammengesetzt sein, so würde sich $s = -0{,}32$ ergeben. Wir wollen auch daran denken, daß die Berechnung der Bahnradien für die Atome mit einer Ordnungszahl von 2 an aufwärts unsicher ist.

(Eingegangen 10. Oktober 1923.)

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

VERLAG [illegible]

Die [illegible]

[illegible]

Die [illegible]
[illegible]

Seite
[illegible] Tafel II u. III 489
[illegible]
[illegible] 505
[illegible] mathematischen
[illegible] Tafel IV 554
[illegible] Druck-
[illegible] 577
[illegible] Strahlungs-
[illegible] 624
[illegible] in den Wellenlängen-
[illegible] 643
[illegible] (Nach-
[illegible] 647
[illegible] zu seiner Arbeit „Über die Zustands-
[illegible] 660

[illegible]

1924. № 7/8.

ANNALEN DER PHYSIK.

VIERTE FOLGE. BAND 73.

---

1. *Über Messungen der Leuchtdauer der Atome und der Dämpfung der Spektrallinien. III;*

von W. Wien.

(Hierzu Tafel II u. III.)

1. Die Wasserstofflinien bei höheren Spannungen.

Die bisherigen Messungen der zeitlichen Abklingungskonstanten der Intentität des von Atomen ausgehenden Lichts hatten für alle untersuchten Linienspektren denselben Wert ergeben, und zwar den, der aus der klassischen Elektronentheorie für die Spektrallinie H_α des Wasserstoffs folgt.

Es erschien nun wünschenswert, diese Messungen nach verschiedenen Richtungen zu ergänzen.

Zunächst waren die Wasserstofflinien bisher nur für einen kleinen Spannungsbereich der Entladungsspannung an der Kanalstrahlenröhre untersucht. Es blieb noch die Beobachtung bei höheren Spannungen übrig.

Die Versuchsanordnung war dieselbe wie in meiner zweiten Mitteilung.[1] Eine wesentliche Vereinfachung war später dadurch ermöglicht, daß an Stelle der bisher verwendeten zehn Diffusionspumpen aus Glas die neue Stahlpumpe von **Gaede**, wie sie von der Firma Leybold Nachf. in Köln geliefert wird, benutzt wurde. Die Leistung war nahe dieselbe wie die der zehn früheren Pumpen. Sie hängt in diesen Fällen wesentlich von der Röhrenlänge und -weite ab, die an gewisse Grenzen dadurch gebunden sind, daß sie durch ein Kühlgefäß mit flüssiger Luft gehen müssen, um die Quecksilberdämpfe zu beseitigen.

Die Messung des Intensitätsabfalls des Kanalstrahls in den einzelnen Spektrallinien geschah in derselben Weise wie früher durch Vergleich mit einer Linie, die durch einen keilförmigen Trog, der mit einer absorbierenden Flüssigkeit gefüllt war, der Länge nach geschwächt war. Theoretisch ist es nicht nötig, daß der Schwärzungsabfall der Kanalstrahllinie mit der Vergleichslinie zusammenfällt. Bei verschiedenem Schwärzungsabfall kann eine Umrechnung erfolgen. Es stellte sich aber bei den Beobachtungen heraus, daß bei solchen Umrechnungen eine weniger gute Übereinstimmung erzielt wurde. Daher wurden nur solche Messungen verwendet, bei denen die beiden Schwärzungskurven zusammenfielen.

---

[1] W. Wien, Ann. d. Phys. 66. S. 232. 1921.

Nach den früheren Mitteilungen ergibt sich die Dämpfungskonstante 2α der Intensität durch die Beziehung $k \gamma v = 2\alpha$, wo k der Absorptionsindex der Flüssigkeit, γ die Tangente des Keilwinkels, v die Geschwindigkeit der Kanalstrahlen ist. Die letztere wurde durch die Dopplerverschiebung gemessen, und zwar an den Linien H_β, H_γ, H_δ, wobei auf die Verschiebung des Maximums der Intensität eingestellt wurde.

Es ergab sich bei Verwendung eines lichtstarken Spektrographen der Firma Steinheil & Söhne von 1:2,5 Öffnungsverhältnis der Kameralinse und drei großen Flintprismen eine Dispersion von

54 Å/mm für H_β,
33 Å/mm für H_γ,
20 Å/mm für H_δ.

Aus den Verschiebungen fanden sich folgende Werte der Geschwindigkeiten:

Spannung	H_β	H_γ	H_δ
6000 Volt	$3{,}7 \cdot 10^7$	$3{,}7 \cdot 10^7$	$3{,}65 \cdot 10^7$
10000 Volt	$4{,}3 \cdot 10^7$	$4{,}1 \cdot 10^7$	$4{,}1 \cdot 10^7$

Eine kleine Korrektur ist an diesen Zahlen noch anzubringen, weil der Strahl nicht in seiner geraden Richtung, sondern unter dem Winkel von 15° anvisiert wurde, um nicht das Licht der Entladungsröhre zu erhalten.

Die Geschwindigkeit für 6000 Volt ist hiernach $3{,}8 \cdot 10^7$, für 10000 Volt $4{,}8 \cdot 10^7$.

Hieraus ergaben sich die auf der folgenden Seite angegebenen Werte für die Dämpfungskonstante 2α.

Die letzte Reihe gibt sowohl für H_α wie für H_β den Wert $5{,}4 \cdot 10^7\ \mathrm{cm}^{-1}$, während der theoretische Wert $5{,}35 \cdot 10^7$ ist.

Fig. 1 [1]) zeigt eine der Aufnahmen.

---

[1]) Figg. 1, 2, 4, 7, 12 u. 13 befinden sich auf Tafel II u. III.

Platte	$k\gamma$	v	Spannung	2α	Linie
V	1,42	$4{,}3 \cdot 10^7$	10000 Volt	$6{,}1 \cdot 10^7$	H_β
VI	1,42	$4{,}3 \cdot 10^7$	10000	$6{,}1 \cdot 10^7$	H_β
VIII	1,42	$3{,}70 \cdot 10^7$	6000	$5{,}4 \cdot 10^7$	H_α
IX	1,42	$3{,}70 \cdot 10^7$	6000	$5{,}4 \cdot 10^7$	H_α
IX	1,42	$3{,}70 \cdot 10^7$	6000	$5{,}4 \cdot 10^7$	H_β
X	1,42	$3{,}70 \cdot 10^7$	6000	$5{,}4 \cdot 10^7$	H_β
XI	1,42	$3{,}70 \cdot 10^7$	6000	$5{,}4 \cdot 10^7$	H_α
XII	1,42	$3{,}70 \cdot 10^7$	6000	$5{,}4 \cdot 10^7$	H_α
XIV	1,42	$3{,}70 \cdot 10^7$	6000	$5{,}4 \cdot 10^7$	H_α
XIV	1,42	$3{,}70 \cdot 10^7$	6000	$5{,}4 \cdot 10^7$	H_β
XV	1,42	$3{,}70 \cdot 10^7$	6000	$5{,}4 \cdot 10^7$	H_α
XV	1,42	$3{,}70 \cdot 10^7$	6000	$5{,}4 \cdot 10^7$	H_β

2. Beobachtungen von Dempster.

A. J. **Dempster** hat neuerdings Beobachtungen mitgeteilt[1]), aus denen er folgert, daß bei höheren Spannungen Wasserstoffatome vorhanden sind, deren Leuchten viel langsamer abklingt, als es bei niedrigen Spannungen der Fall ist. Er gibt an, daß bei Spannungen von 3000 Volt das gewöhnliche Abklingen eintritt, daß aber bei Spannungen von 7000 bis 20000 Volt ein erheblich langsameres Abklingen eintritt.

Die oben in 1. mitgeteilten Messungen, die bis zu Spannungen von 10000 Volt gehen, geben keinerlei Andeutungen solcher langsamer abklingender Atome. Da diese Beobachtungen sich jedoch auf eine Strecke von nur etwa 1,5 cm von der Öffnung, aus der die Kanalstrahlen in das hohe Vakuum austreten, erstrecken, während **Dempster** in einer Entfernung von 4 cm beobachtet, so habe ich einige neue Aufnahmen des Strahls gemacht.

Um den Strahl auf eine größere Länge zu photographieren, mußte auf die spektrale Zerlegung verzichtet werden. Da aber alles Licht im wesentlichen auf die Balmerserie bei Wasserstoff beschränkt bleibt und die verschiedenen Linien dieser Serie keinen Unterschied des Abklingens zeigen, so müßte auch die unzerlegte Aufnahme des Strahls alles Wesentliche geben. Fig. 2 gibt vier Aufnahmen des Kanalstrahls im hohen Vakuum bei den Spannungen 6000 Volt, 10000 Volt, 20000 Volt und 30000 Volt. Die entsprechenden Drucke im Beobachtungsraum waren 0,0009, 0,0006, 0,0004, 0,0003 mm Hg. Obwohl bei der Spannung von 30000 Volt der Druck nur den dritten

---

[1]) A. J. **Dempster**, Astrophys. Journ.. Vol. I, VII. Nr. 4. May 1923.

Teil derjenigen bei 6000 Volt war und alle Dämpfe durch Kühlen mit flüssiger Luft möglichst beseitigt wurden, so sieht man, daß trotz dem höhern Druck bei 6000 Volt das Leuchten des Strahls schließlich nicht mehr merklich ist; während man bei den höheren Spannungen seine Spur noch auf der ganzen Platte verfolgen kann.

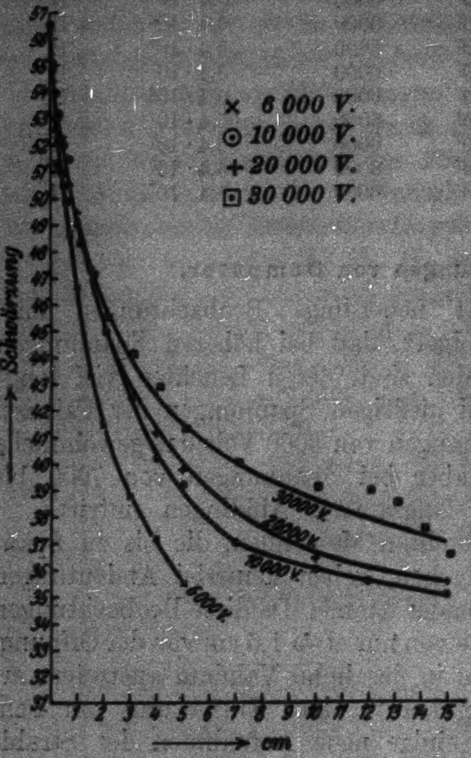


Fig. 8.

Fig. 8 zeigt den Schwärzungsabfall für die vier verschiedenen Spannungen. Es ist zu berücksichtigen, daß das Bild des Strahls, das durch ein Zeisssches Tessarobjektiv von 25 cm Brennweite und 1:3,5 Öffnungsverhältnis aufgenommen wurde, im Verhältnis 1:0,77 verkleinert war.

Anfänglich ist der Abfall der Schwärzungen in allen Kurven so nahe derselbe, daß die Unterschiede durch die Verschiedenheiten in der mittleren Geschwindigkeit der Kanalstrahlen bedingt sein müssen. Später weichen die Kurven erheblich voneinander ab.

Zunächst geht aus ihnen hervor, daß bei allen Spannungen der größte Teil der leuchtenden Atome dieselbe Abklingung zeigt. Bei der Spannung von 30000 Volt ist ein schwaches Leuchten des ganzen Raums trotz der hohen Luftleere zu bemerken, der einen merklichen Schleier auf der photographischen Platte hervorruft. Dieses Leuchten wird jedenfalls von den Gasresten ausgesandt.

Diese Beobachtungen stimmen nicht mit denen von Dempster, S. 199, angegebenen überein, die er mit den Worten beschreibt: „Wurde der Druck (im Entladungsraum) noch weiter verringert, z. B. auf 0,072 mm (15000 Volt Spannung, 2 Milliampère Strom), so blieb das sich fortsetzende Strahlenbündel sehr kräftig im Vergleich mit dem vorher (bei 5000 Volt) beobachteten schwachen Bündel und keine Abnahme der Intensität in den ersten wenigen Zentimetern war zu bemerken." Da bei meinen Versuchen Röhrenabmessungen und Kathodenform nahe dieselben wie bei **Dempster** waren und ich auch mit einem Strom von 2—3 M.A. arbeitete, so ist mir vorläufig der Grund der verschiedenen Ergebnisse nicht verständlich und es müssen erst weitere Beobachtungen für die Klärung der Frage abgewartet werden.

Ob man bei den Kurven Fig. 3 für höhere Spannungen den in größerer Entfernung übrig bleibenden Rest des Leuchtens auf Lichtaussendung des ruhenden Gases oder auf bewegte, aber langsam abklingende Atome schieben soll, ist nicht leicht zu entscheiden, da es kaum möglich ist, die Dopplerverschiebungen dieser geringen Lichtstärke zu beobachten.[1] Lichtaussendung des ruhenden Gases dürfte mit der Entfernung nicht abnehmen, sondern bei gleicher Strahlintensität unverändert bleiben. Aus den Schwärzungsabnahmen aller Kurven, auch in größerer Entfernung, könnte man geneigt sein zu schließen, daß hier tatsächlich langsame Abklingung und nicht Leuchten des ruhenden Gases vorliegt. Indessen muß man beachten, daß die, wenn auch schwache, Divergenz der Kanalstrahlen, die bei einer Länge von 1—2 cm nicht in Betracht kommt, doch nicht mehr ganz außer acht gelassen werden kann, wenn es sich um Entfernungen von 10—20 cm handelt. Der Strahl erscheint durch diese Divergenz verbreitert und die Schwärzung muß infolgedessen schätzungsweise so abnehmen, wie es den Kurven von 10000—30000 Volt in Fig. 3 ungefähr entspricht.

3. Helium.[2]

Die Beobachtung der Heliumlinie stößt auf die Schwierigkeit, daß in reinem Helium die Zerstäubung auch der Aluminiumkathoden sehr groß ist. Diese wird viel geringer, wenn dem Helium etwas Luft beigemischt wird, doch muß man sich hüten, diesen Luftzusatz zu groß zu machen. Fig. 4 enthält eine solche Aufnahme.

---

[1] Hierbei müßte noch berücksichtigt werden, daß beim Auftreten von Leuchten des ruhenden Gases auch wieder neue Anregungen der bewegten Atome auftreten.

[2] Das für die Versuche verwandete Heliumgas verdanke ich der Freundlichkeit von Sir E. **Rutherford** in Cambridge, der die Güte hatte, mir ein kleines Gefäß mit ziemlich reinem Helium gefüllt zu senden.

Fig. 5 zeigt den Schwärzungsabfall der Heliumlinien mit den Vergleichslinien, die mit Hilfe einer mit Helium gefüllten Geißlerschen Röhre gewonnen wurden. Der Gasfüllung der Kanalstrahlen ist etwas Luft beigemischt. Man sieht daher neben den Heliumlinien die Stickstofflinien.

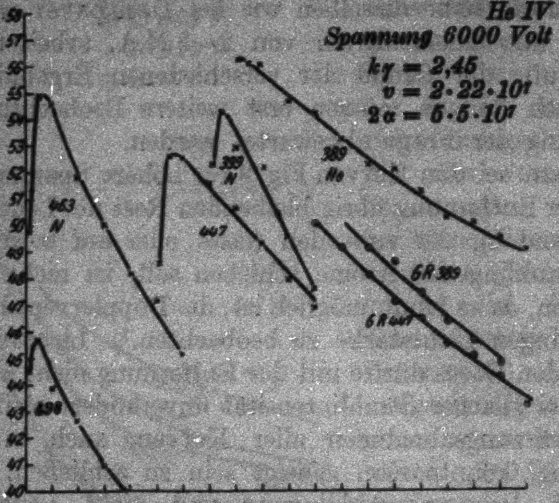


Fig. 5.

Auf Fig. 5 sieht man die Schwärzungskurve der Stickstofflinien 498 $\mu\mu$, 463 $\mu\mu$, 399 $\mu\mu$ und der Heliumlinien 447 $\mu\mu$ und 389 $\mu\mu$. Außerdem der Heliumvergleichslinien 447 $\mu\mu$ und 389 $\mu\mu$.

Der weit stärkere Abfall der Stickstoffkurven im Vergleich zum Helium fällt sofort in die Augen.

Der Schwärzungsabfall der Heliumlinien ist nahe derselbe und stimmt mit dem der Vergleichslinien überein. Dasselbe sieht man aus Fig. 6, wo die Punkte x sich wieder auf die Kanalstrahlenkurve, o auf die Vergleichslinie beziehen. Der Absorptionsindex der für den keilförmigen Trog zur Herstellung des Schwärzungsabfalls der Vergleichslinien verwendeten Flüssigkeit D war $k = 35{,}4$, und zwar vom Grün bis zum äußersten Blau ohne merkliche Änderung. Da die Tangente des Trogwinkels 0,0695 betrug, so ist $k\gamma = 2{,}45$.

Die Geschwindigkeit ergab sich aus den Dopplerverschiebungen der $\Delta\lambda$-Linien.

λ	Verschiebung	Dispersion	$\Delta\lambda$	v
414,39	0,12 mm	25 Å/mm	2,8	$2{,}02 \cdot 10^7$
402,63	0,15 „	20 „	3,0	$2{,}24 \cdot 10^7$
388,87	0,20 „	15 „	3,0	$2{,}30 \cdot 10^7$
386,76	0,20 „	15 „	3,0	$2{,}32 \cdot 10^7$
				$2{,}22 \cdot 10^7$

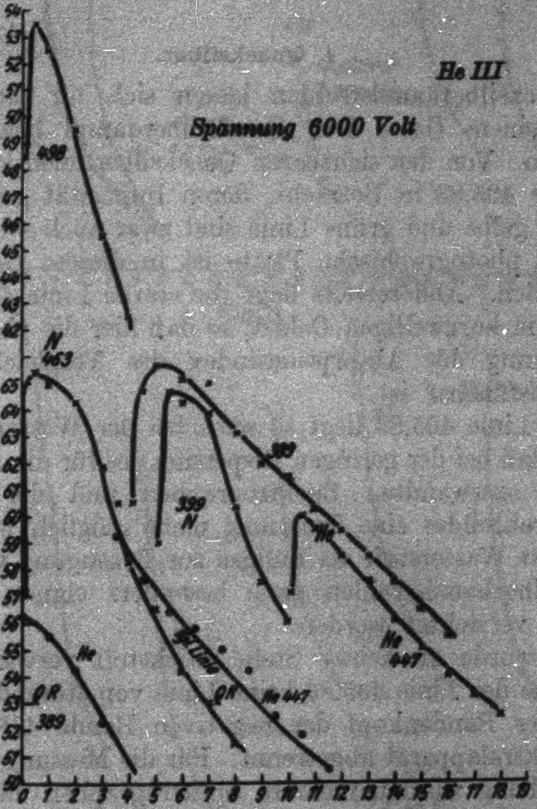


Fig. 6.

Die Dopplerverschiebung wurde mit einem Steinheilschen Spektrographen mit drei großen Flintprismen und einem Kameraobjektiv 1:2,8 gemessen. Für die langwelligeren Linien war die Dispersion nicht groß genug.

Die Abklingungskonstante ergibt sich also

$$2\alpha = k\,\gamma\,v = 5{,}42 \cdot 10^7\ \mathrm{sec}^{-1}$$

für die Linie 447,17 des Heliums (I. Nebenserie).

Auch für die Linie 388,86 (Hauptserie) des Heliums ergab sich nahe derselbe Schwärzungsabfall, eine eigentliche Messung konnte für diese Linie aber nicht vorgenommen werden, weil der Absorptionsindex für diese Farbe nicht mehr mit dem Spektralphotometer zu messen war.

4. Quecksilber.

Quecksilberkanalstrahlen lassen sich für längere Dauer nur in einem Gase, dem Quecksilberdampf beigemischt ist, herstellen. Von den sichtbaren Quecksilberlinien kam zunächst die Linie 435,83 in Betracht, deren Intensität genügend groß ist. Die gelbe und grüne Linie sind zwar auch sehr lichtstark, aber die photographische Platte ist in diesem Gebiet zu unempfindlich. Andererseits liegt die starke Linie 404,68 wieder zu sehr im kurzwelligen Gebiet, so daß hier die photometrische Bestimmung des Absorptionsindex des Vergleichsteils nicht mehr ausführbar ist.

Die Linie 435,83 liegt so nahe bei der Wasserstofflinie H_γ 434,05, daß bei der geringen Dispersion des für die Abklingungsversuche verwandten Spektrographen und der Breite des Kanalstrahlbildes eine Trennung nicht möglich war. Obwohl sich sonst Wasserstoff als Füllgas zur Erzeugung von kräftigen Quecksilberkanalstrahlen ganz besonders eignet, mußte hier auf ihn verzichtet werden.

Es wurde an keiner Stelle Stickstoff verwendet, der an der Stelle der Linie 435,86 keine Linie von störender Intensität hat. Der Bandenkopf der negativen Bande 428 wird durch den Spektralapparat abgetrennt. Für die Messung der Dopplerverschiebung wurden mehrere Spektrographen verwendet.

Für die Linie 435,86 ein Spektrograph mit drei großen Prismen aus schwerem Flint von Steinheil und zwei Triplettlinsen von Zeiss von 50 cm Brennweite.

Für die Linie 404,68 ergab sich eine Verschiebung von 0,11 mm. Die Dispersion betrug 9,2 Å./mm, die Dopplerverschiebung also 1,06 Å.-E. Daraus ergibt sich die Geschwindigkeit $v = 7{,}85 \cdot 10^6$ cm/sec bei einer Entladungsspannung von

9000 Volt. Die Geschwindigkeit der Quecksilberatome ist verhältnismäßig groß und kommt nahe an die aus der vollen Entladungsspannung sich ergebenden heran $(9{,}2 \cdot 10^6)$.

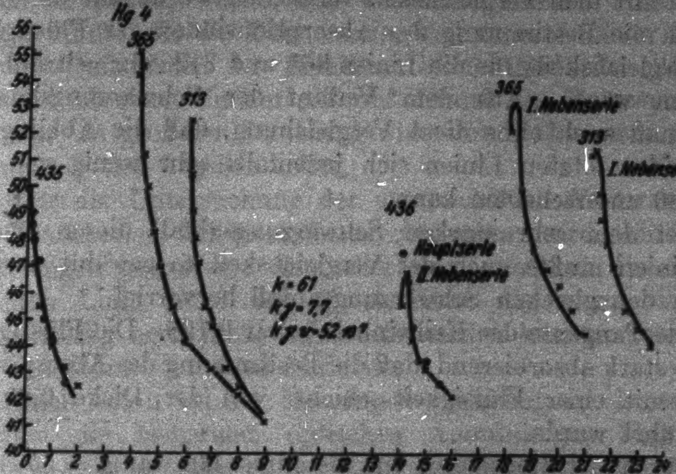


Fig. 8.

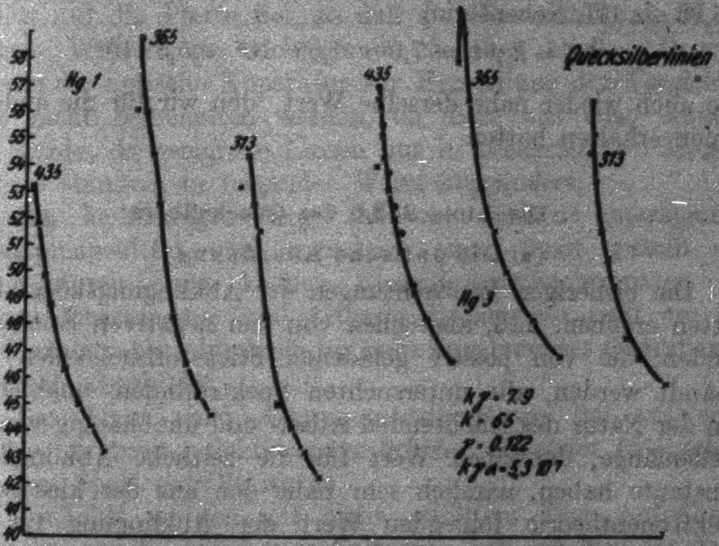


Fig. 9.

Fig. 7 zeigt die Aufnahmen für die Linien 435,83 (Hauptserie und II. Nebenserie), 365,01 (I. Nebenserie) und 312,57 (I. Nebenserie). Auf die beiden letzten Linien fallen noch die derselben Nebenserie angehörenden Linien 366,29; 365,48 und 313,15.

Auf Fig. 8 und 9 sieht man die Schwärzungskurven dieser Linie. Mit dem Vergleichskeil verglichen wurde nur die Linie 436, da die Bestimmung des Absorptionsindex der Flüssigkeit des Vergleichskeils für die Linien 365 und 313 sehr zeitraubend gewesen wäre. Aus dem Verlauf der Schwärzungskurven sieht man auch ohne diese Vergleichung, daß die Abklingung der beiden letzten Linien sich jedenfalls sehr wenig von der von 436 unterscheiden kann.

Bei dem sehr starken Schwärzungsabfall dieser Quecksilberlinien mußte auch der Vergleichskeil so gewählt werden, daß er den gleichen Schwärzungsabfall hervorrief.

Die Tangente des Keilwinkels γ war 0,128. Die Flüssigkeit war so stark absorbierend, daß die Bestimmung des Absorptionsindex mit einer Flüssigkeitsschicht von der Dicke 0,20 mm ausgeführt wurde.

Der Absorptionsindex für die Linie 436 war $k = 55\ \mathrm{cm}^{-1}$, also $k\gamma = 7{,}0$ und die Abklingungskonstante der Hg-Linie 435,83 $\mu\mu$ (II. Nebenserie)

$$2\alpha = k\gamma v = 7{,}0 \times 7{,}85 \cdot 10^6 = 5{,}5 \cdot 10^7,$$

also auch wieder nahe derselbe Wert, den wir für die anderen Linien erhalten hatten.

5. Die Linie 253,6 des Quecksilbers.

a) Die optische Anordnung.

Die bisherigen Beobachtungen der Abklingungskonstanten hatten ergeben, daß, abgesehen von den negativen Stickstoffbanden, die von positiv geladenen Stickstoffmolekülen ausgesandt werden, alle untersuchten Spektrallinien, unabhängig von der Natur des leuchtenden Atoms und unabhängig von der Wellenlänge, denselben Wert für die zeitliche Abklingungskonstante haben, nämlich sehr nahe den aus der klassischen Elektronentheorie folgenden Wert der Abklingung für die Linie H_α des Wasserstoffs.

Um nun weiter zu sehen, ob diese Zahl wirklich universell ist, wie man anzunehmen geneigt sein könnte, mußten Linien von möglichst verschiedenem Spektraltyp herangezogen werden. Dies erschien um so mehr wünschenswert, als inzwischen von

Sommerfeld und **Heisenberg**[1]) eine Theorie veröffentlicht wurde, nach welcher z. B. die von **Schumann** entdeckte Serie des Wasserstoffs in Ultraviolett, die später von **Lyman** genau untersucht wurde, eine wesentlich stärkere Abklingung zeigen müßte, als die Balmerserie, weil es nach dieser Theorie auf die Umlaufszeit des Elektrons in der Endbahn ankommt und bei kürzerer Umlaufszeit auf Grund des Korrespondenzprinzips ein größerer Strahlungswiderstand, also auch größere Dämpfung sich ergeben sollte.

Für die Untersuchung der ultravioletten Wasserstoffserie die mancherlei Schwierigkeiten begegnen wird, sind Vorbereitungen getroffen. Einfacher war, zunächst die der bekannten Linie 253,6 des Quecksilbers, die, wenn sie auch modellmäßig noch nicht behandelt werden konnte, doch auch die erste Linie der Grundserie ist.

Auch schon bei der Messung der Abklingung dieser Linie mußten die bisherigen optischen Anordnungen abgeändert werden. Zwar konnte der Quarzspektrograph unverändert beibehalten werden. Er wurde nur so justiert, daß das Ultraviolett auf die Platte fiel, so daß die Wasserstofflinie H_γ als längste Wellenlänge noch gerade sichtbar blieb. Dagegen konnte die optische Apparatur zur Herstellung der Vergleichslinie nicht beibehalten werden, da diese aus Glas bestand. Sie wurde, da geeignete Linsen nur in beschränktem Maß zu Gebote standen, in folgender Weise abgeändert.

Ein keilförmiger Trog, der aus dünnen Quarzplatten zusammengekittet war, wurde vor einen Spalt gestellt und dieser durch einen kleinen Quarzflußspathachromaten von 18 mm Durchmesser und 110 mm Brennweite reell am Ort der Kanalstrahlen durch ein im Rohr angebrachtes Quarzfenster hindurch abgebildet.

Das Licht einer Quarzquecksilberlampe fiel auf einen weißen, zerstreut reflektierenden Schirm, der unter 45°/₀ schräg vor den Spalt gestellt wurde.

Zunächst wurden mit nicht gefülltem Trog Aufnahmen gemacht, um die Linse so zu justieren, daß das Bild des Trogspalts bei abgenommenem Spektrographenspalt auf der Platte für alle Spektrallinien scharf erschien und auf der ganzen

---

1) **A. Sommerfeld** u. **W. Heisenberg**, Zeitschr. f. Physik **10**. S. 393. 1922.

Länge gleiche Intensität hatte. Um die Schärfe der Bilder genügend zu erhalten, wurde der Quarzflußspathachromat auf 10 mm Durchmesser abgeblendet. Die Entfernung der Linse vom Spalt betrug 240 mm, ihre Entfernung von dem reellen Bilde 210 mm. Es gehen also Strahlen durch den Trog, die höchstens einen Winkel von $2^1/_2{}^0$ miteinander bilden und Längenunterschiede von etwa 1 Promille haben, so daß die Neigung der Strahlen ohne Bedeutung ist.

Als absorbierende Flüssigkeit erwies sich dieselbe Mischung von Anilinfarben als zweckmäßig, die bereits für die Messung der Abklingung der im sichtbaren liegenden Wellenlängen gedient hatte. Der Absorptionsindex nimmt allerdings nach den kürzeren Wellenlängen des Ultravioletts hin allmählich erheblich zu, ohne ein Maximum der Absorption aufzuweisen. Um für die Ausmessung der Abklingung der Linie 253,6 die richtige Größe der Absorption zu erhalten, mußte die Flüssigkeit erheblich verdünnt werden. Die Verdünnung war so stark, daß die Absorption für die sichtbaren Strahlen nur für dickere Schichten sichtbar war und der Schwärzungsabfall der im sichtbaren liegenden Linien durch den Trogkeil nicht mehr mit Sicherheit gemessen werden konnte.

Die Tangente γ des Keilwinkels betrug für den Quarztrog 0,172. Das Bild des Trogspalts war bei der Linie 253,6 im Verhältnis 1:0,685 verkleinert, das Bild des Spektrographenspalts im Verhältnis 1:1,044 vergrößert.

b) Die Abklingungsaufnahmen.

Die Aufnahmen des aus dem engen Spalt austretenden Kanalstrahls geschah in gleicher Weise wie bei den früheren Messungen. Schon die ersten Platten zeigten, daß die Schwärzung für die Linie 253,6 viel langsamer abnahm als bei den anderen Quecksilberlinien.

Fig. 10 zeigt den Unterschied in der Abnahme der Schwärzungen für die Hg-Linien 365 und 253,6 bei verschiedenen Aufnahmen. Der Unterschied ist sehr groß.

Es bestand nun die Möglichkeit, daß bei der Linie 253,6 ein großer Teil der Intensität des ausgesandten Lichts von ruhenden Quecksilberatomen ausgesandt wurde. In diesem Fall konnte eine zu kleine Abklingung beobachtet werden. Zwar wurde der Quecksilberdampf durch Kühlung mit flüssiger Luft beseitigt, aber ein Urteil über die Größe des übrigbleibenden Dampfdrucks war nicht zu gewinnen.

Zunächst wurde nun eine Erniedrigung des Dampfdrucks dadurch herbeigeführt, daß das Rohr, in welches die Kanalstrahlen

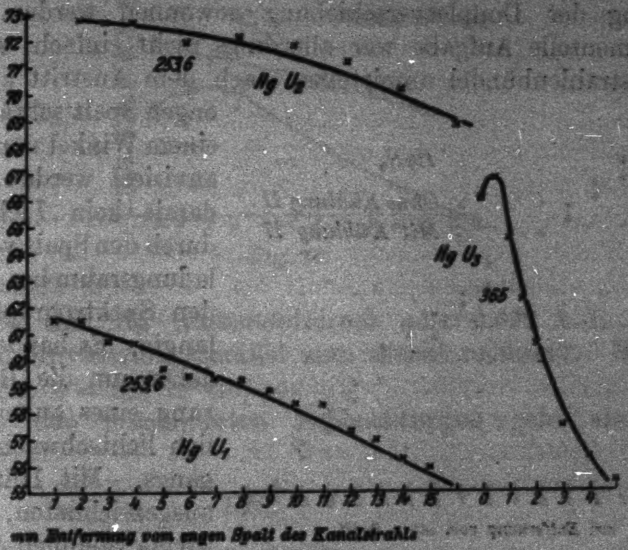


Fig. 10.

durch den engen Spalt treten, unmittelbar in flüssige Luft getaucht wurde, so daß nur der zur Beobachtung gelangende Teil des Kanalstrahls unmittelbar über der flüssigen Luft herausragte. Da bei den ersten Versuchen das zur Kühlung führende Rohr immerhin eine Länge von 20 cm hatte, so mußte durch die wesentliche Verringerung der Entfernung des Beobachtungsraums von den gekühlten Stellen der Dampfdruck herabgesetzt werden. Die Schwärzungskurve wurde hierdurch jedoch nicht im geringsten verändert.

Fig. 11 zeigt die Schwärzungskurven, wenn die zweite Kühlung unmittelbar am Beobachtungsraum angesetzt ist oder nicht. Sie zeigt keinen Einfluß der zweiten Kühlung. Ein starkes Überwiegen des von ruhenden Atomen ausgesandten Lichtes bei der Linie 253,6 ist an sich unwahrscheinlich, da die Beobachtungen der Dopplerverschiebung in dieser Beziehung keine Ausnahmestellung der Linie 253,6 gegenüber andern

Quecksilberlinien erkennen lassen, die viel stärkeren Schwärzungsabfall des Kanalstrahlenbildes zeigen.

Eine endgültige Entscheidung, ob in dem Kanalstrahlenbündel ein merklicher Teil der Lichtintensität von ruhenden Quecksilberatomen ausgesandt wird, konnte nur durch Beobachtung der Dopplerverschiebung gewonnen werden. Die experimentelle Aufgabe war allerdings nicht einfach, weil das Kanalstrahlenbündel unmittelbar nach dem Austritt aus dem engen Spalt schräg unter einem Winkel von 24° 45′ anvisiert werden mußte, damit kein Licht, das durch den Spalt vom Entladungsraum her kam, in den Spektrographen gelangte. Es handelte sich daher um die Beobachtung eines außerordentlich lichtschwachen Vorgangs. Mit Hilfe eines ausgezeichneten, von der Firma Steinheil & Söhne mit größter Sorgfalt ausgeführten Quarzspektrographen vom Öffnungsverhältnis 1:5, der in der unmittelbaren Nachbarschaft des Minimums der Ablenkung hervorragend gut abbildet, gelang es in der Tat, die Dopplerverschiebung der Linie 253,6 auf der photographischen Platte zu erhalten. Zum Vergleich wurde dieselbe Linie einer Geißlerschen Röhre an derselben Stelle, aber kürzer, photographiert, so daß die vom Kanalstrahl herrührende Linie über die der Geißlerschen Röhre hinausragte. Dabei wurde der Kanalstrahl durch ein Quarzfenster hindurch mit Hilfe eines Quarzflußspathachromaten auf dem Spalt des Spektrographen abgebildet. Fig. 12 zeigt in vergrößerter Aufnahme, daß die Linie des Kanalstrahlenbündels gegen die der Geißlerschen Röhre verschoben ist. *Das Licht der Linie 253,6 wird daher in merklicher Intensität nur von bewegten Atomen des Quecksilbers unter dem niedrigen Druck des Beobachtungsraumes ausgesandt.*

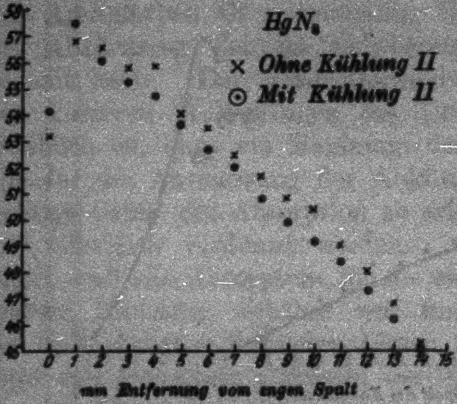


Fig. 11.

Gleichzeitig ergibt sich die Größe der Dopplerverschiebung selbst. Die Dispersion wurde aus dem Abstand der Linie

253,652 $\mu\mu$ und 253,470, deren Abstand nach den verschiedenen Beobachtern 1,8 Å.-E. ist. Der Abstand der beiden Linien auf der Platte betrug 0,195 mm. Die Dopplerverschiebung 0,07 mm, also 0,645 Å.-E. bei 10000 Volt Entladungsspannung und 0,001 mm Hg Wasserstoffdruck oder 0,698 Å.-E., wenn man auf Anvisierung parallel zum Strahl reduziert. Hieraus ergibt sich $v = 8{,}2 \cdot 10^6$ cm/sec.

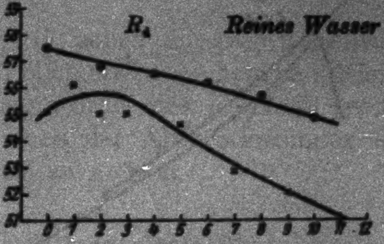


Fig. 14.

Aus den geschilderten Beobachtungen geht also mit Sicherheit hervor, daß die Abnahme der Schwärzung in dem Kanalstrahl der Abklingung der bewegten Atome entspricht.

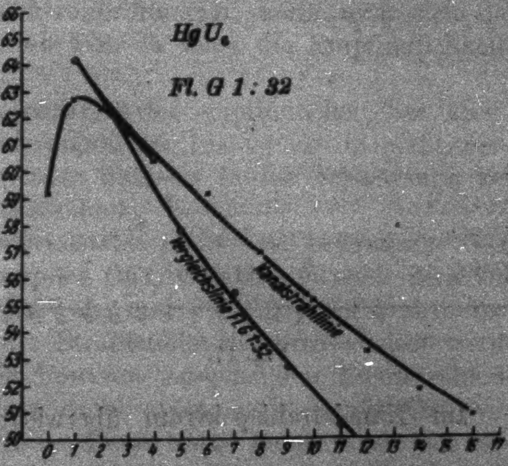


Fig. 15.

Es handelte sich nun darum, die gemessene Schwärzungsabnahme auf Intensitätsabnahme umzurechnen. Diese Berechnung ließ sich mit Hilfe der Vergleichslinien ausführen, die durch Abbildung des an dem keilförmigen Trog befindlichen Spalts erhalten wurden. Fig. 18 zeigt eine Aufnahme des Kanalstrahls durch die Linie 253,6 und des Vergleichs-

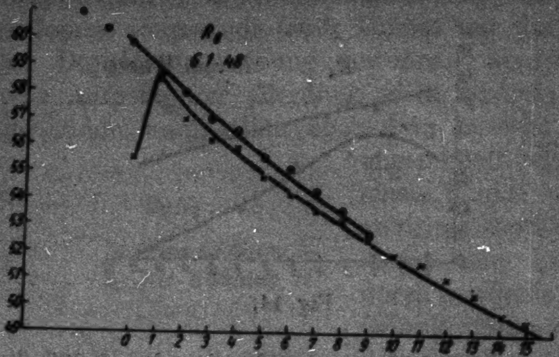


Fig. 16.

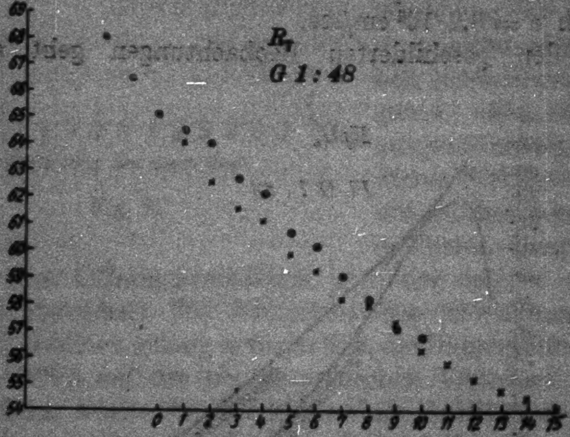


Fig. 17.

spektrums. Im Kanalstrahlspektrum überwiegt die Linie weitaus.

Fig. 14 gibt die Schwärzungskurve von Platte R_4, wenn der Trog mit reinem Wasser gefüllt war. Die Vergleichslinie 435 gab an beiden Enden die Schwärzungen 68,5, zeigte also keinen Schwärzungsabfall. Aus der Fig. 14 ist ersichtlich, daß ein Schwärzungsabfall für 253,6 vorhanden ist, weil Wasser diese Linie bereits merklich absorbiert. Die Absorption ist aber noch zu gering. Fig. 15 zeigt die Schwärzungskurven, wenn der Trog mit der absorbierenden Flüssigkeit *G*, die für die Absorption im sichtbaren Gebiet gedient hatte, im Verhältnis 1:32 verdünnt, gefüllt wurde. Hier ist der Schwärzungsabfall für die Vergleichslinie ○ stärker als für die Kanalstrahllinie ×.

Figg. 16 und 17 geben die beiden Schwärzungslinien für die Verdünnung 1:48. Sie haben hier parallelen Verlauf. Durch andere Aufnahmen wurde dies Ergebnis bestätigt.

Es ist nun noch der Absorptionsindex dieser Flüssigkeit für die Linie 253,6 zu messen.

c) Ultraviolette Photometrie.

Für photometrische Messungen im Ultravioletten kommen zwei Methoden in Frage: die Messung des lichtelektrischen Stroms und die photographische Schwärzung.

Die erste hat den Vorteil, daß der lichtelektrische Strom der Intensität des auffallenden Lichts proportional ist. Sie bedarf aber lichtelektrischer Zellen aus Quarz und umständlicher Verstärkeranordnungen, wenn man sich des Galvanometers bedienen will, da sonst die Empfindlichkeit nicht ausreicht.

Die Photographie ist empfindlicher, hat aber den Nachteil, daß Änderungen der Lichtstärke in meßbarer Weise vorgenommen werden müssen, da die Schwärzung kein Maß für die Lichtstärke bildet.

Um ultraviolettes Licht in bekanntem Verhältnis zu schwächen, wendet **Chr. Winther**[1] nach dem Vorgange von **R. Ham**, **R. B. Fehr** und **R. E. Bitner** Drahtnetze an, die an einer Stelle des Strahlenbündels eingeschaltet werden, wo die von einzelnen Punkten ausgehenden Lichtstrahlen möglichst das ganze Netz durchsetzen, z. B. unmittelbar vor einer abbildenden Linse. Diese Netze haben aber den Nachteil, daß die Bilder durch sie infolge der auch bei völliger Schwärzung des Netzes nicht ganz zu vermeidenden diffusen Reflexion verschlechtert werden. Ich habe sie aber als willkommene Kontrollmethode gut verwenden können.

Die Messung des Absorptionsindex geschah in folgender Weise. Zunächst wurde dieselbe Anordnung wie bei der oben beschriebenen Herstellung des Vergleichsspektrums benutzt. Die Flüssigkeit wurde in den keilförmigen Trog gebracht und eine Aufnahme gemacht, bei der längs jeder Spektrallinie eine stetig sich ändernde Schwärzung eintrat. Anfangs wurde Flüssigkeit *G* 1:32 verwendet. Nach dieser Aufnahme wurde eine zweite ohne Trog mit zwei Quarzplatten an seiner Stelle gemacht, dann wurde vor den weißen reflektierenden Schirm das Drahtnetz gebracht und das auf ihn fallende Licht geschwächt. Schließlich wurde die zweite Aufnahme wiederholt. Mit dem Hartmannschen Mikrophotometer wurde nun die Schichtdicke aufgesucht, die gleiche Schwärzung zeigte wie die Aufnahme mit dem Drahtnetz. Dann wurde nach dem Verdünnungsgrade die Schichtdicke berechnet, die bei der Flüssigkeit *G* 1:48 dieselbe Schwächung für die Linie 253,6 gibt, wie das Drahtnetz. Diese Schichtdicke wurde für einen Trog mit parallelen Quarzplatten gewählt, der für die weiteren Messungen benutzt wurde.

---

[1] **Chr. Winther**, Zeitschr. f. wiss. Photographie 22. S. 125. 1923.

Nun wurde ein Drahtnetz ausgesucht, das genau gleiche Schwächung des Lichts ergab wie die Schicht der Flüssigkeit *G* 1:48 von 2,70 mm Dicke. Das Netz, von dem ersten wenig verschieden, war ein Messingdrahtnetz von 0,4 mm Maschenabstand, beiderseits mit Lampenruß sorgfältig berußt. Durch Messung mit dem Spektralphotometer für grünes Licht ergab sich die Schwächung des Drahtnetzes auf 24,8% der ursprünglichen Intensität. Messung mit dem Lummer-Brodhunschen Photometer ergab 23,5%.

Nun wurde die Quecksilberquarzbogenlampe auf einen fahrbaren Tisch gesetzt, um die Entfernung zwischen ihr und dem Schirm verändern zu können. Es wurde nun eine Reihe von Aufnahmen mit dem Spektrographen gemacht, bei welchem besonders auf Unveränderlichkeit der Quecksilberlampe zu achten war. Die Lampe wurde an eine Akkumulatorenbatterie gelegt und ihre Spannung gemessen. Es zeigte sich, daß nach mehrstündigem Brennen der Lampe die Spannung sich nicht merklich mehr änderte. Dann erwies sich auch die Lichtstärke als genügend gleichmäßig. Um sich der Unveränderlichkeit der Lichtstärke der Lampe zu versichern, wurden bei jeder Reihe von Aufnahmen solche unter gleichen Verhältnissen wiederholt, die dann gleiche Schwärzung haben mußten. Aufnahmen, bei denen die Lampe nicht unverändert geblieben war, wurden natürlich verworfen. Folgende Beispiele für die Beobachtung seien gegeben:

Aufnahme VIII.

Flüssigkeit im Trog *G* 1 : 48.

Entfernung der Lampe vom Schirm	Schwärzungsskala Linie 253,6
94 cm mit Trog	48,2
94 cm mit Netz	48,2
194 cm ohne Abschwächung	48,1
94 cm mit Trog	48,1
94 cm mit Netz	47,9
94 cm mit Trog	48,1
94 cm ohne Abschwächung	54,5

Aufnahme XI.

Flüssigkeit im Trog *G* 1 : 48.

Entfernung der Lampe vom Schirm	Schwärzungsskala Linie 253,6
94 cm mit Trog	60,0
184 cm ohne Trog	59,3
194 cm „ „	58,5
94 cm mit Trog	59,5
184 cm ohne Trog	59,5
194 cm „ „	58,0
94 cm mit Trog	59,7

Bei den Aufnahmen ohne Trog waren wieder zwei Quarzplättchen vor den Spalt gesetzt, um die an den Quarzplatten des Trogs auftretenden Reflexionen zu berücksichtigen.

Die Aufnahmen ergaben, daß die Schichtdicke 0,270 cm der Flüssigkeit dieselbe Schwächung im Licht der Linie 253,6 hervorruft wie die Vergrößerung der Entfernung von 94 auf 184 cm. Da die Messung mit den Drahtnetzen nur zur Kontrolle gedient hatte, im übrigen aber gewisse Unsicherheit bot, da die Schwächung durch das Netz vom Schwärzungszustand des Netzes und der Dicke der Rußschicht abhängig ist, so wurden den schließlichen Messungen die Beobachtungen mit geänderter Entfernung zugrunde gelegt. Als Schwächung des Lichts von 253,6 durch die Schicht der Flüssigkeit von 0,270 cm

Dicke ergab sich $\left(\frac{94}{184}\right)^2 = 26\,\%$ und hieraus der Absorptionsindex für die genannte Linie $= 5{,}0\ \mathrm{cm}^{-1}$.

Um die zeitliche Abklingungskonstante zu berechnen, müssen wir noch in Rechnung setzen, daß der Vergleichsspalt im Verhältnis 1:0,685 verkleinert war, was auf dieselbe Wirkung hinauskommt, als wenn die Absorptionsindex in demselben Verhältnis vergrößert würde. Andererseits ist für die Linie 253,6 die Vergrößerung des Kanalstrahlbildes 1,044. Es ergibt sich also

$$2\alpha = \frac{k\,\gamma\,v\;1{,}044}{0{,}685} = \frac{5\cdot 0{,}173\cdot 8{,}2\cdot 10^6\cdot 1{,}044}{0{,}685} = 1{,}08\cdot 10^7,$$

also ein erheblich kleinerer Wert als bei den anderen, bisher untersuchten Spektrallinien.

Es ist noch an eine Korrektion zu denken, die durch die Divergenz des Kanalstrahlenbündels bedingt ist. Diese Divergenz, die sich nicht vermeiden läßt, ist nicht groß und macht auf der kurzen, meist 1,5 cm betragenden Wegstrecke, auf der der eigentliche Intensitätsabfall gemessen wird, für die bisher erhaltenen starken Abklingungen nichts aus. Bei der Linie 253,6, bei der die Intensitätsabnahme erheblich schwächer ist, muß sie wenigstens in Betracht gezogen werden. Um über die Größe des Einflusses der Divergenz ein Urteil zu gewinnen, wurde die Intensität der Linie in der Querrichtung einmal unmittelbar an der Austrittsstelle der Kanalstrahlen aus dem engen Spalt, dann in 1 cm Entfernung gemessen. Die Intensitäten wurden aus den Schwärzungen mit Hilfe der bekannten

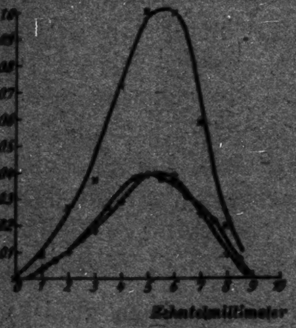


Fig. 18.

Linienbreite

I × Intensitätskurve unmittelbar am Spalt, aus dem die Kanalstrahlen austreten.

II ⊙ Intensitätskurve in 10 mm Entfernung.

+ Intensitätskurve, wenn die Ordinaten von I im Verhältnis 10 : 4,2 verkleinert sind.

Intensitätskurve der Vergleichslinie gewonnen. Fig. 18 zeigt diese Intensitätskurven.

Der Einfluß der Divergenz zeigt sich darin, daß die in 1 cm Entfernung gemessene Kurve ⊙, verglichen mit der Kurve ×, die man erhält, wenn man sämtliche Ordinaten der Kurve × (die der Intensitätsverteilung unmittelbar am Spalt entspricht) im Verhältnis der Maximalordinaten verkleinert, eine etwas größere Fläche umspannt. Es ist eben etwas von der Lichtintensität der Mitte der Linie in die seitlichen Teile übergegangen. Wenn man die Ordinaten der Kurve × somit erhöht, daß gleiche Flächen umschlossen werden, ist der Einfluß der Divergenz beseitigt. Die Korrektion ist so klein, daß sie in die Beobachtungsfehler fällt. Wir können sie auf 6% schätzen, so daß der erhaltene Wert beträgt:

$$2\alpha = 1{,}02 \cdot 10^7 \text{ sec}^{-1}.$$

Zusammenfassung.

Es seien nunmehr die bisherigen Ergebnisse zusammengestellt:

1. Durch die Beobachtungen der ersten Mitteilung war gefunden für

H_α	$6{,}44 \cdot 10^7$
H_β	$6{,}18 \cdot 10^7$
H_γ	$6{,}07 \cdot 10^7$
O Funkenlinien	$6{,}55 \cdot 10^7$

2. In der zweiten Mitteilung

H_β	$4{,}35 \cdot 10^7$
H_γ	
Von positiv geladenen Molekülen ausgesandte Banden von Stickstoff	$3{,}2 \cdot 10^7$

3. In der vorliegenden war

H_α	$5{,}40 \cdot 10^7$
H_β	$5{,}40 \cdot 10^7$
He (447,85, Hauptserie)	$5{,}42 \cdot 10^7$
Hg (435,83, II. Nebenserie)	$5{,}5 \cdot 10^7$
Hg (253,6, Grundserie)	$1{,}02 \cdot 10^7$

Theoretischer Wert aus der klassischen Theorie für $H_\alpha = 5{,}35 \cdot 10^7$,

H. W. Webb[1] teilt Messungen der Zeitdauer der Ausstrahlung der Resonanzlinie des Quecksilbers mit und findet $2\alpha = 10^6$, neuerdings sogar erheblich kleinere Werte.[2]

K. J. Compton[3] hat indessen darauf hingewiesen, daß die Resonanzstrahlung sich in einem Gase nach den Gesetzen der Diffusion fortbewegt, indem die ausgesandte Strahlung immer wieder absorbiert und aufs neue ausgesandt wird, so daß bei diesen Vorgängen viel längere Zeiten gemessen werden. Da in meinen Versuchen der Quecksilberdampf sowohl als auch die Kanalstrahlen selbst verschwindend kleine Dichte hatten, kann diese Wirkung kaum eintreten, würde aber, selbst wenn sie vorhanden wäre, die Ergebnisse der Messungen nicht beeinflussen.

Auch bei den hier mitgeteilten Arbeiten bin ich von Herrn Oberwerkführer Knöllinger in sehr dankenswerter Weise unterstützt worden.

München, Physikal. Institut der Univ., November 1923.

---

[1] H. W. Webb, Phys. Rev. (2) **21.** S. 479. 1923. Nr. 4.

[2] H. W. Webb, Phys. Rev. (2) **21.** S. 719. 1923.

[3] V. P. Compton, Phil. Mag. **45.** S. 750. 1923.

(Eingegangen 30. November 1923.)

2. *Über gestreute Röntgenstrahlung.*
I. Teil: Die azimutale Verteilung der Röntgenstreustrahlung;
von W. Friedrich und M. Bender.

Einleitung.

Die Arbeiten über die Streuung von Röntgenstrahlen sind unter anderem zur Erforschung zweier Fragen unternommen worden: 1. zur Bestimmung des Streuungskoeffizienten, 2. zur Untersuchung über die Anordnung und Zahl der Elektronen im Atome.

Der Streuungskoeffizient ist bekanntlich definiert durch die Gleichung $J = J_0 e^{-sd}$, wobei J_0 die primäre Intensität, J die austretende, d die Schichtdicke und s den Streuungskoeffizienten bedeutet. Die Streuung verringert die ursprüngliche Energie nach demselben Gesetz wie die Absorption, daher spricht man von einer „Absorption durch Streuung". Es ist s die Streuung in der Volumeinheit; dividiert man s durch die Dichte ϱ, bildet also s/ϱ, so erhält man die Streuung in der Masseneinheit. **Barkla**[1]), **Barkla** und **Sadler**[2]), **Crowther**[3]), **Hull** und **Rice**[4]) beschäftigten sich mit der Bestimmung von s und s/ϱ; neuerdings ist diese Aufgabe wieder von mehreren Seiten der Untersuchung unterzogen worden, wie die Arbeiten von **Ishino**[5]), **Dessauer**[6]), **Holthusen**[7]), **Neukirchen**[8]) zeigen. **Glocker**[9]) hat diese Aufgaben besonders von rechnerischer Seite aus beleuchtet.

---

[1]) C. G. **Barkla**, Phil. Mag. 7. S. 544. 1904.

[2]) C. G. **Barkla** u. C. A. **Sadler**, Phil. Mag. 17. S. 739. 1909.

[3]) J. A. **Crowther**, Proc. Soc. A. 85. S. 29. 1911; 86. S. 478. 1912.

[4]) G. F. **Hull** u. E. M. **Rice**, Phys. Rev. 8. S. 326. 1916.

[5]) M. **Ishino**, Phil. Mag. 33. S. 129. 1917.

[6]) F. **Dessauer** u. **Vierheller**, Zeitschr. f. Phys. 4. Heft 6. S. 131 u. F. **Dessauer** u. **Back**, Verh. d. D. Phys. Ges. 21. S. 9 u. 10. 1919.

[7]) H. **Holthusen**, Phys. Zeitschr. S. 5. 1919/20.

[8]) Joh. **Neukirchen**, Zeitschr. f. Physik 6. S. 11. 1921.

[9]) R. **Glocker**, Phys. Zeitschr. 1918. S. 249.

Die Untersuchungen über den Streuungskoeffizienten sind jedoch sämtlich mit Unsicherheiten behaftet, einmal wegen der Inhomogenität der verwendeten Strahlung und dann, weil bei der direkten Bestimmung des Streuungskoeffizienten meist feste Körper verwendet worden sind, bei denen Kristallinterferenzen auftreten und zu Fehlerquellen Anlaß geben können.

Eine genaue Bestimmung des Streuungskoeffizienten ist von hoher Bedeutung in physikalischer und auch in praktischer Hinsicht für die Aufklärung der Dosenverhältnisse innerhalb eines ausgedehnten streuenden Mediums, was bei medizinischen Fragen eine Rolle spielt. Deshalb wurde diese Aufgabe genaueren Messungen unterzogen.

In der vorliegenden Arbeit wurde zunächst die azimutale Streuverteilung untersucht, da bei der von uns beabsichtigten Methode zur Bestimmung des Streuungskoeffizienten diese Verteilung erforderlich ist. Die Verteilung der Streustrahlung kann gleichzeitig ein Bild geben über den Atombau des zu untersuchenden Körpers. Durch die Röntgenstrahlen, deren Wellenlängen von gleicher Größenordnung sind, wie die Abstände der Elektronen des Atoms, werden diese in zwangläufige, schwingende Bewegung versetzt. Sie wirken als elementare Oszillatoren und die von ihnen ausgestrahlte Energie stellt die gestreute Energie dar. Die Elementarwellen der Elektronen auf dem Atom sind wegen ihrer Anregung durch dieselbe Primärwelle kohärent und können zu Interferenzen Anlaß geben. Diese Anschauungen sind von Debye[1]) rechnerisch ausgeführt worden. (In einem späteren Kapitel wird hierüber noch berichtet werden.) Veranlassung zu seinen Überlegungen gaben ihm hauptsächlich die Erscheinung der Dissymmetrie in der Verteilung, die sich bei allen Streumessungen zeigt und die Interferenzerscheinungen an Wachs und Paraffin, die der eine von uns früher beobachtet hat.[2]) Die Dissymmetrie war seiner Zeit als Stütze für die Korpuskulartheorie herangezogen worden. Debye vermutete, daß sie durch eine Interferenzerscheinung zu erklären sei.

Die Dissymmetrie besteht darin, daß die Streuung auf der Eintrittsseite geringer ist, als auf der Austrittsseite. Unter

---

1) P. Debye, Ann. d. Phys. 46. S. 809. 1915.

2) W. Friedrich, Phys. Zeitschr. 14. S. 317. 1913.

der Eintrittsseite wird die Seite verstanden, auf welcher der Primärstrahl in den Streukörper eintritt.

Mit Streuversuchen nach diesen Richtungen hin haben sich in neuerer Zeit Kohlrausch[1]) beschäftigt, auch im Hinblick auf die Debyesche Theorie[2]), die Glocker und Kaupp[3]) erweitert haben. Glocker[4]) selbst hat diese Theorie angewandt auf Messungen von Bragg[5]) am Steinsalz. Es wird später noch darauf zurückzukommen sein.

Was sehr wesentlich schien für die folgenden Untersuchungen, war eine möglichst monochromatische Strahlung. Diese wurde erreicht durch Einschalten eines besonderen Filters in den Strahlengang. Es wurde eine Lilienfeldröhre mit Platinantikathode gewählt und als absorbierendes Filter Wolfram in geeigneter Dicke verwendet. Fig. 1 zeigt die Spektralaufnahme vor und nach der Filterung. Man sieht ohne weiteres, daß durch die selektive Absorption des Wolframfilters fast nur das K_α Dublet in Betracht kommt. Die so gewonnene Strahlung bietet außerdem den Vorteil der Unpolarisiertheit, was für den vorliegenden Fall erforderlich ist.

Fig. 1.

Nach Lilienfeld und Seemann[6]) besitzen die Wellenlängen der K-Serie des Pt folgende Werte:

		$\lambda = 10^{-8}$ cm
Pt	α_1	0,1842
Pt	α_2	0,1912

Es wurde für das folgende ein Mittelwert von $\lambda = 0{,}19 \cdot 10^{-8}$ cm angenommen.

Als Meßmethode wurde die Methode der Ionisation, als Meßapparat ein Elektrometer verwendet. Die streuenden Körper waren: Lithium, Natrium, Kalium, Wasser, Methylalkohol. In Verbindung mit Wasser schien es geeignet, eine andere Flüssigkeit von verhältnismäßig geringem Molekulargewicht (bei Elementen nicht zu hoher Atomzahl) zu vergleichen. Es wurde dazu Methylalkohol gewählt, um zu sehen, welchen Einfluß das Kohlenstoffatom ausübt. Die Alkalimetalle wurden außer in flüssigem Zustande auch in festem untersucht.

---

[1]) W. Kohlrausch, Streuung der γ-Strahlen. Phys. Zeitschr. 1920. S. 193.

[2]) a. a. O.

[3]) R. Glocker u. M. Kaupp, Ann. d. Phys. 64. S. 541. 1921.

[4]) M. Glocker, Zeitschr. f. Physik 5. S. 389. 1921.

[5]) W. H. Bragg, J. N. James u. C. H. Bosanquet, Zeitschr. f. Phys. 8. S. 77. 1922; Phil. Mag. 41. S. 309. 1921.

[6]) J. E. Lilienfeld u. H. Seemann, Phys. Zeitschr. 1918. S. 269.

Versuchsanordnung.

Die Apparatur, die zu den folgenden Messungen verwandt wurde, war angeordnet wie Figg. 2 und 3 zeigen. An dem für Strahlen undurchlässigen Schutzkasten der Lilienfeldröhre war eine verstellbare Bleiblende B_1 angebracht, durch die ein Strahlenbündel von 5 mm Durchmesser herausgeblendet wurde. Von da nahm der Strahlengang seinen Lauf durch eine Schutzwand B_2, eine zweite rechteckige Bleiblende B_3 und fiel auf den streuenden Körper S. Dieser stand inmitten eines kreisrunden Tisches. Auf dem Tische lag eine etwa 1 cm dicke, ebenfalls runde Spiegelglasplatte. Die Bleiblende B_3 konnte in einem Stativ verschoben werden. Letzteres war auf einem Holzfuß befestigt, der mit Wachskitt auf der Glasplatte festgehalten wurde. Hinter dem streuenden Körper war halbkreisförmig eine Bleiwand *Pb* aufgestellt, um nicht-

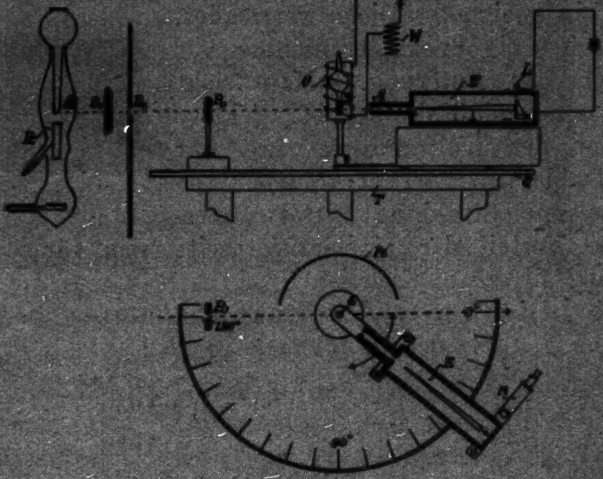


Fig. 2.

gewollte Strahlen nach Möglichkeit abzuhalten. Auf der Glasplatte befand sich ein Gestell, das das zur Messung dienende Elektrometer trug. Das Gestell konnte vermittelst eines Halters mit einem Zapfen in der Mitte des Tisches um den Zapfen als Achse bewegt werden. Drei Stellschrauben des Gestelles gestatteten es, die Achse des Elektrometers in jede gewünschte Lage einzustellen. Eine Kreiseinteilung aus Papier war auf der Glasplatte aufgeklebt, wie aus Figg. 2 und 3 zu ersehen ist. Der Winkelbereich belief sich von 0° bis 180°. Gemessen wurde von 10° zu 10°, unter bestimmten Umständen auch von 5° zu 5°. Bei 0° und bei 180° konnte natürlich nicht gemessen werden. Infolge der Dimensionen des Elektrometers war es auch nicht möglich, bei 170° zu messen.

Fig. 3.

Elektrometer.

Das Elektrometer hatte eine Länge von etwa 35 cm, die Breite und die Höhe betrugen 8 cm. Der röhrenartige Ansatz *A* hatte eine Länge von 10 cm, und einen Durchmesser von 3 cm. Das Elektrometer war aus einzelnen Platten von 1 cm Wandstärke zusammengesetzt, die vermittelst Schrauben festgehalten wurden. Die Platten selbst bestanden aus Hartblei. Inmitten des Elektrometers, das wie schon erwähnt, als Ionisationskammer diente, ging eine lange, kreiskegelförmige Elektrode aus Messing, deren eines Ende, dasjenige der Eintrittsseite der Strahlen, die Spitze des Kegels darstellte und an deren anderem Ende ein zur Elektrode senkrechtes Messingstück sich befand, an dem ein Goldblatt angeklebt war. Die Elektrode war in der Mitte, durch ein ebenfalls zu ihr senkrecht gestelltes Messingstäbchen in einem Bernsteinstück auf dem Boden des Instrumentes befestigt. Die Elektrode hatte diese Form erhalten, damit die Strahlen streifend auf die Elektrode fielen. Bei streifender Inzidenz ist die Elektronenemission am stärksten. Hierdurch wurde die Empfindlichkeit des Elektrometers erhöht. Ein Fenster aus dickem Bleiglas ließ den Durchblick auf das Goldblatt gewähren. Diesseits des Fensters befand sich ein Mikroskop, jenseits ein kleines Lämpchen. Oben am Elektrometer befand sich die Aufladevorrichtung. Zur Ladung wurde eine Akkumulatorenbatterie von 120 Volt verwendet. Der zylinderische Ansatz *A* besaß eine runde Auffangöffnung für die Strahlen von 1 cm Durchmesser. Die Entfernung von *A* bis zum streuenden Körper *S* betrug etwa 6 cm. Der Öffnungswinkel der gestreuten Strahlen war etwa 5°. Der zylinderische Hohlgang von *A* war am anderen Ende mit einem Celluloidblatt verdeckt, um das Innere des Elektrometers gegen den Außenraum zu dichten. Ein dünnes Celluloidblatt besitzt für die benutzte Strahlung keine merkliche Absorption im Vergleich zu Luft. Um das Instrument für die schwache Streustrahlung empfindlich zu machen, wurde die Kammer in bekannterweise mit Äthyljodiddampf beschickt. Zu dem Zwecke befand sich oben am Deckel des Elektrometers eine Öffnung, durch welche eben eine Pipette eingelassen werden konnte. Sie stieß dabei auf ein Glasschälchen zum Aufnehmen der Flüssigkeit. Die kleine Öffnung wurde während der Messungen mit einem Bleipfropfen verschlossen.

Elektrischer Ofen.

Bei unseren Untersuchungen wurden auch die Alkalimetalle in flüssiger Form bestrahlt. Die betreffenden Substanzen wurden zu dem Zweck in einen elektrischen Ofen gebracht. Dieser bestand aus einer Tonzelle, auf welcher ein Konstantandraht aufgewickelt war. Das Ganze war aus einer Masse von Asbestpulver und Wasserglas umgeben. Hierdurch wurde eine konstante Temperatur gewährleistet. Diese wurde mittelst eines Thermometers gemessen. Durch einen Widerstand konnte die gewünschte Temperatur hergestellt werden.

Die Länge des Ofens, der oben durch einen Korkpfropfen verschlossen wurde, betrug 14 cm, der Durchmesser 6 cm. Um den Strahlen Eintritt zu gewähren, war eine 2 cm hohe, schlitzförmige Öffnung angebracht, die $^3/_4$ des Ofenumfanges einnahm und 2 cm oberhalb des Ofenbodens begann. Die Öffnung wurde mit einem möglichst dünnen gebogenen Glimmerstreifen verschlossen.

Röntgenapparatur.

Die Lilienfeldröhre wurde mit einem großen Transformator betrieben, der mit Wechselstrom von 500 Perioden gespeist wurde (Radio-Silex der Firma Koch u. Sterzel, Dresden). Bei großer Intensität der Röntgenstrahlen lieferte der Apparat eine recht gute Konstanz der Strahlung, was die langwierigen Messungen außerordentlich erleichterte.

Einstellung der Apparatur.

Zunächst wurde durch ein Visier die Achse des Elektrometers so eingestellt, daß die Spitze eines Messingstabes inmitten des Tisches in keiner Stellung verschoben wurde beim Bewegen des Elektrometers rings um sie herum. Sodann wurde das primäre Strahlenbündel, welches die rechteckige Blende B_3 passierte, durch Fadenkreuz und Fluoreszenzschirm so justiert, daß die Messingspitze in der Mitte des Rechteckes erschien. Nun wurde der Messingstab durch den streuenden Körper ersetzt. Die Höhe des rechteckigen Strahlenbündels war durch die Wahl der Blende B_3 an der Stelle des streuenden Mediums 1 cm hoch. Die Breite des Bündels wurde durch das streuende Medium selbst begrenzt. Alle nicht gewünschten Strahlen wurden durch Bleischutz abgehalten. Nachdem an der Bleiblende B_1 das Wolframfilter vermittelst einer dort angebrachten Vorrichtung eingeschoben war, konnten die Messungen beginnen.

Gang der Messungen.

Die Messungen wurden ausgeführt bei einer Spannung von 84000 bis 112000 Volt maximal, die ausreichte, um die K-Serie des Platins genügend anzuregen. 8 Milliamp. wurden dem Sekundärstromkreis entnommen. Im Allgemeinen wurden 3 Meßreihen von 10—160° vorgenommen; jeder Winkel wurde mehreren Messungen unterzogen. Es mußte für eine Meßreihe stets darauf geachtet werden, daß Glühstrom, Spannung und

Sekundärstrom konstant blieben. Eine feine Schwankung konnte sich bei der Messung gleich recht störend bemerkbar machen. Die Regulierungsvorrichtungen waren fein genug, um solche Störungen zu eliminieren. Der Gang des Blättchens im Elektrometer wurde mittelst des Mikroskops mit Okularskala beobachtet. Das Blättchen durchlief für jede Messung 5 Skaltenteile.

Bei den Versuchen sollen Intensitäten gemessen werden. Die am Elektrometer beobachteten Wanderungszeiten des Blättchens stehen im umgekehrten Verhältnis zu den dazugehörigen Intensitäten, so daß gilt: $J_1 : J_2 = t_2 : t_1$, wenn zu J_1 die Zeit t_1 zu J_2 die Zeit t_2 gehört. Für 90° wurde für die Intensität die willkürliche Zahl 100 gesetzt. Im Vergleiche hierzu wurden alle anderen Werte berechnet.

Um über die Genauigkeit der Messung ein Bild zu erhalten, seien folgende Zahlenreihen für Wasser als Streuungssubstanz angeführt:

Tabelle 1.

Wasser mit Glas.

	90°		10°
	136,5 Sek.		103 Sek.
	138,4 „		101 „
	136 „		101 „
	136,2 „		100 „
	137,5 „		101 „
Mittelwert:	**136,9 Sek.**	**Mittelwert:**	**101,2 Sek.**

Diese beiden Meßreihen ergaben einen mittleren Fehler von 1—2 Proz. Bei einer größeren Reihe von Messungen, wie dies bei vorliegenden Versuchen der Fall ist, wurde naturgemäß der Fehler noch kleiner.

Fehlerquellen und ihre Korrektionen. Ungewollte Strahlung.

Die Messung konnte beeinflußt werden: 1. durch Isolationsfehler, 2. durch die Luftstreuung, 3. durch die Glasstreuung des Aufnahmegefäßes. Alle 3 Faktoren veranlaßten das Blättchen zu rascherem Gang. Sie sollen als ungewollte Strahlung bezeichnet werden. Um sie auszuschalten, wurde die Messung einmal mit leerem Reagenzglas, einmal mit gefülltem ausgeführt. Es sei *a* die für das leere Glas, *b* diejenige für das gefüllte Glas gestreute Strahlung, dann ist nach der Formel

$$c = \frac{a \times b}{a - b}$$

die Größe c die in Betracht kommende Zeit. Mit dieser Korrektion wurden die in den Tabellen mit dem Buchstaben A bezeichneten Kolonnen erhalten. An diesen Werten ist noch eine weitere Korrektion anzubringen.

Die Absorptionskorrektion.

Der Einfluß der Absorption in den streuenden Medium selbst ist bei den Messungen noch nicht berücksichtigt. Sie ist abhängig von der Form des Streukörpers. Die Absorptionsrechnung ist für einen zylinderischen Körper mit Schwierigkeiten verknüpft; für einen prismatischen dagegen ist sie leicht durchzuführen. Ein prismatisches dünnes Glasgefäß jedoch, wie es bei den Versuchen hätte verwendet werden müssen, ist praktisch nicht gut herstellbar. Von vornherein schien es wahrscheinlich, daß bei der angewandten harten Strahlung kein nennenswerter Unterschied bestehen würde zwischen einem zylinderisch und einem prismatisch geformten Körper. Selbstverständlich mußte der Querschnitt bei beiden nur einen geringen Betrag besitzen. Um dies festzustellen, wurden nun je zwei Körper aus Paraffin und Holz hergestellt, wovon der eine quaderförmig, der andere zylinderförmig war. Beide besaßen den gleichen Querschnitt von 1 qcm. Außerdem gelangte auch ein gewöhnliches Reagenzglas und ein solches mit prismatischem Ansatz angeblasenes Glas zur Messung. Beide waren mit Wasser gefüllt. Die Messungen wurden vornehmlich unter dem Winkel von 45° vorgenommen, da in Richtung der Diagonalen des prismatischen Körpers im Vergleich zum zylinderischen die größten Unterschiede auftreten mußten, wenn solche überhaupt vorhanden waren. Folgende Zahlen zeigen, daß der Unterschied für diese Strahlung tatsächlich unmerklich war.

Tabelle 2.

Substanz	Form des Querschnitts	
	Kreis	Quadrat
Paraffin	100	100,4
Holz	100	100,6
Wasser	100	100,1

Dieser Unterschied zeigte sich bei ungefilterter Strahlung, bei gefilterter war er noch geringer. Es wurden also künftig die zu untersuchenden Substanzen in Zylinderform verwendet, während die Berechnungen an Körpern mit prismatischem Querschnitt vorgenommen wurden.

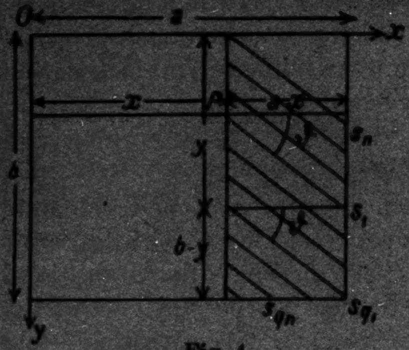


Fig. 4.

Die Berechnung ging folgendermaßen von statten. Man denke sich ein Rechteck der Kantenlängen a und b, in Richtung der x-Achse von den Primärstrahlen getroffen. (Vgl. Fig. 4.)

Betreffs der Absorptionskorrektion kommt nur die xy-Ebene in Betracht, in welcher gemessen wird. In Richtung der Z-Achse, d. h. in Richtung der Höhe des Körpers spielt nur die Intensität eine Rolle. Von der Divergenz der Strahlen wird abgesehen. Es wird angenommen, daß die Strahlen parallel sind. Für unseren Fall trifft dies mit großer Annäherung zu, da die Entfernungen groß genug waren. In den Richtungen s treten die sekundären Strahlen aus. Es sind dabei 4 Fälle zu unterscheiden:

1. Sekundärstrahlen, die mit dem Primärstrahl den Winkel 0°—45° einschließen.
2. Sekundärstrahlen, die mit dem Primärstrahl den Winkel 45°—90° einschließen.
3. Sekundärstrahlen, die mit dem Primärstrahl den Winkel 90°—135° einschließen.
4. Sekundärstrahlen, die mit dem Primärstrahl den Winkel 135°—180° einschließen.

Die auffallende Intensität sei J_0, dann gilt für einen Punkt P im inneren des Körpers $J = J_0 e^{-\mu x}$, wenn μ der Schwächungskoeffizient bedeutet und der Primärstrahl die Strecke x zurückgelegt hat. Für die Absorptionskorrektion hat das Zeichen J_0 keine Bedeutung. Zur Korrektionsrechnung bedarf es im Punkte P nur des Ausdrucks $e^{-\mu x}$. Der Rest der ganzen Strecke a ist für Winkel zwischen 0° und 90° gleich $a - x$.

s_1 sei die Richtung des austretenden Strahles und bilde mit der x-Achse den Winkel ϑ. Dann gilt:

$$\frac{a-x}{s_1} = \cos\vartheta \quad \text{oder} \quad s_1 = \frac{a-x}{\cos\vartheta}\,;$$

dieser Ausdruck ist ebenfalls gültig für alle s von s_1 bis s_n, auf der anderen Seite von s_1 aber nur bis s_{q_1}. Von s_{q_1} bis s_{q_n}, dagegen gilt:

$$s_{q_n} = \frac{b-y}{\sin\vartheta}\,;$$

für s_{q_1} selbst sind beide Ausdrücke gleich berechtigt. Also

$$s_{q_1} = \frac{b-y}{\sin\vartheta} = \frac{a-x}{\cos\vartheta}\,.$$

Hieraus findet man:

$$y = b - \frac{(a-x)\sin\vartheta}{\cos\vartheta}\,.$$

Ist die Intensität in P gleich $e^{-\mu x}$, so ist sie nach der Zurücklegung der Strecke s gleich $e^{-\mu x}\,e^{-\mu s}$.

Hiervon ist das Integral zu bilden:

$$\int\limits_0^a \int\limits_0^b e^{-\mu x}\,e^{-\mu s}\,dx\,dy\,.$$

Für s haben wir soeben zwei Ausdrücke erhalten:

$$s = f(x) \quad \text{und} \quad s = f(y)\,;$$

mit diesen werden die folgenden Integrale ausgerechnet. Die Grenze 0 bis b wird zerlegt in 0 bis $y = b - \frac{(a-x)}{\cos\vartheta}\sin\vartheta$ und $y = b - \frac{(a-x)}{\cos\vartheta}\sin\vartheta$ bis b. Man erhält:

$$\int\limits_0^a \int\limits_0^b e^{-\mu x}\,e^{-\mu s}\,dx\,dy$$

$$= \int\limits_0^a e^{-\mu x}\left[\int\limits_0^{y = b - \frac{(a-x)}{\cos\vartheta}\sin\vartheta} e^{-\mu\frac{(a-x)}{\cos\vartheta}} + \int\limits_{y = b - \frac{(a-x)}{\cos\vartheta}\sin\vartheta}^{b} e^{-\mu\frac{(b-y)}{\sin\vartheta}}\right] dx\,dy\,.$$

Setzt man $\cos\vartheta = c$ und $\sin\vartheta = r$, so ergibt die Auswertung des Integrals:

$$J_1 = \frac{r}{\mu^2}\left(1 - e^{-\mu a}\right) + \frac{c}{\mu(1-c)}\left\{b - \frac{r}{\mu}\,\frac{2-c}{1-c}\right\} e^{-\mu a}$$
$$- \frac{c}{\mu(1-c)}\left\{b - \frac{r}{\mu}\,\frac{2-c}{1-c} - \frac{a\,r}{c}\right\} e^{-\frac{\mu a}{c}}.$$

Von 0° bis 180° gilt für den Grenzsekundärstrahl s_{q_1}:

$$-\frac{x}{\cos\vartheta} = \frac{b-y}{\sin\vartheta}.$$

Sonst ergeben sich die Integrale in den anderen Winkelbereichen in ähnlicher Weise. Ausgerechnet lauten sie von 45—90°:

$$J_2 = \frac{b}{\mu}\,\frac{c}{1-c}\,e^{-\mu a} + \frac{r}{\mu^2}\left(1 - e^{-\frac{\mu b}{r}}\right) - \frac{1}{\mu^2}\,\frac{r}{(1-c)^2}$$
$$\cdot\left(1 - e^{-\mu b\,\frac{1-c}{r}}\right) e^{-\mu a},$$

von 90°—135°

$$J_3 = \frac{r\,c}{\mu^2(1-c)^2}\left(1 - e^{-\mu b\,\frac{(1-c)}{r}}\right) - \frac{b\,c}{\mu(1-c)} - \frac{r}{\mu^2}$$
$$\cdot\left(e^{-\mu a} - e^{-\mu\left(a + \frac{b}{r}\right)}\right) + \frac{1}{\mu^2}\,\frac{r}{1-c}\left(1 - e^{-\mu b\,\frac{(1-c)}{r}}\right),$$

von 135°—180°

$$J_4 = \frac{r\,c}{\mu^2(1-c)^2} - \left(\frac{r\,c}{\mu^2(1-c)^2} - \frac{r\,a}{\mu(1-c)}\right) e^{\mu a\,\frac{1-c}{c}}$$
$$- \left(b - \frac{r}{\mu}\right)\frac{c}{\mu(1-c)}\left(1 - e^{\mu a\,\frac{1-c}{c}}\right) + \frac{r}{\mu^2}\left(1 - e^{-\mu a}\right).$$

In diesen Formeln sind also für $\sphericalangle\,\vartheta$ die entsprechenden Werte einzusetzen; in unserem Falle ist für $a = b = 1$ zu setzen. Bei fehlender Absorption müßte nach Crowther[1]) für die gemessene Strahlung $E\,m$ gelten: $E\,m = K \cdot E_0 \cdot a$ (Crowther benutzt einen langausgedehnten Körper von sehr geringer Dicke, daß er die Y-Komponente bei der Absorptionskorrektion vernachlässigen kann). E_0 bedeutet die primäre Energie, K einen Proportionalitätsfaktor. Ist jedoch die Absorption zu berücksichtigen, so resultiert

$$E_\vartheta = \frac{E_m}{J},$$

wobei J die ausgewerteten Integrale bedeutet. Entsprechendes gilt auch hier (E_ϑ ist die Intensität beim Winkel ϑ).

---

[1]) a. a. O. Vgl. Einleitung, S. 505.

Die Korrektionswerte sind in die schon gemessenen hineinzudividieren. So erhält man die von Absorption befreite Strahlung, die durch die Werte B dargestellt ist.

Man kommt zu ähnlichem Resultat auf einem etwas anderem Wege und erhält dann Werte, die sich unter bestimmten Bedingungen mit den Werten B decken. Da diese Betrachtungen für ähnliche Korrektionsrechnungen eine wesentliche Erleichterung bieten, sollen sie hier angeführt werden. Die Bedingungen sind:

1. daß der Schwächungskoeffizient u klein ist.
2. a und b geringe Werte besitzen.

Sind diese Bedingungen erfüllt, so können Formeln angewandt werden, die äußerlich einfacher gestaltet sind, der Allgemeingültigkeit aber der oben angeführten Formeln bei weitem nachstehen. Man geht dabei von folgender Betrachtung aus. Weicht die Richtung der Sekundärstrahlen s nicht zu viel von 0° ab, ist der Winkel ϑ also nicht groß, so kommt für s hauptsächlich der Ausdruck

$$s = \frac{a - x}{\cos\vartheta}$$

zur Geltung und die Absorptionskorrektion läßt sich darstellen durch:

$$F_1 = \int\limits_0^a \int\limits_0^b e^{-\mu x}\, e^{-\mu\frac{(a-x)}{\cos\vartheta}}\, dx\, dy = b\, e^{-\frac{\mu a}{\cos\vartheta}} \left[\frac{e^{\mu a\frac{(1-\cos\vartheta)}{\cos\vartheta}} - 1}{\mu(1-\cos\vartheta)}\right].$$

In der Nähe von 90° tritt der Ausdruck in den Vordergrund:

$$F_2 = \int\limits_0^a \int\limits_0^b e^{-\mu x}\, e^{-\mu\frac{b-y}{\sin\vartheta}}\, dx\, dy = \frac{e^{-\frac{\mu b}{\sin\vartheta}}\left[1 - e^{-\mu a}\right]\left[e^{\frac{\mu b}{\sin\vartheta}} - 1\right]\sin\vartheta}{\mu^2}.$$

Für die Eintrittsseite der Strahlung ist noch eine dritte Formel nötig. In der Nähe von 180° lautet F_3:

$$F_3 = \int\limits_0^a \int\limits_0^b e^{-\mu x}\, e^{\frac{\mu x}{\cos\vartheta}}\, dx\, dy = \frac{b\left[e^{\mu a\frac{(1-\cos\vartheta)}{\cos\vartheta}} - 1\right]\cos\vartheta}{\mu(1-\cos\vartheta)}.$$

Für $\cos\vartheta$ ist $\cos\vartheta = -\cos(180 - \vartheta)$ zu setzen. Mit diesen drei Formeln lassen sich die Absorptionsfehler unter den erwähnten Bedingungen beseitigen. Am schnellsten geht die Berechnung der Korrektionsformeln folgendermaßen vonstatten. Man berechnet die Werte für 0°, 90°, 180°.

Für $\sphericalangle \vartheta = 0^0$ lautet der Ansatz und das ausgerechnete Integral:

$$\int_0^a\int_0^b e^{-\mu x}\, e^{-\mu(a-x)}\, dx\, dy = \int_0^a\int_0^b e^{-\mu a}\, dx\, dy = a b\, e^{-\mu a}.$$

Für $\sphericalangle \vartheta = 90^0$

$$\int_0^a\int_0^b e^{-\mu x}\, e^{-\mu y}\, dx\, dy = \frac{\left[1-e^{-\mu a}\right]\left[1-e^{-\mu b}\right]}{\mu^2}.$$

Für $\sphericalangle \vartheta = 180^0$

$$\int_0^a\int_0^b e^{-\mu x}\, e^{-\mu x}\, dx\, dy = \frac{b\left[1-e^{-2\mu a}\right]}{2\mu_1}.$$

Da $a = b = 1$ gewählt ist, lauten die Werte:

Für $\sphericalangle \vartheta = 0^0$: $e^{-\mu}$.

Für $\sphericalangle \vartheta = 90^0$: $\dfrac{\left[1-e^{-\mu}\right]^2}{\mu}$

Für $\sphericalangle \vartheta = 180^0$: $\dfrac{\left[1-e^{-2\mu}\right]}{2\mu}$.

Die Formeln J und F gehen in diese Spezialfälle über. Mit diesen drei Werten sind drei Hauptpunkte der Kurve gewonnen. Man kann nunmehr zunächst nach F dazwischenliegende Werte berechnen, z. B. für 40^0 und 140^0. Weichen die Werte nur wenig von denen für $\sphericalangle \vartheta = 0^0$, $\sphericalangle \vartheta = 90^0$, $\sphericalangle \vartheta = 180^0$ ab, so genügt es, durch geeignete Mittelung die übrigen Werte zu bestimmen. Manchmal reichen die drei Werte sogar alleine aus. Dies ergibt jeweils der Fall selbst. Sind die Abweichungen groß, so müssen die Rechnungen nach den Formeln J durchgeführt werden. Bis dahin wäre die Betrachtung über die Absorptionskorrektion ganz allgemein gehalten.

Ehe wir sie auf einen bestimmten Fall anwenden wollen, möge hier zunächst einiges über die Absorptionsmessungen selbst gesagt werden.

Absorptionsmessungen.

Die Absorptionsmessungen wurden mit demselben Elektrometer ausgeführt, mit welchem die Streuung gemessen wurde. Seiner Empfindlichkeit wegen mußte es zu den Absorptionsmessungen etwas abgeändert werden. Dies geschah einmal durch die Anwendung einer kleineren Blendenöffnung. Außerdem wurde kein Äthyljodid in die Kammer gebracht. Wie bekannt, wurden die Messungen einmal in Luft, einmal mit dem zu untersuchenden Körper vorgenommen. Der absorbierende Körper befand sich zwischen Strahlenquelle und Elektrometer. Die Wahl des schmalen Strahlenbündels gewährleistete eine hinreichend genaue Bestimmung des Schwächungskoeffizienten. Aus den Messungen ergaben sich die Werte für:

Wasser $= 0{,}236\ \mathrm{cm}^{-1}$
Methylalkohol $= 0{,}169\ \mathrm{cm}^{-1}$
Lithium $= 0{,}0624\ \mathrm{cm}^{-1}$
Natrium $= 0{,}209\ \mathrm{cm}^{-1}$
Kalium $= 0{,}443\ \mathrm{cm}^{-1}$

Die Dicke der durchstrahlten Schicht d betrug bei allen Substanzen 1,2 cm gleich der Größe des Durchmessers des streuenden Körpers. Berechnet wurden die Schwächungskoeffizienten alle nach der bekannten Formel $J = J_0 e^{-\mu d}$, wobei also J_0 die auffallende Intensität, J die aus dem Körper austretende Intensität bedeutet. Darnach gilt

$$\frac{J}{J_0} = \frac{t_0}{t} = e^{-\mu d}.$$

Für Wasser mit dem Schwächungskoeffizienten $\mu = 0{,}236 \cdot \mathrm{cm}^{-1}$ betrugen die Werte der drei Hauptpunkte $\sphericalangle \vartheta = 0^{\circ} = 0{,}7968$ für $\sphericalangle \vartheta = 90^{\circ} = 0{,}8003$, für $\sphericalangle \vartheta = 180^{\circ} = 0{,}8037$. Es wurden nun die Werte für 40°, 140° und auch für 10° ermittelt, da bei 10° der höchste noch zu messende Betrag gefunden war. Dividiert man nun mit den entsprechenden Korrektionszahlen in die gemessenen hinein, so rückt der Wert 100 für 90° auf den Wert 125, der für 10° von 295 auf 368,7 hinauf. Dazwischen liegen alle anderen Werte. Reduziert man nun diese neuen Werte wieder auf 90° mit dem Werte 100, so gehen die Werte B für Wasser nahezu wieder in die Werte A über. Es hatte also hier die Absorptionskorrektion keinen merklichen Einfluß ausgeübt. Im folgenden zeigte es sich, daß auch die anderen Substanzen mit ihren geringen Schwächungskoeffizienten den Verlauf der Streuungskurve nicht störten bei der angewandten Wellenlänge. Folgende Tabelle gibt die Werte für Wasser *A*, *B* und *C*. *C* bedeutet die reduzierten Werte *B*.

Tabelle 8.

Winkel	gemessene Werte *A*	korrigierte Werte *B*	mit *B* reduzierte Werte *C*
10°	295	369	295
20	167	208	169
30	165	206	165
40	150	183	147
50	135	168	135
60	123	153	122
70	111	138	117
80	107	133	107
90	100	125	100
100	105	131	105
110	111	138	110
120	121	150	120
130	138	170	137
140	155	192	154
150	178	220	176
160	194	239	191

Einfluß der Primärstrahlung bei kleinen Azimuten.

Weiterhin könnte man Bedenken tragen, daß bei kleinen Azimuten, in der Nähe des Winkels von 10° die durch die Wände des Elektrometers eindringende Primärstrahlung Anlaß zu Fehlerquellen geben könnte. Um dieses zu prüfen, wurde das Elektrometer unter dem Winkel von 10° aufgestellt ohne das Vorhandensein eines Streukörpers. Falls keine Primärstrahlen durch die Wände des Instrumentes eindringen würden, so mußte beim Verschluß der Auffangöffnung durch einen genügend dicken Bleipfropfen der Ladungsverlust des Elektrometers derselbe sein als bei der Stellung von 90°. Die Prüfung ergab, daß in der Tat innerhalb der Ablesezeiten, wie sie im allgemeinen für die Streuung gefunden wurde, keine merkliche Strahlung hindurchdrang.

Vergleich der Meßergebnisse mit Debyes Theorie.

Allgemeine theoretische Ansätze.

In diesem Abschnitt soll versucht werden, die gemessenen Resultate mit der Theorie in Zusammenhang zu bringen, wie sie von Debye[1]) und in ihrer Erweiterung von Glocker und Kaupp[2]) gegeben ist. Die azimutale Verteilung der Streuung lautet:

$$V = \frac{N\varepsilon^4}{\mu^2 c^4} \, \frac{1+\cos^2\vartheta}{2} \, \frac{1}{R^2} \sum_n \sum_m \frac{\sin\left[2k\, s n m \sin\frac{\vartheta}{2}\right]}{2k\, s n m \sin\frac{\vartheta}{2}} .$$

Der wichtigste Ausdruck darin ist:

$$T = p \sum_{n=0}^{n=p-1} \frac{\sin\left[4ka \sin\frac{n\pi}{p} \sin\frac{\vartheta}{2}\right]}{4ka \sin\frac{n\pi}{p} \sin\frac{\vartheta}{2}} ,$$

wobei eine Umformung stattgefunden hat. Er stellt die charakteristische Funktion dar, auf die es bei unseren Messungen besonders ankommt.

In diesen Formeln bedeuten:

V das Verhältnis der gestreuten zur primären Intensität.

N Anzahl der bestrahlten Atome.

ε Ladung eines Elektrones.

μ Masse eines Elektrones.

c Lichtgeschwindigkeit.

ϑ Winkel zwischen Primär- und Sekundärstrahl.

R Abstand des Streukörpers vom Meßinstrument.

p Anzahl der Elektronen.

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$; λ = Wellenlänge; a = Ringradius.

$s n m$ Abstand zwischen dem n^{ten} und dem m^{ten} Elektron.

Folgende Überlegungen liegen der Gleichung zugrunde. Man denke sich einen Elektronenhaufen aus p-Individuen. Infolge von statischen und kinetischen Kräften (im inneren des Atomes wirkend) sollen diese, solange keine äußeren Störungen eintreten, a) in konstanten, gegenseitigen Abständen verharren; b) die Bewegungsgeschwindigkeiten sollen so klein sein, daß die dadurch entstehenden Lagenänderungen zu vernachlässigen sind gegenüber der zugehörigen Wellenlänge; c) die Frequenz jener Welle sei groß gegenüber der Eigenfrequenz seiner Störung des Systems. Diese Annahmen, betont **Debye**, sind wesentlich, damit die Rechnung so einfach angesetzt werden kann. Auf Grund dieser Voraussetzungen kann man nun:

---

[1]) a. a. O., Einleitung, S. 505.

[2]) a. a. O., Einleitung, S. 506.

1. Abstand nehmen von den Kräften zwischen Elektronen und Kernen und den Kernen gegenseitig. Die Elektronen sollen frei beweglich sein.

2. Die Bewegung des Elektronenhaufens in sich wird ausgeschaltet. Er wird als im Raume ruhend betrachtet, solange keine Ruhestörung von außen eintritt.

Die Strahlung ist unpolarisiert gedacht. Unter der Annahme, daß sich die p-Elektronen immer in äquidistanten Entfernungen zueinander in Kreisbahnen mit dem Radius a bewegen, ergibt sich für $s\,n\,m$ der Ausdruck

$$s\,n\,m = \frac{2\pi a\,|n-m|}{p}\,.$$

Wir können nun schreiben

$$V = \frac{N \cdot e^4}{\mu^2 c^4}\,\frac{1+\cos^2\vartheta}{2}\,\frac{1}{R^2}\sum_n\sum_m \frac{\sin 4ka\,\frac{|n-m|}{p}\,\pi \sin\frac{\vartheta}{2}}{3ka\,\frac{|n-m|}{p}\,\pi \sin\frac{\vartheta}{2}}\,.$$

Diese Doppelsumme läßt sich aber (durch Einsetzen irgendeines Falles kann dies ermittelt werden) als einfache Summe schreiben.

$$T = \sum_n\sum_m \frac{\sin 4ka\,\frac{|n-m|\,\pi}{p}\,\sin\frac{\vartheta}{2}}{4ka\,\frac{|n-m|}{p}\,\pi\sin\frac{\vartheta}{2}} = p\sum_{n=0}^{n=p-1}\frac{\sin 4ka\,\frac{n\cdot\pi}{p}\,\sin\frac{\vartheta}{2}}{4ka\,\frac{n\cdot\pi}{p}\,\sin\frac{\vartheta}{2}}\,.$$

In dieser Formel werden die Elektronenabstände doppelt gezählt. Die Erweiterung, die **Glocker** an diese Ableitung machte, war die Wechselwirkung zweier und mehrerer Ringe zueinander, wie sie bei den Atommodellen in Betracht kommen.

Für zwei Ringe erhält er das Wechselwirkungsglied:

$$T_{12} = 2\cdot\sum_{n=0}^{p-1}\sum_{n'=0}^{p'-1}\frac{2ka\sin\frac{\vartheta}{2}\sqrt{a^2+a'^2-2aa'\cos 2\pi\left(\frac{n}{p}-\frac{n'}{p'}-\frac{\varphi}{2\pi}\right)}}{2ka\sin\frac{\vartheta}{2}\sqrt{a^2+a'^2-2aa'\cos 2\pi\left(\frac{n}{p}-\frac{n'}{p'}-\frac{\varphi}{2\pi}\right)}}\,.$$

[Darin ist a der Radius des inneren, a' der des äußeren Ringes, p die Anzahl der Elektronen auf dem inneren, p' diejenige auf dem äußeren Kreise. φ ist der Winkel, den zwei Elektronen des äußeren und inneren Kreises einschließen, bedingt durch die gegenseitige Verdrehung der Ringe. Meistens kann φ seiner geringen Größe wegen vernachlässigt werden.[1])] Der Faktor zwei ist hinzuzufügen, da, wie eben erwähnt, die Elektronenabstände in den Gleichungen von Debye doppelt gezählt werden.

Die Ansätze für die jeweilig untersuchten Körper sind im folgenden einzeln durchgeführt.

Lithium.

Naheliegend ist es zur Untersuchung der Anordnung der Elektronen im Atomkörper mit niederem Atomgewicht, insbesondere solche mit einatomiger Konstellation heranzuziehen (weil Molekülbildungen Komplikationen hervorrufen). Hierfür käme zunächst Helium in Betracht. Da uns dieser Stoff nicht zugänglich war in flüssiger Form, so wurde als nächster Körper des periodischen Systems Lithium gewählt mit der Atomzahl 3. Im Zusammenhang mit ihm wurden die Alkalimetalle Natrium und Kalium untersucht. Besitzen doch alle Einwertigkeit, Einatomigkeit als Metalle, analogen Bau in der Kristallstruktur, gleichen Bau der optischen Serienspektren. Besonders wünschenswert schien es die Alkalimetalle in geschmolzenem Zustande zu untersuchen, um den Einfluß der Kristallstruktur zu vermeiden. Wegen der leichten Oxydierbarkeit der Alkalimetalle ist es erforderlich, sie im Vakuum oder indifferentem Gase zu schmelzen. Die Glasgefäße, in denen dies geschah, durften dazu nicht zu dick sein, damit sich die Glasstreuung nicht zu sehr bemerkbar machen konnte. Mit Lithium mißlangen diese Schmelzversuche, da es sich in der Hitze leicht mit Glas verbindet. Wir haben uns entschlossen, das Lithium in sehr dünnwandigen Eisengefäßen zu schmelzen. Diese Versuche sind aber noch nicht so weit gediehen, daß sie bei vorliegender Arbeit hätten zur Verwendung gelangen können. Nun zeigten uns jedoch folgende Überlegungen, daß die Kristallstruktur des Lithiums auch in festem Zustande für unsern Zweck keine sehr wesentliche Rolle spielt, wenigstens nicht in dem Winkelbereich, in welchem die Messungen vorgenommen wurden.

---

1) a. a. O., R. Glocker u. M. Kaupp.

Untersuchungen der Kristallstruktur liegen durch A. W. Hull[1]) vor. Unter Anwendung des α-Dublets der K-Serie einer Molybdänantikathode bei etwa 40 Kilovolt, d. h. einer Wellenlänge von $\lambda = 0{,}712 \cdot 10^{-8}$ cm zeigte sich für Lithium ein kubisches, körperzentriertes Gitter mit der Kante $3{,}5 \cdot 10^{-8}$ cm. Die Hauptringe seiner Interferenzaufnahme, die nach der Debye-Scherrer-Methode vollführt wurde, fanden bei Ablenkungswinkeln statt, die in Tab. 4 angegeben sind.

Tabelle 4.

Intensität der Linie	Entfernung der Linie von der Mitte cm	Ablenkungswinkel Grad
0,7	3,2	16,5
1,0	3,96	20,44
0,4	5,62	29
0,6	6,95	35,9
0,2	10,82	56

Netzebenenabstand Experimentell gefunden	Indizes der Flächen	Zahl der korrespondierenden Ebenen
2,5	110	6
2,02	111	4
1,43	211	12
1,17	(221) (100) (3)	15
0,77	210 (2)	12

Wir prüften diese Untersuchung und fanden bei einer kürzeren Expositionszeit einen Ring, dessen dazugehöriger Ablenkungswinkel sich auf 16,4° berechnete, was in recht guter Übereinstimmung steht mit dem oben angegebenen Werte des Ablenkungswinkels des ersten Ringes für die Fläche 110. Außer der Aufnahme für diese weiche Strahlung wurde dieselbe Untersuchung auch bei der harten Wellenlänge $\lambda = 0{,}19 \cdot 10^{-8}$ cm unternommen, d. i. die Wellenlänge, die bei den vorliegenden Streuversuchen verwendet wurde. Trotz zwanzigstündiger Expositionsdauer zeigten sich jedoch bei dieser Wellenlänge keinerlei Kristallinterferenzen und zwar bei ganz verschiedenen Lithiumstücken. Eines der Stücke (sie besaßen übrigens alle einen Durchmesser von 5 mm) war gepreßt, ein zweites war ungepreßt (beide je in einem abgeschlossenen Glasröhrchen) bestrahlt worden; ein drittes wurde freistehend in Luft in den Strahlengang gestellt. Wenn Kristallinterferenzen vorhanden wären, so müßten sie für Flächen geringer Indizes bei sehr kleinen Winkeln liegen, innerhalb des Bereiches von 0°—10°. Für Flächen höheren Indizes, deren Ablenkungswinkel größer sind, ist die Intensität zu schwach. Auf Grund dieser Vorversuche faßten wir den Entschluß, Lithium in fester Form zu untersuchen. Es gelangten im ganzen drei zylindrische Lithiumstücke zur Messung, vom Durchmesser 1,2 cm[1]), wovon das eine durch eine Messingdüse gepreßt worden war. Da sich die Streuung des Lithiums als verhältnismäßig gering erwies, so machte die Streuung des Glases einen erheblichen Betrag aus. Es wurden deshalb alle drei Lithiumstücke in freier Luft gemessen. (Die ungewollte Strahlung bestand also nur noch aus Isolationsfehler + Luftstreuung.) Man könnte nun den Einwand erheben, daß durch die leichte Oxydierbarkeit des Lithiums eine Oxydschicht entstand, von welcher ebenfalls Streuung ausgesandt wurde. Deshalb wurde das Lithium in seinem Paraffinöl aufbewahrt und nur kurz vor der Messung herausgeholt, gut abgetrocknet und gewogen. Nach der durchschnittlich dreistündigen Messung wurde es wiederum gewogen. Folgende Zahlen zeigen, daß während dieser Zeit keine Gewichtszunahme stattgefunden hat. Auch zeigten sich sonst keine merkbaren Veränderungen. Die drei Stücke sind mit I, II, III numeriert.

---

[1]) X-Ray Studies. Research Laboratory General Electric Company 1919, S. 179 u. 201.

Tabelle 5.

Nummer des Stückes	Gewicht vor der Messung	Gewicht nach der Messung
I	2212 mg	2212 mg
II	1857	1857
III	1675	1675

In der zweiten Kolonne der Tab. 6 sind die korrigierten gemessenen Werte eingetragen. Sie wurden aus den Messungen aller drei Stücke erhalten, da sich unter diesen keine nennenswerten Unterschiede ergaben. Über die anderen Zahlenwerte wird umgehend berichtet werden. Die gemessenen Werte gehen nur von 10° bis 160°. Auch hatte es sich als unnötig erwiesen, alle dazwischenliegenden Winkel zu messen.

---

[1]) Das Lithium war als reines Lithium der Firma E. Merck-Darmstadt bezogen worden.

Tabelle 6.

Lithium.

Streuungswinkel	gemessene korrigierte Werte *A*	theoretische Werte			
		B	*C*	*Bi*	*Ci*
0°	—	487	631	381	430
5	—	214	214	337	232
10	216	232	275	248	333
20	180	176	165	158	146
30	165	160	166	161	157
40	161	146	164	139	160
50	141	141	143	146	146
60	135	125	134	114	140
80	107	106	106	104	105
90	100	100	100	100	100
120	120	123	139	114	142
140	151	159	168	158	173
160	190	186	193	182	197
180	—	195	207	190	208

Wie schon oben erwähnt, sind alle Werte als Verhältniszahlen angegeben in bezug auf den Wert 100 bei dem Winkel von 90°.

Nach den bisherigen Anschauungen der Quantentheorie, der Bohrschen Vorstellung von Atommodellen, wie sie z. B. in Sommerfeld¹) dargelegt sind, nach den Ableitungen von Debye²) und Glocker³) über die azimutale Streuverteilung sind die folgenden Ansätze gemacht.

Lithium mit der Atomzahl 3 besitzt 3 Elektronen. Diese können sich alle drei auf einem Kreise bewegen. (Dieser Fall wird hier nicht behandelt, da er von vorne herein unwahrscheinlich ist, allein aus der chemischen Eigenschaft der Einwertigkeit.) Es wird angenommen, daß ein Elektron, das Valenzelektron, auf einem äußeren Ringe kreist. Innen mögen

---

1) a. a. O.

2) a. a. O.

3) a. a. O.

sich nun zunächst auf einem Ringe zwei Elektronen diametral zueinander bewegen. Das ganze System wird komplanar angenommen. Dann lautet der Ansatz für die Streuverteilung[1]):

$$(\mathrm{G}_1)\quad V = \frac{N\cdot e^4}{\mu^2\cdot v^4}\,\frac{1+\cos^2\vartheta}{2}\left[2\left(1+\frac{\sin\varrho}{\varrho}\right)+1+2\left(\frac{\sin 5\varrho}{5\varrho}+\frac{\sin 6\varrho}{6\varrho}\right)\right],$$

$$\varrho = 4ka\sin\frac{\vartheta}{2};\qquad k=\frac{2\pi}{\lambda};\qquad \lambda = 0{,}19\cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm}.$$

G_1 setzt sich aus drei Ausdrücken zusammen:

$T_1 = 2\left(1+\frac{\sin\varrho}{\varrho}\right)$ Wirkung des innersten Ringes,

$T_2 = 1$ „ „ äußeren Ringes,

$T_{12} = 2\,\Psi p p'(\varrho) = 2\,\Psi_{3,1}(\varrho) = 2\left(\sin\frac{5\varrho}{5\varrho}+\sin\frac{6\varrho}{6\varrho}\right)$ Wechselwirkung der beiden Ringe aufeinander.

Statt des oben S. 522 angegebenen Ausdrucks; für T_{12} ist es zumeist einfacher, den Ausdruck:

$$T_{12} = 2\,\Psi p p'(\varrho)$$

$$= 2\sum_{n=0}^{n=p-1}\;\sum_{=0}^{n=p'-1}\frac{\sin 2ka\sin\frac{\vartheta}{2}\sqrt{c^2+1-2c\cos 2\pi\left(\frac{n}{p}-\frac{n'}{p'}-\frac{\varphi}{2\pi}\right)}}{2ka\sin\frac{\vartheta}{2}\sqrt{c^2+1-2c\cos 2\pi\left(\frac{n}{p}-\frac{n'}{p'}-\frac{\varphi}{2\pi}\right)}}$$

zu verwenden. Es bedeutet

$$c = \frac{a'}{a} = \frac{a_a}{a_i}$$

das Verhältnis des äußeren Radius a_a zum inneren a_i.[2])

Der Radius des inneren Ringes berechnet sich nach der Gleichung

$$a_n = \frac{n^2\cdot a_1}{Z_{\mathrm{eff.}}},$$

wobei a_n der Radius des zu berechnenden Ringes ist, n die Quantenzahl, a_1 der Radius des Wasserstoffringes und $Z_{\mathrm{eff.}}$ = Kernladungszahl–Abschirmungskonstante bedeutet.[3]) Demnach gilt für den inneren Ring des Lithiums

$$a_i = \frac{1^2\cdot 0{,}528\cdot 10^{-8}}{3-0{,}25};$$

---

[1]) a. a. O., Allgemeine theoretische Ansätze. S. 521 u. 522.

[2]) a. a. O., S. 28, d. h. R. Glocker u. M. Kaupp.

[3]) a. a. O., A. Sommerfeld, S. 73.

$a_1 = 0{,}528 \cdot 10^{-8}$ cm und 0,25 ist die Abschirmungskonstante der zwei inneren Elektronen.[1] Daraus berechnet sich: $a_i = 0{,}192 \cdot 10^{-8}$ cm; ferner besteht

$$c = \frac{2^2\,(3 - 0{,}25)}{3 - 2} = 11\,.$$

Künftig möge statt

$$\frac{N \cdot e^4}{\mu^2\, v^4\, R^2}$$

die Konstante b gesetzt werden. Die theoretisch berechneten Werte, die nach dieser Gleichung G_1 gefunden werden, sind in Tab. 6 in Kolonne 3 unter dem Buchstaben B angegeben. Eine letzte Annahme für Lithium wäre die, daß sich je ein Elektron für sich auf einem Kreise bewegt. Neben dem komplanaren System schien uns die Annahme einfach zu sein, die beiden inneren Ringe als gekreuzt anzunehmen unter einem Winkel von 90°.[2] Dadurch sind die beiden inneren Elektronen gewissermaßen gleichberechtigt. Über die Lage des äußeren Ringes ist keine besondere Annahme gemacht, da zur Berechnung des Wechselwirkungsgliedes nur die Kenntnis der Radien notwendig ist. (Landé[2]) hat schon bekannterweise mit gekreuzten Systemen Berechnungen über das Helium angestellt.) Der Umlaufsinn geschehe bei den beiden inneren Elektronen rechtsläufig, also in gleichem Sinne.

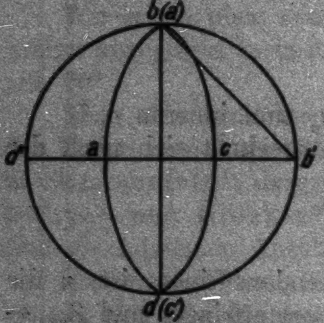


Fig. 5.

Die Anfangslage der beiden Elektronen ist willkürlich gesetzt. Im Laufe der Zeit wird sich die Entfernung der beiden Elektronen ständig ändern. Es gibt jedoch eine Annahme, unter der die Entfernung beider gleich bleibt. Diese Annahme soll als die einfachste hier gemacht sein. Die Anfangslage des einen Elektrons sei mit a bezeichnet (vgl. Fig. 5), diejenige des anderen inneren Elektrons mit a'. Diese beiden Stellungen gehören also zusammen. Nacheinander sollen nun die Stellungen folgen b und b', c und c', d und d'. Auf diese Weise ist die

---

[1] a. a. O., A. Sommerfeld, S. 84.

[2] A. Landé, Phys. Zeitschr. 20. S. 228. 1919; vgl. auch Verh. d. Deutsch. phys. Ges. 21. 1919.

Entfernung der beiden Radien stets gegeben durch

$$s\,n\,m = a_i\sqrt{2}\,.$$

Bei dieser Lage wird aber die Abschirmungskonstante nicht mehr den Wert 0,25 besitzen. Sie wurde bestimmt durch die Beziehung

$$\frac{e^2\cdot x}{a_i^2} = \frac{e^2}{(s\,n\,m)^2} = \frac{e^2}{a_i^2\cdot 2}\ ^{1)};\quad x = 0{,}5\,.$$

Demnach ergibt sich

$$a_i = \frac{0{,}528\cdot 10^{-8}}{3-0{,}5} = 0{,}2112\cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm}$$

und

$$c = \frac{4\,(3-0{,}5)}{3-2} = 10\,.$$

Für a_a ergibt sich $10\cdot 0{,}2112\cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm} = 2{,}112\cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm}$. Denselben Wert erhält man für a_a auch für die zuerst besprochene Annahme mit $c = 11$; $11\cdot 0{,}192\cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm} = 2{,}112\cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm} = a_a$. Für die Entfernung zwischen einem Elektron eines inneren Ringes und demjenigen des äußeren Ringes wurde ein mittlerer Wert gesetzt, der aus verschiedenen Lagen der beiden Radien zueinander gefunden wurde. So entstanden die Ausdrücke: $T_1 = 1$; $T_2 = 1$; $T_3 = 1$, da

$$p\sum_{n=0}^{n=p-1}\frac{\sin 4k\,a_i\sin\frac{\vartheta}{2}\,\frac{n\pi}{p}}{4k\,a_i\sin\frac{\vartheta}{2}\,\frac{n\pi}{p}} = 1x\sum_{n=0}^{n=1-1}\frac{\sin 0}{0} = 1 \quad \text{ist.}$$

T_1, T_2, T_3 sind die Ausdrücke der Wirkungen der drei Ringe im einzelnen. Die Wechselwirkungsglieder lauten:

$$T_{12} = 2\,{}_A\Psi_{11} = \frac{2\cdot\sin 2k\cdot 0{,}2112\cdot\sqrt{2}\sin\frac{\vartheta}{2}}{2k\cdot 0{,}2112\cdot\sqrt{2}\sin\frac{\vartheta}{2}}\,;$$

$$T_{13} = 2\,{}_B\Psi_{11} = \frac{2\cdot\sin 2k\cdot 2{,}24\cdot\sin\frac{\vartheta}{2}}{2k\cdot 2{,}24\sin\frac{\vartheta}{2}}\,;$$

$$T_{23} = 2\,{}_C\Psi_{11} = \frac{2\cdot\sin 2k\cdot 2{,}24\sin\frac{\vartheta}{2}}{2k\cdot 2{,}24\sin\frac{\vartheta}{2}}\,;$$

$$T_{13} = T_{23}\,.$$

---

1) a. a. O., A. Sommerfeld, S. 81 u. 82.

Die Größe 2,24 entsteht, wie oben angegeben wurde, aus $2{,}112 \cdot 10^{-8}$ cm und $0{,}2112 \cdot 10^{-8}$ cm. Es ergibt sich für V die Gleichung G_2.

$$(G_2)\left\{\begin{aligned} V &= b \cdot \frac{1+\cos^2\vartheta}{2}\left[T_1 + T_2 + T_3 + 2 \cdot {}_A\Psi_{11} + 4\, {}_B\Psi_{11}\right]; \\ &\qquad\qquad {}_C\Psi_{11} = {}_B\Psi_{11}, \\ V &= b \cdot \frac{1+\cos^2\vartheta}{2}\cdot\left[1+1+1+2\cdot\frac{\sin 2k\cdot 0{,}2112\sqrt{2}\sin\frac{\vartheta}{2}}{2k\cdot 0{,}2112\sqrt{2}\sin\frac{\vartheta}{2}}\right. \\ &\qquad\qquad \left. + 4\cdot\frac{\sin 2k\cdot 2{,}24\sin\frac{\vartheta}{2}}{2k\cdot 2{,}24\sin\frac{\vartheta}{2}}\right]. \end{aligned}\right.$$

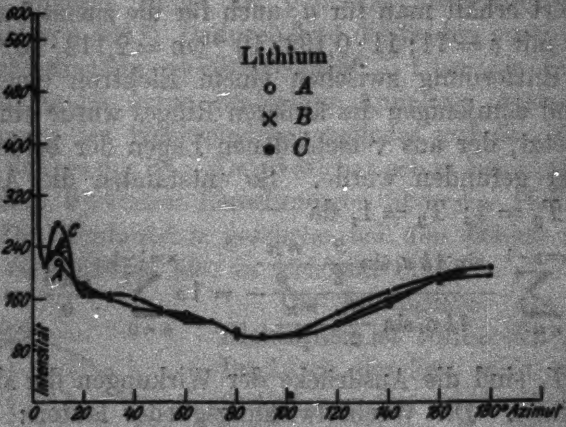


Fig. 6.

Die Werte, die nach dieser Gleichung (G_2) gefunden wurden, sind in Tab. 6 unter *C* angegeben (vgl. Fig. 6). Kurve *A* ist durch kleine Kreise, die theoretische Kurve *B* durch Kreuze und Kurve *C* durch Punkte dargestellt. Kurve *A* weist zwischen 30—40° und etwa 60° sehr flache Maxima auf, so daß ihre Existenz fraglich erscheinen könnte. Diese Maxima weichen von einem glatten Verlauf der Kurve höchstens um 4 Proz. ab. Dieser Betrag liegt dicht an der Fehlergrenze, jedoch noch oberhalb. Da außerdem die gemessene Kurve von 90°—160° trotz gleichbleibender Fehlerquellen einen glatteren Verlauf zeigt, besteht eine hinreichende Sicherheit für die Existenz jener Maxima. Die Hauptmaxima der theoretischen Kurven sind in dem Winkelbereich von 0° bis 10° vorhanden. Bei 5° zeigen die berechneten Kurven ein deutliches Minimum. Bei größeren Azimuten sind die Maxima nur schwach ausgeprägt. Aus den Zahlen und graphischen Darstellungen (vgl. Fig. 6) ist im allgemeinen keine merkliche Abweichung der gemessenen Kurven zu verzeichnen. Immerhin ist zu ersehen, daß in manchen Winkelbereichen Kurve *B*, in anderen wieder Kurve *C* sich der gemessenen Kurve *A* besser anpaßt. Für Winkel kleiner als 90° scheint *C* besser an *A* angepaßt zu sein, insofern als *C* die Form der Kurve *A* (und auf diese kommt es hauptsächlich an) besser wiedergibt. Bei 20° geht *C* allerdings tiefer hinunter als *A* und *B*. Dadurch tritt aber das bei *A* angedeutete Maximum zwischen 30 und 40° durch *C* etwas besser hervor, wogegen *B* gerade an dieser Stelle zu tief hinuntergeht. In der Nähe von 50°, wo *A* und *C* ein Minimum andeuten, gibt *B* ein Maximum an. Bei 60° ist durch *A* wieder, wenn auch ein sehr schwaches Maximum, angegeben; für *C* scheint das Maximum zwischen 60 und 70° zu liegen. Für *B* ist bei 60° deutlich das Anzeichen eines Minimums zu erkennen, bei 70° folgt darauf ein Maximum. Diese sollte der gemessenen Kurve *A* nach eher an 60° als an 70° liegen. Für Winkel größer als 90° ist ohne Zweifel *B* mit *A* in besserer Deckung als *C*. Durch Änderung der Größen für den Radius innerhalb geringer Grenzen, durch eine andere Konstellation der Elektronen nach den neuesten Bohrschen Vorstellungen[1]), ist es vielleicht möglich eine Übereinstimmung zu finden, die sich dem experimentellen Befund besser fügt.

Die oben angestellten Betrachtungen gelten für das Lithiumatom. Im festen, kristallinischen Zustand sind statt der Atome wohl Ionen anzunehmen, wie dies aus Kristalluntersuchungen hervorgeht. Die Lage des Valenzelektrons ist nichts beständiges. Dann weist die elektrische Leitfähigkeit der Metalle auf das Vorhandensein freier Elektronen hin und schließlich könnte auch die Durchstrahlung des Lithiums zur Ionisierung beitragen. Deswegen sollen auch die Resultate von diesem Standpunkt aus diskutiert werden. Für den ionisierten Zustand folgt aus (G_1) die Gleichung (G_3).

---

1) N. **Bohr**, Zeitschr. f. Phys. 4. 1. u. 2. Heft. S. 14. 1922.

$$(G_3) \qquad V = \frac{b \cdot 1 + \cos^2 \vartheta}{2} \left[2 \left(1 + \frac{\sin \varrho}{\varrho} \right) \right].$$

Aus (G_2):

$$(G_4) \quad V = b \cdot \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \left[1 + 1 + 2 \cdot \frac{\sin 2k \cdot 0{,}2112 \sqrt{2} \sin \frac{\vartheta}{2}}{2k \cdot 0{,}2112 \sqrt{2} \sin \frac{\vartheta}{2}} \right].$$

In (G_3) und (G_4) fallen jeweils die Glieder weg, die für die Wirkung des äußersten Ringes charakteristisch sind, sonst bleiben sich die Ausdrücke gleich.

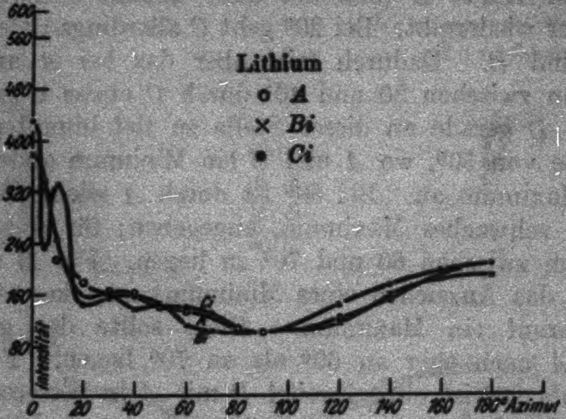


Fig. 7.

Die zu den Ansätzen (G_3) und (G_4) gehörigen Kurven sind mit *Bi* und *Ci* bezeichnet (vgl. Fig. 7, Tab. 6). Wie die Zahlenwerte und die gezeichneten Werte zeigen, hat sich die Übereinstimmung mit *A* für den ionisierten Zustand insofern verändert (vgl. Figg. 6 und 7), als für Winkel kleiner wie 90° die Minima und Maxima besonders bei *B* in Fig. 9 schärfer hervortreten als in Fig. 6. Bei 70° jedoch ist für *B* keine Andeutung eines Maximums zu erkennen. Für Winkel größer als 90° ist für *B* und *C* allerdings wieder ein glatter Verlauf zu bemerken, jedoch ist Fig. 6 gegenüber eine größere Abweichung von *A* eingetreten.

Nach allem liegen keine bindende Schlüsse vor ein bestimmtes Urteil über die Anordnung der Elektronen zu fällen, da die Methode noch zu grob ist, besonders im Gebiete von 0°—10°, wo die Hauptmaxima liegen. Es ist daher beabsichtigt, mit einer feineren Methode die Untersuchungen aufzunehmen. Vielleicht wird auch die Verwendung von Strahlungen anderer Wellenlängen (die durch anderes Antikathodenmaterial erhalten werden) mehr Aufschluß über diese Fragestellung gewähren. Wie schon erwähnt, ist auch beabsichtigt Lithium in flüssigem Zustande zu untersuchen.

Elektrodynamischer Effekt.

Der reine Verlauf der Streukurve konnte noch, abgesehen von den schon angegebenen Fehlerquellen, durch einen anderen Einfluß gestört werden, der elektrodynamischer Natur ist. Gehen wir aus von den Untersuchungen über die Intensitätsverteilung der Röntgenstrahlen, so haben alle Messungen, die sich damit beschäftigten, eine azimutale Dissymmetrie ergeben. Nach der Bremstheorie hat Sommerfeld[1]) diese Erscheinung in die mathematische Form gekleidet:

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{E} \cdot \mathfrak{H} = \frac{\beta^2 \sin^2 \varphi}{(1 - \beta \cos \varphi)^2} \, .$$

In diesem Ausdruck ist $\mathfrak{S}$ die bei P durch die Flächeneinheit durchgestrahlte Energie. β ist verknüpft durch die Gleichung $v = \beta \cdot c$, das ist die Geschwindigkeit eines Elektrons, das plötzlich auf Null gebremst wird und das Feld $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ aussendet. φ ist der Winkel zwischen der Fortpflanzungsrichtung und Beobachtungsrichtung [vgl. Fig. 1 bei Sommerfeld].[1]) Die Form der Kurve, die sich für die verschiedenen Winkel φ ergibt, ändert sich mit β, d. h. mit der Geschwindigkeit des Kathodenstrahlenteilchens, von welchem der Röntgenstrahl ausgesendet wird. Bei dem vorliegenden Falle lag die Vermutung nahe, daß auch hier ein ähnlicher Effekt auftreten würde. Bei der hohen Frequenz der verwendeten Röntgenstrahlen könnte sich eine ähnliche Dissymmetrie der Streustrahlung eines mitschwingenden Elektrons zeigen. Zwar liegen hier die Verhältnisse anders, weil wir es hier mit einer harmonischen Bewegung an Stelle des von Sommerfeld dargestellten Falles linearabfallender Geschwindigkeit zu tun haben. Außerdem ist die Amplitude des mitschwingenden Elektrons zu wenig bekannt, die die Größe der Beschleunigung bedingt. Ferner wird die Dissymmetrie verwischt sein (da eine unpolarisierte Strahlung auffiel). Von einer Rechnung wird Abstand genommen, zumal die Streukurve bei allen Substanzen mit niederem Atomgewicht, wie für Li, H, O, C und ihren Verbindungen H_2O, CH_3OH bei Azimuten $> 90^0$ eine unwesentliche Abweichung von der Thomsonschen Verteilungskurve $J_\vartheta = J_{\pi/2}\,(1 + \cos^2 \vartheta)$ zeigten.

---

[1]) A. Sommerfeld, Phys. Zeitschr. 1909. S. 970.

Natrium.

Das Natrium bot die Gelegenheit die azimutale Streuverteilung noch eingehender zu untersuchen als das Lithium, da Natrium außer in der festen auch in der flüssigen Form darstellbar war.

Darstellung des flüssigen Natriums und Kaliums.

Um das Natrium im flüssigen Zustande verwenden zu können, bedurfte es längerer Vorbereitung, wie es im folgenden beschrieben wird. (Für Kalium gilt dieselbe Behandlung.) Wegen der Oxydierbarkeit von Natrium und Kalium wurden die Metalle in Wasserstoff geschmolzen. Natrium und Kalium wurden dem Petroleum, in welchem sie aufbewahrt werden, entnommen, mit Fließpapier gut abgetrocknet und in Benzin gereinigt. Dann wurden sie in kleinen Stücken in Glasgefäße gebracht, die eine zweimal kugelige Erweiterung besaßen. Die eine Kugel ging in ein Reagenzglas aus von 5 cm Länge und einem Durchmesser von 1,2 cm. Dann folgte eine Abschmelzstelle, und daran schloß sich eine zweite Kugel an mit einem zylinderischen Ansatz. In die zuletzt erwähnte Kugel wurden die Stücke gebracht und das Ganze an eine Pumpe angeschlossen. War das Vakuum als genügend befunden, so wurde Wasserstoff aus einer Wasserstoffbombe eingeleitet vermittels eines T-Rohres. In dieser Atmosphäre wurden nun die Metalle geschmolzen und flossen in reinen Metalltropfen in die zweite, tiefer gelegene, kühlere Kugel. War eine genügende Menge übergeleitet, so wurde der Wasserstoff wieder herausgepumpt, das Vakuum wieder hergestellt und die Abschmelzstelle zwischen den beiden Kugeln abgeschmolzen. Die Metalle befanden sich also im Vakuum. Am Boden des elektrischen Ofens war eine kleine Vertiefung angebracht, in welche das Glasgefäß gestellt wurde; außerdem war der Korkpfropfen, der den Ofen abschloß, in der Mitte durchbohrt, so daß das

Glasgefäß axial eingestellt werden konnte. Die kugelige Erweiterung war vollständig im Ofen.

Wie das Lithium, so wurde auch das Natrium nach der Debye-Scherrer-Methode untersucht. Das Material wurde wie früher in Gläschen von 5 mm Durchmesser den Strahlen ausgesetzt. Für diese Gläschen war ein kleiner elektrischer Ofen hergestellt worden nach demselben Muster wie der große Ofen. Die Aufnahme des flüssigen Natriums zeigte nicht die geringsten Andeutungen von Kristallinterferenzen, was wohl die völlige Zerstörung der Kristallstruktur durch den Schmelzvorgang beweist. Natrium in fester Form gab deutliche Interferenzerscheinungen, die aber alle in der Nähe des Durchstoßungspunktes des Primärstrahles liegen. Außerdem wurde noch eine Aufnahme von gepreßtem Natrium gemacht. Auch hier konnten Interferenzerscheinungen wahrgenommen werden.

Zunächst wurde Natrium in flüssigem Zustand gemessen, da die Messung der flüssigen Phase nach dem oben dargelegten wesentlicher ist als die der festen. Um jedoch einen Vergleich mit Lithium zu haben, wurde das Natrium auch in festem Zustand untersucht. Dazu ließ man das Natrium in demselben Gefäß erstarren, in welchem es in flüssigem Zustand gemessen wurde. Der Unterschied beider Phasen belief sich darauf, daß die Intensitäten in flüssigem Zustand bei 10° und 20° größer waren, als im festen. Alle folgenden Werte sind bei beiden Phasen die gleichen. Die Form der Kurve bleibt erhalten. Folgende Zahlenwerte bestätigen diese Aussage.

Tabelle 7.

Streuwinkel	Intensität	
	Na flüssig	Na fest
10°	626	537
20	338	311
30	291	291

Die Messungen waren alle in einer Ebene (xy-Ebene) vollzogen worden. In einer anderen Ebene wäre es vielleicht möglich gewesen, daß die Meßrichtungen in die Richtung der scharfen Interferenzfläche, die auf den Aufnahmen zu sehen waren, gekommen wären. Vielleicht hätten sich sonst stärkere und andere Intensitätsunterschiede der Phasen gezeigt. (Die

Messungen innerhalb 0—10° konnten nicht ausgeführt werden.) Die gemessenen Werte A sind in Tab. 8 für flüssiges Natrium angegeben, in Gemeinschaft mit den theoretischen Werten B und Bi, worüber gleich berichtet werden wird.

Natrium besitzt die Atomzahl 11. Im nicht ionisierten Zustand ist nach den bisherigen Anschauungen ein komplanares, dreiringiges System anzunehmen, im ionisierten Zustande dagegen nur ein zweiringiges. Der innerste Ring soll 2, der zweite 8, der dritte 1 Elektron besitzen. Nach diesen Annahmen sind die folgenden Ansätze gemacht. Im nicht ionisierten Zustand ist V:

$$V = b \cdot \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \Bigg[2\left(1 + \frac{\sin \varrho}{\varrho}\right) + 8\left(1 + 2 \frac{\sin 0{,}38\, c\varrho}{0{,}38\, c\varrho}\right.$$

$$\left. + 2 \cdot \frac{\sin 0{,}71\, c\varrho}{0.71\, c\varrho} + 2 \cdot \frac{\sin 0{,}92\, c\varrho}{0{,}92\, c\varrho} + \frac{\sin c\varrho}{c\varrho}\right) + 1$$

$$+ 2 \cdot \left(4 \cdot \frac{\sin 3{,}97\, \varrho}{3{,}97\, \varrho} + 4 \cdot \frac{\sin 2{,}9\, \varrho}{2{,}9\, \varrho} + 4 \cdot \frac{\sin 3{,}13\, \varrho}{3{,}13\, \varrho} + 4 \cdot \frac{\sin 3{,}84\, \varrho}{3{,}84\, \varrho}\right)$$

$$+ 2 \cdot \left(2 \cdot \frac{\sin 44{,}82\, \varrho}{44{,}82\, \varrho}\right) + 2 \cdot \left(8 \cdot \frac{\sin 6{,}78\, \varrho}{6{,}78\, \varrho}\right)\Bigg] \cdot$$

Darnach gilt im ionisierten Zustand (bei Weglassung der Wirkung des äußersten Ringes):

$$V = b \cdot \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \Bigg[2\left(1 + \frac{\sin \varrho}{\varrho}\right) + 8\left(1 + 2 \cdot \frac{\sin 0{,}38 c\varrho}{0{,}38 c\varrho}\right.$$

$$\left. + 2 \cdot \frac{\sin 0{,}71 c\varrho}{0{,}71 c\varrho} + 2 \cdot \frac{\sin 0{,}92 c\varrho}{0{,}92 c\varrho} + \frac{\sin c\varrho}{c\varrho}\right)$$

$$+ 2 \cdot \left(4 \cdot \frac{\sin 3{,}97 \varrho}{3{,}97\, \varrho} + 4 \cdot \frac{\sin 2{,}9 \varrho}{2{,}9\, \varrho} + 4 \cdot \frac{\sin 3{,}13\, \varrho}{3{,}13\, \varrho} + 4 \cdot \frac{\sin 3{,}84 \varrho}{3.84\, \varrho}\right)\Bigg] \cdot$$

Im einzelnen lauten die Ausdrücke:

$$T_1 = 2\left(1 + \frac{\sin \varrho}{\varrho}\right) \text{ Wirkung des innersten Ringes,}$$

$$T_2 = 8\left(1 + 2 \cdot \frac{\sin 0{,}38\, c\varrho}{0{,}38\, c\varrho} + 2 \cdot \frac{\sin 0{,}71\, c\varrho}{0{,}71\, c\varrho} + 2 \cdot \frac{\sin 0{,}92\, c\varrho}{0{,}92\, c\varrho} + \frac{\sin c\varrho}{c\varrho}\right)$$

Wirkung des zweiten Ringes,

$$T_3 = 1 \text{ Wirkung des dritten Ringes.}$$

Tabelle 8.

Streuwinkel	Werte *A*	Werte *B*	Werte *Bi*
0	—	1940	1499
10	626	474	500
20	338	32	27
30	291	191	64
40	272	109	90
50	166	112	81
60	149	92	88
70	115	98	130
80	107	—	81
90	100	100	100
100	—	80	67
110	—	83	77
120	123	96	82
140	125	150	125
160	126	160	128
180	—	187	155

Die fehlenden Winkelwerte bringen keine Änderungen in den Kurven hervor, ähnlich wie dies bei Lithium schon der Fall war. Kurve *A* gibt für Natrium deutliche Unstetigkeiten bei etwa 32° und etwa 60°—70° an, an ähnlichen Stellen wie wir dies bei Lithium schon angetroffen haben. Zwischen 90° bis 160° sind keine Maxima zu entdecken, aber ein wesentlicher Unterschied von der Thomsonschen Verteilungskurve.

Die Wechselwirkungsglieder heißen:

$$T_{12} = 2 \cdot \Psi_{2,3}(\varrho c) = 2 \cdot \left(4 \cdot \frac{\sin 3{,}97\,\varrho}{3{,}97\,\varrho} + 4 \cdot \frac{\sin 2{,}9\,\varrho}{2.9\,\varrho} + 4 \cdot \frac{\sin 3{,}13\,\varrho}{3{,}13\,\varrho}\right.$$

$$\left. + 4 \cdot \frac{\sin 3.84\,\varrho}{3{,}84\,\varrho}\right)$$ angenähert kann dafür geschrieben werden $2 \cdot 16 \sin \frac{3{,}5\,\varrho}{3{,}5\,\varrho}$ (in T_{12} sind an und für sich schon genäherte Werte),

$$T_{13} = 2 \cdot \Psi_{2,1}(\varrho c') = 2 \cdot 2 \frac{\sin 44{,}82\,\varrho}{44{,}82\,\varrho}$$ (genähert),

$$T_{23} = 2 \cdot \Psi_{3,3}(\varrho c'') = 2 \cdot 8 \frac{\sin 6.78\,\varrho}{6{,}78\,\varrho}$$ (genähert).

Der Radius des innersten Ringes berechnet sich nach:

$$a_i = \frac{0{,}528 \cdot 10^{-8}}{11 - 0{,}25} = 0{,}049 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm};$$

$$\varrho = \frac{8 \cdot \pi \cdot 0{,}049 \sin \frac{\vartheta}{2}}{0{,}19} = 6{,}494 \sin \frac{\vartheta}{2},$$

$c = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4\,(11 - 0{,}25)}{11 - 2 - 2{,}8} = 6{,}94$ (c Verhältnis des zweiten Radius a_2 zum inneren Radius a_1),

$c' = \frac{a_3}{a_1} = \frac{9\,(11 - 0{,}25)}{11 - 2 - 8 - 0} = 96{,}75$ (c' Verhältnis des dritten Radius a_3 zum innersten Radius a_1),

$c'' = \frac{a_3}{a_2} = \frac{96{,}75}{6{,}94} = 13{,}95$ (c'' Verhältnis des dritten Radius a_3 zum zweiten Radius a_2).

0,25 ist die Abschirmungskonstante des innersten Ringes (2 Elektronen).

2,8 ist die Abschirmungskonstante des zweiten Ringes a_2 (8 Elektronen).

Der dritte Ring mit einem Elektron hat die Abschirmungskonstante 0.

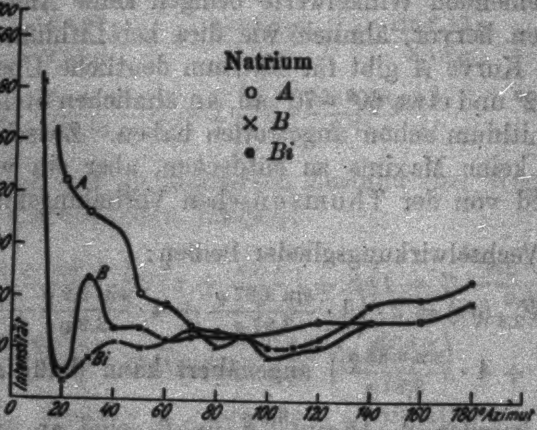


Fig. 8.

Von irgendwelcher Übereinstimmung zwischen Kurve *A* (vgl. Tab. 8 und Fig. 8), *B* und *Bi* ist hier keine Rede. Die Annahmen, auf denen das Modell aufgebaut ist, bedürfen aller Wahrscheinlichkeit nach einer größeren Abänderung betreffs der Konfiguration und Verteilung der Elektronen.

Neuerdings hat Debye gelegentlich der Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte in Nauheim eine Betrachtung angestellt, nach welcher außer der intraatomaren Interferenz auch im flüssigen Zustande die Wirkung der Interferenzen der Atome untereinander zu berücksichtigen ist. Die Formel,[1]) die beide Wirkungen wiedergibt, lautet:

$$(\mathrm{P}_1) \qquad \frac{J}{J_0} = n \cdot \frac{\psi'^2}{R^2} \, \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \left[1 - \frac{\Omega}{V} \, \Theta(u) \right] .$$

Der Ausdruck:

$$\left[1 - \frac{\Omega}{V} \, \Theta(u) \right]$$

ist hauptsächlich maßgebend für die Wirkung der Atominterferenzen. In dieser Formel bedeutet J/J_0 das Verhältnis der Streuintensität J zur primären Intensität J_0 am Orte des Präparates; n ist die Anzahl der bestrahlten Moleküle bzw. Atome. ψ^2 der eigentlich interessante Teil der Formel ist eine Funktion vom Winkel ϑ. Diese Größe mißt die Interferenzen aus dem Molekül- bzw. Atominneren. $\frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2}$ ist der Thomsonsche Faktor. Die eckige Klammer ist der Interferenzeffekt der Moleküle bzw. Atome untereinander. Genau gilt die Formel nur für ein Gas; es ist daher eine Extrapolation, wenn man sie auf Flüssigkeiten anwendet. Für Flüssigkeiten kann nur gesagt werden, daß Ω/v ungefähr das Verhältnis ist des von Molekülen bedeckten Raum zum gesamten Raum, wogegen für Gase Ω das achtfache Volumen aller Moleküle bedeutet und V das Volumen des Raumes ist, in dem die Moleküle verteilt sind. Weiter ist

$$\Theta(u) = 3 \, \frac{\sin u - u \cos u}{u^3} \qquad \text{und} \qquad u = 4 \pi \frac{d}{\lambda} \sin \frac{\vartheta}{2} \, .$$

d gibt den Durchmesser eines Moleküles, λ die Wellenlänge der auffallenden Strahlung. Vermittelst obiger Gleichung für u findet man das erste Minimum von $\Theta(u)$ und deshalb *ungefähr* das erste Maximum von

$$\frac{J}{J_0} \quad \text{bei} \quad u = \frac{11}{6} \pi .$$

Ist also der Winkel des ersten Maximums auf der Aufnahme ϑ_0, so gilt ungefähr

$$\frac{d}{\lambda} = \frac{11}{24} \, \frac{1}{\sin \frac{\vartheta_0}{2}} ,$$

---

[1]) Hr. Prof. Debye war so liebenswürdig, uns die Formel brieflich mitzuteilen.

so daß oben d/λ in u durch diesen Ausdruck ersetzt werden kann. Diese Formel möge hier für Natrium angewendet werden. Zunächst handelt es sich um den Ausdruck Ω/v. Nun ist v bei unserer Versuchsanordnung 1 ccm; es bleibt nur noch übrig Ω zu ermitteln. Dies geschah durch folgende Überlegung. Den Raum, den ein Atom einnimmt, ist gegeben durch

$$\frac{4\pi r^3}{3},$$

wenn r der Radius des Atomes ist; der Spielraum dagegen, den das Atom besitzt, d. h. der Raum des Elementarwürfels mit der Kante d ist gegeben durch d^3. Der Ausdruck

$$\frac{4\pi r^3}{3 \cdot d^3}$$

gibt uns Ω/v. Mit großen Schwierigkeiten ist die Angabe des Radius der Atome verknüpft. Bei Überlegungen aus der kinetischen Gastheorie für Flüssigkeiten auf die van der Waalsche Zustandsgleichung macht sich dies schon bemerkbar. Nach der Gastheorie würde der Radius einen zu großen Wert bekommen, so daß der eckige Klammerausdruck in P_1 negativ würde. Dieser Ausdruck würde ebenfalls negativ, wenn die Größe des Radius des Atoms nach den Bohrschen Vorstellungen und der Quantentheorie berechnet würde. Die Größe des äußeren Radius ist nicht eindeutig definiert (vgl. Schlußbetrachtung). Es schien daher besser, für r einen Wert zu nehmen, der zwischen dem Radius des äußersten Ringes und dem nach innen nächstliegenden Ringes ist, wobei dieser Wert noch näher am inneren Ringe liegend angenommen wurde. Man erhält auf diese Weise für Natrium den numerischen Wert 0,4 für Ω/v.

Die untenstehenden Zahlenwerte der 3. Kolonne sind nach der Formel (P_1) gefunden. Sie werden mit dem Buchstaben N_1 bezeichnet. Kolonne N_2 gibt die Werte des Ausdrucks

$$(P_2)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{J_1}{J_0} &= n\,\frac{1+\cos^2\vartheta}{K^2\cdot 2}\left[1-\frac{\Omega}{v}\,\Theta(u)\right] \\ &= b\cdot\frac{1+\cos^2\vartheta}{2}\left[1-\frac{\Omega}{v}\,\Theta(u)\right], \end{aligned}\right.$$

wenn

$$\frac{n}{K^2} = b$$

gesetzt wird. Es ist dies der Ausdruck, der den Einfluß der Atominterferenzen allein angibt. Zum Vergleich sind in der Tab. 9 die Werte B angegeben.

Tabelle 9.

Streuwinkel	berechnete Werte B	berechnete Werte N_1	berechnete Werte N_2
0°	1940	1216	125
10	474	330	145
20	32	30	177
30	191	232	214
40	109	131	188
50	112	112	141
60	92	94	123
70	98	98	118
90	100	100	100
120	96	96	125
140	150	153	162
160	160	160	189
180	187	186	190

Eine besondere Veränderung zwischen B und N_1 ist nicht aufzuweisen. Bei manchen Winkeln ist eine kleine Verbesserung eingetreten, z. B. bei 0°, 30°, 40°; von 90° bis 160° sind die Werte angenähert gleich. Daß die Korrektionen der atomaren Interferenzeffekte keinen größeren Einfluß auf den Verlauf der Kurven haben, läßt die Vermutung nahe legen, daß die hauptsächlichen Wirkungen aus dem Atominneren stammen. Die Maxima, die sich bei dem flüssigen wie festen Natrium an derselben Stelle der gemessenen Kurve zeigen, sind ebenfalls auf intraatomare Interferenzerscheinung zurückzuführen.

Auch beim Natrium ist an den Einfluß eines elektrodynamischen Effektes zu denken, wie dies beim Lithium erwähnt wurde.

Wir hoffen, allen dargelegten Fragen näher zu kommen durch die Untersuchung des Natriums ebenfalls bei einer anderen Wellenlänge.

Kalium.

Wie Natrium konnte auch Kalium in flüssiger wie fester Form untersucht werden. Die Aufnahmen von Kalium nach der Debye-Scherrer-Methode zeigten für Kalium wiederum Interferenzflecke bei Anwendung der festen Phase, während durch die flüssige keine scharfen Interferenzfiguren entstanden. Auch hier lagen die beobachteten Interferenzflecke nahe am Primärstrahl innerhalb 0—10°.

Wie beim Natrium zeigten die Intensitäten für Kalium bei 10° und 20° für die flüssige und feste Phase verschiedene Werte; von da an aufwärts bleiben dann die Intensitäten gleich. (Die Erklärung hierfür ist schon unter Natrium gegeben S. 535 und oben.) Tab. 10 gibt die Zahlenwerte für 10°, 20°, 30° wieder:

Tabelle 10.

Streuwinkel	Intensität	
	flüssig	fest
10°	633,8	537
20	379	345
30	270	270

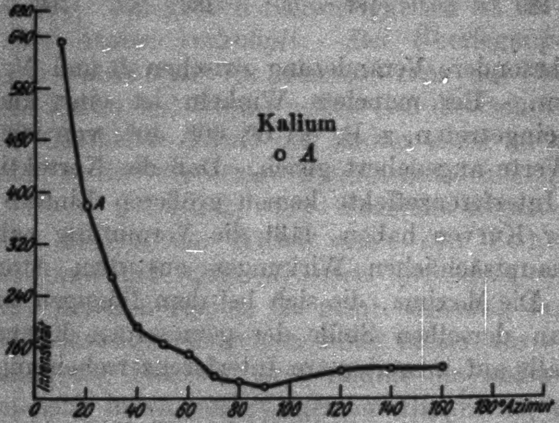


Fig. 9.

Schon die bei Natrium außerordentlich großen Differenzen zwischen gemessenen und berechneten Werten zeigen sich noch ausgeprägter bei Kalium. Es sei hier darum von berechneten Werten Abstand genommen. Die gemessenen Werte sind in Tab. 11 angegeben. In Fig. 9 ist nur die gemessene Kurve *A* eingezeichnet. Kurve *A* ist von 90—160° wiederum sehr flach und hat genau dieselbe Form wie Kurve *A* bei Natrium; die Thomsonsche Verteilungskurve ist deswegen auch aus ihrer Form verdrängt. Auf der anderen Seite jedoch zwischen 10 und 90° ist nur die Andeutung eines Maximums bei etwa 60° zu erkennen. Eine gewisse Ähnlichkeit der Kurve *A* bei Kalium und bei Natrium ist vorhanden.

Tabelle 11.

Streuwinkel	Gemessene Werte *A*	Streuwinkel	Gemessene Werte *A*
0°	—	70°	115
10	634	80	107
20	379	90	100
30	270	120	123
40	192	140	125
50	166	160	126
60	149	180	—

Im Vergleich zu Lithium und den folgenden Stoffen Wasser und Methylalkohol dagegen ist bei Natrium und Kalium eine viel stärkere Dissymmetrie zu verzeichnen; man sieht ohne weiteres, daß die Kurven *A* bei Natrium und Kalium bei kleinen Winkeln eine viel größere, bei großen Winkeln eine viel kleinere Intensität im Vergleich zu 90° aufweisen als Lithium, Wasser und Methylalkohol. An die mögliche Wirkung eines elektrodynamischen Effektes sei auch beim Kalium erinnert.

Wasser.

Die Kenntnis des Streuungskoeffizienten für Wasser ist, wie eingangs erwähnt, in physikalischer wie praktischer Hinsicht besonders wünschenswert. Im folgenden sind die Ergebnisse der Messungen angegeben wie sie die azimutale Streuverteilung bei Wasser ergaben. Zugleich ist die azimutale Streuverteilung zu einer Diskussion über Anschauungen entsprechender Atommodelle herangezogen worden. Nur liegen hier die Verhältnisse gegenüber den Alkalien insofern schwieriger, als wir es bei Wasser mit Molekülen zu tun haben; voraussichtlich werden Wasserstoff wie Sauerstoff ihren streuenden Einfluß geltend machen. Würde man für Wasser nur die Streuung des Wasserstoffes verantwortlich machen, so erhielte man die Thomsonsche Verteilungskurve nach der Formel

$$J_\vartheta = J_{\pi/2}\,(1 + \cos^2 \vartheta),$$

so daß $J_0 = 2 J_{90}$ ist. Nun kommen im Wasserstoffmolekül auf ein Atom Sauerstoff zwei Atome Wasserstoff. Wir müßten also für die Intensität J_0 bei 0° gegenüber derjenigen bei 90° setzen: $J_0 = 2 \cdot 2\, J_{90}$. Sauerstoff allein würde dem Verlauf der Kurve auch nicht gerecht werden. Es wurden deshalb beide Elemente rechnerisch in Betracht gezogen durch eine Art Superposition. Für Sauerstoff ist bei der angewandten Wellenlänge die Intensität für 0° (bei einer bestimmten Annahme über die Anordnungen der Elektronen vgl. folgende Ansätze) etwa 16mal so groß als bei 90°. Superponiert man beide Werte, so erhält man für das Verhältnis der Intensität bei 0° zur Intensität bei 90°

$$\frac{J_0}{J_{90}} = \frac{2 \cdot 2 + 1 \cdot 16}{3} = 6{,}6\,.$$

Nach neueren Untersuchungen von Holthusen[1]) soll, aus bisher noch unbekannten Gründen, *H* an an und für sich etwa 2mal so stark streuen als die anderen leichten Atome. Dann wäre zu setzen:

$$\frac{J}{J_{90}} = \frac{4 \cdot 2 + 1 \cdot 16}{5} = 4{,}8\,.$$

Durch 5 ist jetzt zu dividieren, da wir jetzt 5 statt 3 Atome haben. Die weiter unten folgenden berechneten Zahlenwerte sind nach der letzteren Annahme ausgeführt worden. Wie üblich sind alle Zahlen auf den Wert 100 bei 90° berechnet worden. Es soll hier gleich vorweg genommen werden, daß in untenstehender Tab. 12 zwei berechnete Kolonnen von Zahlenwerten angegeben sind: *B* und *C*, die durch zwei verschiedene Annahmen für das Sauerstoffatommodell resultieren.

Tabelle 12.

Streuwinkel	gemessene Kurve *A*	berechnete Kurve *B*	berechnete Kurve *C*
0°	—	480	570
10	295	180	288
20	166	198	233
30	167	172	183
40	150	162	172
50	136	141	138
60	123	129	122
70	111	119	111
90	100	100	100
120	121	127	127
140	155	165	164
160	191	192	192
180	—	205	207

---

[1]) **H. Holthusen**, a. a. O. S. 1.

Es folgen nun die Ansätze des Sauerstoffatomes für die beiden Annahmen, wie schon oben angedeutet wurde. Die erste Annahme ist die, daß das Sauerstoffmodell zwei Ringe besitzen soll; die acht Elektronen des Sauerstoffes sind dabei so verteilt, daß auf dem inneren Ringe zwei, auf dem äußeren sechs Elektronen kreisen. Allerdings wird dieser Ansatz der Zweiwertigkeit des Saurestoffes nicht gerecht. Die umgekehrte Annahme, daß innen sechs, außen zwei Elektronen sich bewegen mögen, zeigte sich als unbrauchbar. Der innerste Ring ist

$$a_i = \frac{0{,}528 \cdot 10^{-8}}{8 - 0{,}25} = 0{,}068 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm},$$

$$c = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4\,(8 - 0{,}25)}{8 - 2 - 1{,}83} = 7{,}43\,;$$

1,83 ist die Abschirmungskonstante für 6 Elektronen.

Der Ansatz lautet:

$$V = b \cdot \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \Bigg[2\left(1 + \frac{\sin \varrho}{\varrho}\right) + 6\left(1 + \frac{2 \sin 0{,}5\, c\, \varrho}{0.5\, c\, \varrho} + \frac{2 \sin 0{,}87\, c\, \varrho}{0{,}87\, c\, \varrho}\right.$$

$$\left. + \frac{\sin c\, \varrho}{c\, \varrho}\right) + 2\left(\frac{3 \sin 3{,}22\, \varrho}{3{,}22\, \varrho} + 2 \sin \frac{4{,}217\, \varrho}{4{,}217\, \varrho} + 4 \sin \frac{4{,}157\, \varrho}{4{,}157\, \varrho}\right.$$

$$\left. + 3 \cdot \frac{\sin 3{,}493\, \varrho}{3{,}493\, \varrho}\right)\Bigg]\,.$$

Die einzelnen Glieder sind:

$$T_1 = 2\left(1 + \frac{\sin \varrho}{\varrho}\right),$$

$$T_2 = 6\left(1 + \frac{2 \sin 0{,}5\, c\, \varrho}{0{,}5\, c\, \varrho} + \frac{2 \sin 0{,}87\, c\, \varrho}{0{,}87\, c\, \varrho} + \frac{\sin c\, \varrho}{c\, \varrho}\right),$$

$$T_{12} = 2\left(3\, \frac{\sin 3{,}22\, \varrho}{3{,}22\, \varrho} + 2\, \frac{\sin 4{,}217\, \varrho}{4{,}217\, \varrho} + 4\, \frac{\sin 4{,}157\, \varrho}{4{,}157\, \varrho} + 3\, \frac{\sin 3{,}493\, \varrho}{3{,}493\, \varrho}\right)$$

oder stark genähert;

$$T_{12} = 2 \cdot \Psi_{2,6} = 2 \cdot 12 \sin \frac{3{,}5\, \varrho}{3{,}5\, \varrho}\,.$$

Der zweiten Annahme liegen drei Ringe zugrunde. Der innerste Ring besitze drei, der zweite wieder drei und der dritte Ring zwei Elektronen. Diese Annahme wäre der Zweiwertigkeit des Sauerstoffes angepaßt. (Die zwei inneren Ringe mit je drei Elektronen erinnern an die Annahme von

Glocker[1]), die er unter anderen Annahmen für das Kohlenstoffatom gemacht hat.) Darnach gilt:

$$a_i = \frac{0,528 \cdot 10^{-8}}{8 - 0,577} = 0,0712 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm};$$

0,577 ist die Abschirmungskonstante für 3 Elektronen.

$$c = \frac{a_2}{a_i} = \frac{4\,(8 - 0,577)}{8 - 3 - 0,577} = 6,71$$

($c =$ Verhältnis des zweiten Radius a_2 zum innersten a_i).

$$c' = \frac{a_3}{a_i} = \frac{9\,(8 - 0,577)}{8 - 3 - 3 - 0,25} = 21,04$$

($c' =$ Verhältnis des dritten Radius a_3 zum innersten a_i).

$$c'' = \frac{a_3}{a_2} = \frac{21,04}{6,71} = 3,135$$

($c'' =$ Verhältnis des dritten Radius a_3 zum zweiten a_2).

Der Ansatz lautet:

$$\begin{aligned} V = b \cdot \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \Bigg[& 3\left(1 + \frac{2 \sin 0,87\,\varrho}{0,87\,\varrho}\right) + 3\left(1 + \frac{2 \sin 0,87\,\varrho\, c}{0,87\,\varrho\, c}\right) \\ & + 2\left(1 + \sin \frac{21,04\,\varrho}{21,04\,\varrho}\right) + 2\left(\frac{3 \sin 3,596\,\varrho}{3,596\,\varrho} + 2 \cdot \frac{\sin 3,76\,\varrho}{3,76\,\varrho}\right. \\ & \left. + 4 \sin \frac{2,81\,\varrho}{2,81\,\varrho}\right) + 2\left(\frac{2 \sin 9,998\,\varrho}{9,998\,\varrho} + \frac{2 \sin 10,688\,\varrho}{10,688\,\varrho} + \frac{2 \sin 10,76\,\varrho}{10,76\,\varrho}\right) \\ & + 2\left(\frac{2 \sin 0,945\,\varrho}{0,945\,\varrho} + \frac{2 \sin 1,953\,\varrho}{1,953\,\varrho} + \frac{2 \sin 1,81\,\varrho}{1,81\,\varrho}\right)\Bigg]. \end{aligned}$$

Im einzelnen heißen die Glieder:

$$T_1 = 3\left(1 + \frac{2 \sin 0,87\,\varrho}{0,87\,\varrho}\right) \text{ Wirkung des innersten Ringes),}$$

$$T_2 = 3\left(1 + \frac{2 \sin 0,87\,\varrho\, c}{0,87\,\varrho\, c}\right) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$T_3 = 2\left(1 + \frac{\sin 21,04\,\varrho}{21,04\,\varrho}\right) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"}$$

$$T_{12} = 2 \cdot \Psi_{3,3} = 2\left(\frac{3 \sin 3,596\,\varrho}{3,596\,\varrho} + \frac{2 \sin 3,76\,\varrho}{3,76\,\varrho} + \frac{4 \sin 2,81\,\varrho}{2,81\,\varrho}\right)$$

1. Wechselwirkungsglied,

$$T_{13} = 2 \cdot \Psi_{3,3} = 2\left(\frac{2 \sin 9,998\,\varrho}{9,998\,\varrho} + \frac{2 \sin 10,688\,\varrho}{10,688\,\varrho} + \frac{2 \sin 10,76\,\varrho}{10,76\,\varrho}\right)$$

2. Wechselwirkungsglied,

$$T_{23} = 2 \cdot \Psi_{3,3} = 2\left(\frac{2 \sin 0,945\,\varrho}{0,945\,\varrho} + \frac{2 \sin 1,953\,\varrho}{1,953\,\varrho} + \frac{2 \sin 1,81\, v}{1,81\,\varrho}\right)$$

3. Wechselwirkungsglied.

---

[1] R. Glocker, Ann. d. Phys. 64. S. 549. 1921.

Die Zahlenwerte und die Kurve, die der ersten Annahme entsprechen, sind mit *B* bezeichnet, diejenigen, die nach der zweiten Annahme berechnet sind, mit *C*. Aus Tab. 12 und Fig. 10 ist zu entnehmen, daß für die beiden verschiedenen Annahmen des Sauerstoffes bei den kleineren Winkeln deutliche Unterschiede zu erkennen sind. Beide Annahmen haben ihre Vor- und Nachteile im Vergleich zur gemessenen Kurve *A*. Man sieht, daß Kurve *B* bei 10° viel zu tief hinuntergeht, bei 20° zu hoch hinauf, so daß das bei 30° angedeutete Maximum der gemessenen Kurve *A* bei *B* nicht zutage tritt. Kurve *C* dagegen ist bei 10° in ganz guter Übereinstimmung mit *A*, bei 20° weicht sie jedoch mehr von *A* ab als *B*. Über eine geeignete Annahme, die diese Unterschiede ausgleichen würde, ist vorläufig noch nicht zu entscheiden. Von etwa 40—180° ist eine recht gute Übereinstimmung festzustellen mit der Thomsonschen Verteilungskurve *T* (die Kurve *T* ist in Fig. 10 mit eingezeichnet) sowohl für *A* wie für *B* und *C*, im Winkelbereich von 0°—40° jedoch tritt die schon andererorts erwähnte Abweichung deutlich hervor. Die neue Formel nach Debye wurde auch für Wasser angewandt. Wir betrachteten sie auf den Fall *C*. W_1 ist nach der Formel (P_1) und W_2 nach der Formel (P_2) gefunden worden. In Tab. 13 sind mit W_1 und W_2 auch die Werte für *C* angegeben (W_2 berücksichtigt nur den atomaren Streueffekt).

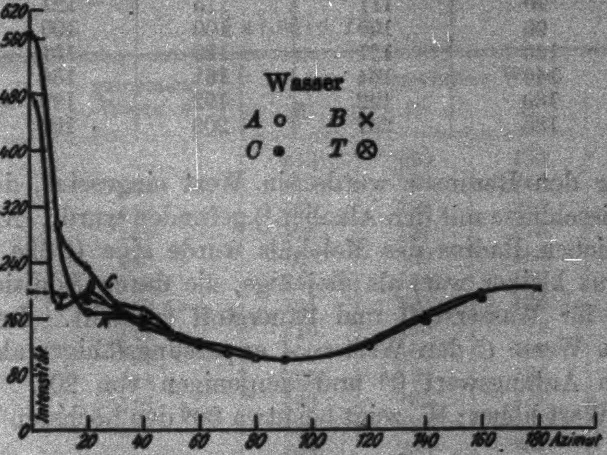


Fig. 10.

Tabelle 13.

Streuwinkel	berechnete Werte C	berechnete Werte W_1	berechnete Werte W_2
0°	570	347	163
10	288	211	172
20	233	233	190
30	183	188	196
40	172	178	161
50	138	135	138
60	123	121	123
70	111	115	121
90	100	100	100
120	127	129	127
140	164	161	166
160	192	192	189
180	207	208	197

Für den Radius r wurde ein Wert eingesetzt, der durch Analogieschlüsse mit den Alkalien[1]) gefunden wurde. Als durchschnittlichen Radius des Moleküls wurde eine Größe benutzt, die etwas kleiner war, als diejenige, die durch Additionen des Radius für Wasserstoff und Sauerstoff entsteht. Im ganzen sind die Werte C den Werten A anpassungsfähiger als W_1 bis auf den Anfangswert 0° und denjenigen von 20°. Bei 30° ist der Wert höher; W_2 zeigt bei etwa 30° den höchsten Wert an.

Methylalkohol.

Weiterhin wurde Methylalkohol zur Untersuchung herangezogen wegen des neu hinzutretenden Kohlenstoffatomes. Natürlich wäre es vorteilhafter gewesen, Methan oder dergl. zu untersuchen, aber Gase streuen zu wenig.

Die theoretischen Kurven für Methylalkohol wurden auf dieselbe Art gefunden, wie für Wasser, d. h. ebenfalls durch eine Art Superposition. Für eine bestimmte Annahme des Atommodells für Kohlenstoff (vgl. weiter unten) ist die Intensität bei 0° etwa 12mal so groß als bei 90°. Nehmen wir für das Sauerstoffatom die Annahme, bei welcher die Intensität bei 0° 16mal so groß ist als bei 90°. Für das Wasserstoffatom nehmen wir die gleiche Annahme wie dies schon bei Wasser geschah. Wir haben jedoch im Methylalkohol vier Wasserstoffatome statt zwei wie beim Wasser. Dann gilt für das

---

1) S. 540.

Verhältnis der Intensität von 0° zu derjenigen von 90° für Methylalkohol (in Betracht der Annahme nach Holthusen):

$$\frac{J_0}{J_{90}} = \frac{4 \cdot 4 + 1 \cdot 16 + 1 \cdot 12}{10} = 4{,}4 .$$

Es muß durch 10 dividiert werden, wenn man annimmt, daß 10 Atome: $10 + 10 + 2H_4$ vorhanden sind. Auf diese Art wurden die Kurven *B*, *C*, *D*, *E* gefunden. (*B*, *C*, *D*, *E* sind durch verschiedene Annahmen über die Modelle des Sauerstoffs und Kohlenstoffs erhalten worden. (Vgl. unten.)

Tabelle 14.

Streuwinkel	gemessene Werte *A*	berechnete Werte			
		B	*C*	*D*	*E*
0°	—	446	460	490	504
10	265	187	208	243	255
20	159	199	198	212	215
30	157	176	177	179	182
40	143	160	159	166	153
50	138,2	141	144	139	141
60	118,4	125	127	122	124
70	111	116	115	112	111
90	100	100	100	100	100
120	118	125	129	126	129
140	148	163	165	151	165
160	165	190	195	190	196
180	—	203	208	204	209

In obenstehender Tabelle sind die Zahlenwerte für die verschiedenen Annahmen angegeben. Im allgemeinen ist eine recht gute Anpassung mit der Thomsonschen Verteilungskurve zu bemerken. Bei 10° sind die Werte *D* und *E* in besserer Übereinstimmung mit dem gemessenen Wert als die Werte *B* und *C*. Diese zeigen bei 10° einen viel zu tiefen Wert an. Bei 20° rücken die Werte für *B* und *C* mehr an den gemessenen Wert heran als *D* und *E*. Bei 20° ist bei allen vier Annahmen *B*, *C*, *D*, *E* eine ziemliche Abweichung von *A* festzustellen. Auf den ersten Blick scheinen die Annahmen *D* und *E* mehr zu befriedigen als *B* und *C*.

Wie für das Sauerstoffatom wurden für das Kohlenstoffatom auch zwei Annahmen gemacht über die Verteilung der Elektronen im Atom. Bei der ersten Annahme wird angenommen, daß das Kohlenstoffatom zwei Ringe besitzt; auf dem innersten Ringe sollen sich zwei, auf dem äußeren vier

Elektronen bewegen. In ihrer Addition geben diese beiden Elektronenzahlen die Atomzahl 6 des Kohlenstoffatoms.[1]) Nach dieser Annahme gilt:

$$a_i = \frac{0{,}528 \cdot 10^{-8}}{6 - 0{,}25} = 0{,}092 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm},$$

$$c = \frac{4\,(6 - 0{,}25)}{6 - 2 - 0{,}957} = 7{,}6$$

(0,957 ist die Abschirmungskonstante für vier Elektronen),

$$V = b \cdot \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \left[2\left(1 + \frac{\sin \varrho}{\varrho}\right) + 4\left(1 + \frac{\sin 7{,}6\,\varrho}{7{,}6\,\varrho} + \frac{2 \sin 5{,}4\,\varrho}{5{,}4\,\varrho}\right) \right.$$
$$\left. + 2\left(\frac{2 \sin 3{,}287\,\varrho}{3{,}287\,\varrho} + \frac{4 \sin 4{,}29\,\varrho}{4{,}29\,\varrho} + \frac{2 \sin 3{,}82\,\varrho}{3{,}82\,\varrho}\right) \right],$$

$T_1 = 2\left(1 + \frac{\sin \varrho}{\varrho}\right)$ Wirkung des innersten Ringes a_i,

$T_2 = 4\left(1 + \frac{\sin 7{,}6\,\varrho}{7{,}6\,\varrho} + \frac{2 \sin 5{,}4\,\varrho}{5{,}4\,\varrho}\right)$ Wirkung d. zweiten Radius a_2,

$T_{12} = 2\,\Psi_{2,4} = 2\left(\frac{2 \sin 3{,}287\,\varrho}{3{,}287\,\varrho} + \frac{4 \sin 4{,}29\,\varrho}{4{,}29\,\varrho} + \frac{2 \sin 3{,}82\,\varrho}{3{,}82\,\varrho}\right)$

Wechselwirkungsglied.

Den äußeren Ring mit vier Elektronen zu besetzen, würde der Vierwertigkeit des Kohlenstoffatoms entsprechen. Landé[2]) hat für Kohlenstoff eine räumliche Anordnung gegeben, wobei er der Vierwertigkeit des Kohlenstoffatoms ebenfalls gerecht wird. Glocker[3]) zeigte, daß dieses räumliche Atommodell in bezug auf die Interferenzeffekte der Streustrahlung dem ebenen Bohrschen Atommodell nahezu äquivalent ist, so daß anzunehmen ist, daß die Berechnungen mit einem ebenen Atommodell für Kohlenstoff voraussichtlich gebrauchbar wären.

Für die zweite Annahme wurde angesetzt:

a_i mit 3 Elektronen, $a_a = a_2$ mit 3 Elektronen.

$$a_i = \frac{0{,}528 \cdot 10^{-8}}{6 - 0{,}577} = 0{,}097 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{cm},$$

$c = \frac{4\,(6 - 0{,}577)}{6 - 3 - 0{,}577}$ Verhältnis beider Ringradien a_2 zu a_i,

$$V = b \cdot \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \left[3\left(1 + \frac{2 \sin 0{,}87\,\varrho}{0{,}87\,\varrho}\right) + 3\left(1 + \frac{2 \sin 0{,}87\,\varrho\, c}{0{,}87\,\varrho\, c}\right) \right.$$
$$\left. + 2\left(\frac{2 \sin 4{,}985\,\varrho}{4{,}985\,\varrho} + \frac{3 \sin 4{,}511\,\varrho}{4{,}511\,\varrho} + 4 \cdot \frac{\sin 3{,}98\,\varrho}{3{,}98\,\varrho}\right) \right],$$

---

[1]) a. a. O., R. Glocker u. M. Kaupp, S. 549.

[2]) A. Landé, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 21. S. 657. 1919.

[3]) R. Glocker, Zeitschr. f. Physik 1921. S. 54.

$$T_1 = 3\left(1 + \frac{2 \sin 0{,}87\,\varrho}{0{,}87\,\varrho}\right) \text{ Wirkung des innersten Ringes } a_1,$$

$$T_2 = 3\left(1 + \frac{2 \sin 0{,}87\,\varrho\,c}{0{,}87\,\varrho\,c}\right) \quad \text{„} \quad \text{„ zweiten} \quad \text{„} \quad a_2,$$

$$T_{12} = 2\,\Psi_{3,3} = 2\left(\frac{2 \sin 4{,}985\,\varrho}{4{,}985\,\varrho} + \frac{3 \sin 4{,}511\,\varrho}{4{,}511\,\varrho} + \frac{4 \sin 3{,}98\,\varrho}{3{,}98\,\varrho}\right).$$

Wechselwirkungsglied.

Setzt man allgemein die Anzahl der Elektronen des innersten Ringes gleich p, die des zweiten p' usw., so werden die Kurven B, C, D, E durch folgende Kombinationen erhalten:

B: erste Annahme für O ($p = 2$; $p' = 6$)
„ „ „ C ($p = 2$; $p' = 4$).
C: erste „ „ O ($p = 2$; $p' = 6$)
zweite „ „ C ($p = 3$; $p' = 3$)
D: zweite „ „ O ($p = 3$; $p' = 3$; $p'' = 2$)
erste „ „ C ($p = 2$; $p' = 4$)
E: zweite „ „ O ($p = 3$; $p' = 3$; $p'' = 2$)
zweite „ „ C ($p = 3$; $p' = 3$).

Durch die zweite Annahme für das Sauerstoffatommodell zeigten sich für Wasser wie für Alkohol im allgemeinen eine bessere Übereinstimmung.

Nach der neueren Debyeschen Formel wurde Kurve E behandelt. Dadurch entstanden die Werte M_1, die nach der Formel (P_1) erhalten wurden. Für M_2, welches der Formel (P_2) entspricht, ist angenommen, daß die dazugehörigen Werte angenähert durch W_2 wiedergegeben sind. Untenstehende Tab. 15 gibt die Werte an für die verschiedenen Fälle A, E und M_1.

Tabelle 15.

Streuwinkel	gemessene Werte A	berechnete Werte E	berechnete Werte M_1
0°	—	504	404
10	265	255	220
20	159	215	213
30	157	182	203
40	143	153	153
50	138	141	141
60	118	124	124
70	111	111	114
90	100	100	100
120	118	129	129
140	148	165	167
160	165	196	194
180	—	209	207

Wie die Zahlenwerte zeigen, erhalten die Werte für E eine kleine Verbesserung der Anfangswerte. Bei etwa 30° geht der Betrag bei M_1 etwas in die Höhe. Dies entspricht dem flachen Maximum bei etwa 30°.

Zwischen den gemessenen Werten A für Wasser und den gemessenen Werten A für Methylalkohol ist im ganzen (vgl. die Tabb. 12 und 15) eine große Ähnlichkeit festzustellen. Bei den Winkeln der stärksten Streuung, wie z. B. bei 10°, 20°, 30° einerseits und 160° andererseits sind Abweichungen der beiden gemessenen Werte A (vgl. Tabb. 12 und 15) beider Stoffe am meisten bemerkbar. Die vergleichenden Messungen zwischen Wasser und Methylalkohol hatten gezeigt, daß Wasser an den eben genannten Stellen stärker streute als Methylalkohol. Die berechneten Werte für H_2O und CH_3OH zeigten dagegen bei 160° angenähert dieselben Zahlen.

Schluß.

In vorliegender Arbeit wurde die azimutale Intensitätsverteilung der von einer Reihe von einfachen Körpern ausgehenden Streustrahlung untersucht. Die Meßergebnisse, *die vor allem experimentelles Material bringen sollen*, zeigen, daß hauptsächlich bei kleinen Azimuten beträchtliche Abweichungen von der Thomsonschen Verteilung vorhanden sind, die als intraatomare Interferenzen im Sinne Debyes gedeutet werden können. Die Meßergebnisse wurden mit den neueren Anschauungen über den Bau der Atome verglichen. Zwischen Messung und Rechnung für die Elemente Na und K mit 11 und 19 Elektronen ist keine Übereinstimmung gefunden worden, für Li mit nur 3 Elektronen ist die Übereinstimmung angenähert. Auch für Wasser und Alkohol ließ sich in einem großen Meßbereich eine angenäherte Übereinstimmung feststellen. Es ist nicht zu verwundern, daß die Übereinstimmung für niedere Atomzahlen eine bessere ist als für hohe, da die Konstellationsmöglichkeiten der Elektronen bei Elementen niederer Atomzahlen nicht so mannigfaltig sind wie bei höheren. In Anbetracht der Tatsache, daß die Vorstellungen Bohrs auf rein energetischer Basis stehen, ohne zunächst über die Form und Anordnung der Elektronenbahnen etwas näheres auszusagen, erschien es verfrüht, weitere theoretische Spekulationen anzuknüpfen.

Es ist beabsichtigt die Untersuchung der azimutalen Streuverteilung für andere Wellenlängen als die des Pt-α-Dublets auszuführen. Auch soll, um weitere experimentelle Aufschlüsse über die untersuchte Erscheinung zu erhalten, zu den ausstehenden Messungen ein schmäleres Strahlenbündel verwendet werden, da es von Vorteil sein wird, engere Winkelbereiche, vor allen Dingen bei kleinen Azimuten, zu messen.

Freiburg i. Br., Radiologisches Institut der Universität.

(Eingegangen 26. November 1923.)

Anmerkung bei der Korrektur.

Den oben mitgeteilten Untersuchungen lag die Voraussetzung zugrunde, daß bei dem Streuvorgang die klassische Elektrodynamik gültig ist, d. h. daß sich die Wellenlänge der Röntgenstrahlung bei dem Streuvorgang nicht ändert. Neuere Untersuchungen von **Compton**[1]) und theoretische Betrachtungen von **Debye**[2]) weisen jedoch darauf hin, daß eine Änderung der Wellenlänge bei dem Streuvorgang vorhanden ist. Wir haben nun inzwischen ähnliche Untersuchungen im Zusammenhang mit der obigen Arbeit abgeschlossen, die zu denselben Ergebnissen geführt haben. Die Resultate der obigen Arbeit bedürfen daher noch einer weiteren Korrektion. Über die Untersuchungen wird in allernächster Zeit ausführlich berichtet werden.

---

1) A. H. **Compton**, Phil. Mag. VI. 41. S. 749. 1921; A. H. **Compton**, The Phys. Rev. 21. S. 483. 1923; A. H. **Compton**, The Phys. Rev. 22. S. 409. 1923.

2) P. **Debye**, Physik. Zeitschr. 1923. Nr. 8. S. 161.

3. *Die Abhängigkeit der thermoelektrischen Kraft des Eisens von seiner Struktur;*

von Wilhelm Heraeus.

(Frankfurter Dissertation.)

(Hierzu Tafel IV.)

1. Einleitung.

Für die Aufstellung einer zureichenden Theorie der elektrischen Leitfähigkeit der Metalle sind eingehende thermoelektrische Untersuchungen von besonderer Bedeutung. Obwohl ein Zusammenhang zwischen der Struktur der Metalle und dem thermoelektrischen Verhalten derselben allgemein angenommen wird, gibt es doch nur wenige experimentelle Untersuchungen, die eine Verknüpfung von Struktur und thermoelektrischer Kraft unzweifelhaft zeigen. Der Grund hierfür ist darin zu sehen, daß *reine* Metalle für thermoelektrische Untersuchungen in geeigneter Form außerordentlich schwer darzustellen sind. Diese sind aber unbedingt erforderlich, da schon geringe Verunreinigungen das thermoelektrische Verhalten der Metalle entscheidend beeinflussen. Aus diesem Grund wurde für die vorliegende Untersuchung vakuumgeschmolzenes Elektrolyteisen als Material gewählt, das mit besonderer Vorsicht kalt bearbeitet wurde, um Verunreinigungen durch das kohlenstoffhaltige Eisen der Walzen und das Material der Ziehsteine zu vermeiden. Die Untersuchung des thermoelektrischen Verhaltens von geglühtem gegen ungeglühtes Eisen ist auch insofern von ganz besonderem Interesse, als hierfür bereits Forschungen von **Borelius** und **Gunneson**[1]) vorliegen. Die Ergebnisse dieser Arbeiten haben zu Rückschlüssen auf die Strukturänderungen des Eisens im Temperaturgebiet von 60—500° C geführt, die mit den durch andere Untersuchungsmethoden gewonnenen Erkenntnissen in schroffem Widerspruch stehen.

---

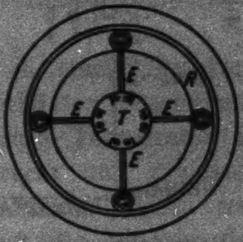
[1]) G. **Borelius** u. F. **Gunneson**, Ann. d. Phys. 67. S. 227. 1922; G. **Borelius**, Ann. d. Phys. 67. S. 236. 1922; 68. S. 67. 1922.

2. Versuche von Borelius und Gunneson.

a) Da im folgenden der Nachweis versucht wird, daß die Messungen von **Borelius** und **Gunneson** zu falschen Schlüssen geführt haben, und weil es ferner zur Auffindung der bei diesen Arbeiten vermuteten Versuchsfehler zweckdienlich erschien, wurden deren Experimente noch einmal durchgeführt. Es ist daher notwendig, auf die Arbeitsmethoden von **Borelius** und **Gunneson** näher einzugehen.

Die zu untersuchenden Elektrolyteisenproben wurden auf eine bestimmte Temperatur in einem elektrischen Ofen erhitzt, in Wasser abgeschreckt und gegen eine thermisch nicht vorbehandelte Eisenprobe gemessen. **Borelius** führt a. a. O. S. 228 weiter aus:

„Das Temperaturgefälle in den Eisenproben wird so erreicht, daß sie zwischen einem elektrisch geheizten kupfernen Tischchen und mehreren ringsum an einem kupfernen Zylinderring angebrachten und von ihm durch eine dünne Schicht isolierten Kupferzapfen befestigt werden."



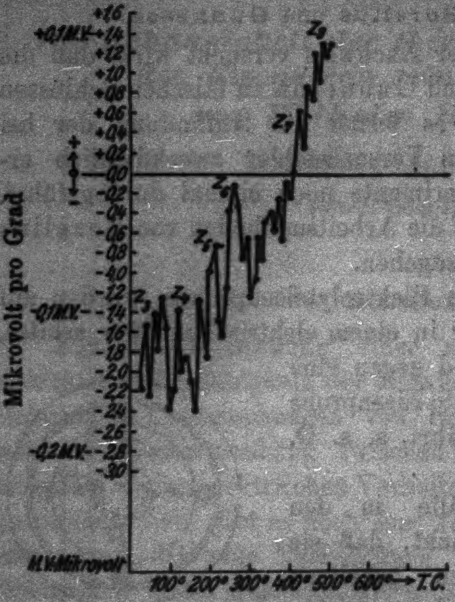
T = Tischchen
E = Eisenproben
R = Kupferring

Fig. 1.

Fig. 1 gibt das Bild der Anordnung schematisch wieder. Das Tischchen wurde 15° über Zimmertemperatur erwärmt. Das Galvanometer war direkt mit den Eisenproben verbunden. **Borelius** verwandte zu jeder Messung nur eine Eisenprobe, die vorher auf eine bestimmte Temperatur erhitzt worden war. Die Kurve [1]), vgl. Fig. 2, gibt die Meßergebnisse wieder, die er an Elektrolyteisen erhalten hat. Als Abszissen sind die Temperaturen aufgetragen, auf die die Proben jeweils erhitzt wurden, als Ordinaten die gemessene Thermokraft in Mikrovolt pro Grad. Die Kurve beginnt bei 30° mit ungefähr – 0,15 Mikrovolt und endet bei 500° mit ungefähr 0,8 Mikrovolt. Bei Temperaturen über 500° beobachteten **Borelius** und **Gunneson** nicht. Aus den mehr oder weniger hervortretenden Unstetigkeiten der Kurve schließen sie auf zahlreiche hypothetische Umwandlungspunkte des Eisens. Nach einer bestimmten Temperaturdifferenz soll eine Umwandlung in dem Eisen eintreten, die sich in der Veränderung der Thermokraft ausprägt. In dem Temperaturintervall von 30 bis 500° stellen sie bei reinem, vakuumgeschmlzenen Elektrolyteisen allein 6 Umwandlungen fest. Die Umwandlungsstellen sind in der Figur mit Z bezeichnet.

---

[1]) G. **Borelius** hat in seiner Arbeit die Kurven in Mikrovolt pro Grad angegeben. Dieser von **Borelius** benutzte Maßstab ist in den in dieser Arbeit benutzten Maßstab so überführt, daß der Zahl 1,4 in dieser Arbeit in der **Borelius**schen Arbeit dem Wert 0,1 Mikrovolt pro Grad entspricht.



Reproduktion der Kurve von **Borelius** und **Gunnesson**

Fig. 2.

Zusammenfassend sagt **Borelius**[1]), „daß man aus den Thermokräften in angelassenen und abgeschreckten Eisenproben schließen konnte, daß in den von uns untersuchten technischen Eisensorten eine Reihe von Umwandlungen vorhanden sind, die als Z-Umwandlungen bezeichnet wurden." „Es stellt sich heraus, daß in reinem Eisen die Z-Umwandlungen sehr regelmäßig verteilt sind, so daß die absolute Temperatur des Mittelpunktes des n-ten Umwandlungsgebietes (Z_n) angenähert aus $T = 97 \cdot n$ berechnet werden kann." (Wo n eine ganze Zahl bedeutet.)

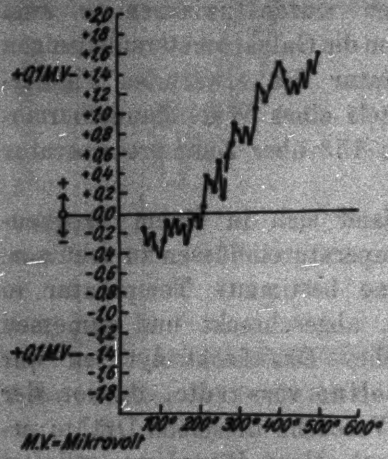
---

[1]) G. **Borelius**, Ann. d. Physik 67. S. 251. 1922.

b) Angesichts dieser Ergebnisse von Borelius und Gunneson, die, wenn richtig, für unsere Kenntnisse von der Struktur des Eisens von größter Bedeutung wären, war es unbedingt notwendig, den Versuchen von Borelius und Gunneson bis in alle Einzelheiten reproduktiv nachzugehen. Zu diesem Zweck wurde mit einer Versuchsanordnung gearbeitet, die im Prinzip der von Borelius und Gunneson benutzten Anordnung entspricht. Ein Kupferklötzchen wurde elektrisch erwärmt und an dieses die zwei Enden der Eisenproben durch ein Kupferplättchen geklemmt. Jedes der beiden anderen Enden der Eisenproben wurde zwischen je zwei Kupferplättchen befestigt, mit denen die Galvanometerzuleitungen verbunden waren. Die Temperatur des erwärmten Kupferklötzchens wurde gemessen mittels eines Widerstandsthermometers von Heraeus und genau 15° über Zimmertemperatur gehalten.

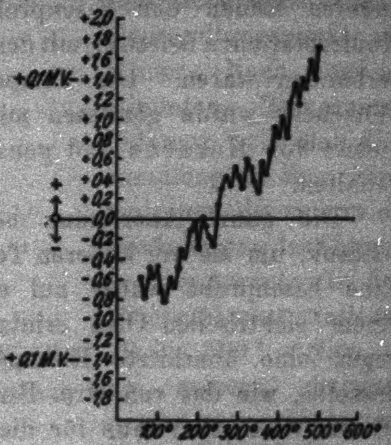
Die ganze Anordnung befand sich in einem Trockenschrank, um sie vor äußeren Temperatureinflüssen zu schützen. Eine Eisenprobe wurde auf eine bestimmte Temperatur in einem elektrischen Ofen erhitzt, abgeschreckt und gemessen gegen eine unerhitzte Eisenprobe. Das Elektrolyteisen war dasselbe, wie das von Hrn. Borelius verwandte, da von der Firma W. C. Heraeus für die Versuche dieselben Drähte erhalten werden konnten, die auch Hrn. Borelius geliefert worden sind. Es handelt sich um reinstes, im Vakuum geschmolzenes Elektrolyteisen. Die nächsten Versuche wurden gemacht mit derselben Anordnung, nur mit dem Unterschied, daß die Kupferkontakte ersetzt wurden durch Quecksilberkontakte. Da hierbei jedoch störende Amalgamierungseinflüsse auftraten, wurde das Eisen an den freien Enden mit einer dünnen Platinfolie überzogen.

c) Im folgenden gebe ich nun die mit diesen Anordnungen erhaltenen Meßergebnisse wieder. Die Kurven zeichnen sich ebenso wie die Boreliusschen durch ihren unsteten komplizierten Verlauf aus. Die Größenordnung der erhaltenen Werte ist dieselbe wie bei Borelius. Was jedoch vollkommen fehlt, ist die Reproduzierbarkeit jeder einzelnen Messung. Wurde ein und derselbe Draht mehrmals aus der Anordnung herausgenommen und wieder eingesetzt, so waren die Galvanometerausschläge untereinander völlig verschieden. Es stellte sich sogar heraus, daß das Galvanometer einen Ausschlag zeigte, wenn auch das Kupferklötzchen nicht erwärmt war. Die Ausschläge konnten also nicht von einer thermoelektrischen Kraft herrühren. Die Untersuchung ergab, daß es sich um Kontaktkräfte handelte, die zwischen Eisen und Kupfer auftreten. Die Kurve (vgl. Fig. 3) wurde so gewonnen, daß wie bei Borelius und Gunneson für jeden Temperaturpunkt nur ein Drahtstück verwandt wurde. Die Proben wurden 15 Minuten wie bei Borelius und Gunneson in einem elektrischen Ofen erhitzt, abgeschreckt und gemessen. In ihrem allgemeinen Verlauf stimmt diese Kurve mit der von Borelius und Gunneson erhaltenen Kurve überein. Infolge der vorhin angegebenen großen Abweichungen bei mehrmaligem Einsetzen in die Anordnung desselben vorbehandelten Drahtes konnten die Kurven nur dadurch gewonnen werden, daß stark abweichende Werte für einen und denselben Temperaturpunkt nicht berücksichtigt wurden. Als Abszissen sind wiederum die Erhitzungstemperaturen aufgetragen, als Ordinaten die dazugehörigen Messungen der Thermokraft in Mikrovolt pro Grad. Der für die folgenden Messungen benutzte Maßstab ist auch hier zugrunde gelegt. Eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Verlauf der Boreliusschen Kurve ist unverkennbar. Die Kurven



Kupferkontakte

Fig. 3.



Quecksilberkontakte

Fig. 4.

(Fig. 3 und 4) beginnen beide bei 60° mit ungefähr 0,01 Mikrovolt und enden bei 500° mit ungefähr 0,1 Mikrovolt. Die Werte für 60° stimmen mit den Werten von Borelius nicht überein; wohl beginnen beide Kurven mit negativen Vorzeichen wie bei Borelius; die Thermokraft dreht ihren Richtungssinn in dem mittleren Teil des Temperaturintervalls von 60—500° um und erreicht bei 500° den ungefähren Wert 0,1 Mikrovolt. (0,8 Mikrovolt bei Borelius.)

Zur Beseitigung der Versuchsfehler, die bei dem Klemmen der Eisenproben entstehen, wurde der Versuch gemacht, dieselben Messungen mit Quecksilberkontakten durchzuführen. Die Ergebnisse, die mit dieser Anordnung erhalten wurden, waren noch schlechter und unübersichtlicher. Dies beruhte darauf, daß es in diesem Fall unmöglich war, gleichmäßige Ausschläge zu erzielen. Wurden die zu untersuchenden Eisenproben durch Quecksilberkontakte zu einem Kreis mit dem Galvanometer kurz geschlossen, so schlug ohne Erzeugung einer Temperaturdifferenz das Galvanometer 2—3 Skalenteile aus und kehrte nicht wieder zur Ruhelage zurück, sondern schwankte dauernd 1—2 Skalenteile hin und her, was Messungsfehler von 0,1—0,2 Mikrovolt bedingte. Dies machte die Verwendung von Quecksilberkontakten unmöglich. Die Versuche mit platinüberzogenen Eisenproben gelangen etwas besser, insbesondere waren die Ausschläge gleichmäßiger.

3. Kritik und Abänderung der Untersuchungsmethode von Borelius.

Mit den vorhin beschriebenen Anordnungen konnten also einwandfreie Messungen nicht durchgeführt werden. Hr. Borelius hatte in einer besonderen Arbeit[1]) festgelegt, daß die Thermokraft beeinflußt wird durch mechanische Beanspruchung der Metallproben (in unserem Falle Festklemmen zwischen zwei Kupferplättchen). Mangelnde Reproduzierbarkeit bilden auch bei diesen Untersuchungen einen großen Übelstand. Bei den Untersuchungen von Borelius und Gunneson, in denen der Einfluß der thermischen Vorbehandlung auf die Thermokraft untersucht wird, sind diese früheren Beobachtungen

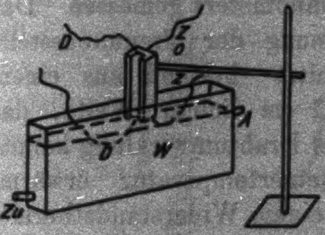
---

1) G. Borelius, Ann. d. Phys. 60. S. 381. 1919.

(Abhängigkeit der Thermokraft von der mechanischen Beanspruchung) offenbar unbeachtet geblieben. Wie schon gesagt, war es unmöglich, mit einer Anordnung, die im Prinzip genau der Boreliusschen entsprach, die Thermokraft so zu messen, daß die Werte reproduzierbar waren. Wie weit etwa die Herren Borelius und Gunneson reproduzierbare Werte erhalten haben, ist leider nicht in den zitierten Arbeiten erwähnt. Bei dem Klemmen werden die Proben verschieden mechanisch beansprucht, und es ist deshalb unmöglich, bei einem Neueinsetzen derselben Eisenprobe die Thermokraft zu messen, unabhängig von der verschiedenen mechanischen Beanspruchung. — Unerwähnt bleibt ferner in der Boreliusschen Arbeit die zwischen Kupfer und Eisen auftretende Kontaktkraft und deren Einfluß auf die Messung. — Von nicht zu unterschätzender Bedeutung sind bei diesen Untersuchungen auch die Temperaturverhältnisse. Man muß eine thermoelektrische Untersuchung als nicht einwandfrei bezeichnen, wenn die Temperaturen der zwei Kontaktstellen als konstant angenommen werden, wie bei Borelius, ohne daß sie während der Untersuchung gemessen werden. Wie die neuen Untersuchungen ergaben, fiel die Thermokraft bei einer Temperaturschwankung von 1° um 0,05—0,15 Mikrovolt. Diese Temperaturschwankungen können also Meßfehler bedingen, die ganz in die Größenordnung der von Borelius und Gunneson beobachteten Schwankungen der Thermokraft fallen. Borelius und Gunneson erwähnen in ihrer Arbeit nicht, wie die Drähte nach der Beheizung, nachdem sich eine Oxydschicht gebildet hat, behandelt worden sind, ob die Messungen mit oder ohne Oxydschicht ausgeführt worden sind. Jedenfalls bilden die Oxyde bei der Klemmanordnung eine Fehlerquelle der Messung der Thermokraft „Eisen erhitzt“ gegen „Eisen unerhitzt“. Wird die Oxydschicht abgeätzt, so werden die Metallproben chemisch beeinflußt, und dies kann wiederum einen Einfluß auf die Thermokraft ausüben.

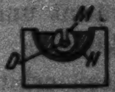
Auf diesem Wege konnte man also unmöglich zu dem Ziele kommen, eine einwandfreie Feststellung des Einflusses der thermischen Vorbehandlung auf die Thermokraft zu machen. Am günstigsten erschien für die weitere Untersuchung folgende Anordnung:

Es wurden Drähte aus Elektrolyteisen verwendet. Die Drähte waren aus Eisenbarren gezogen und während der Anfertigungsstufen mehrfach geglüht. Nach den letzten Drahtzügen erfolgte keine Glühung mehr. Nähere Angaben über den Einfluß der Vorgeschichte liegen bisher noch nicht vor. — Der mittlere Teil eines solchen $^3/_4$ m langen, 1 mm starken Elektrolyteisendrahtes wurde in einem elektrischen Ofen erhitzt. Der Ofen war 20 cm lang und nach einer Seite offen. Die Temperatur konnte gut von 10 zu 10° mit einem Stromverbrauchsregler von Heraeus geregelt werden. Der Heizkörper hatte die Gestalt einer langgestreckten Schale (vgl. Fig. 6).



D = Draht
Z = Zuleitung zum Ofen
O = Ofen
W = Wasserbad
Zu = Zufluß des Wassers
A = Abfluß

Fig. 5.



M = Messingrohr
D = Draht
H = Heizkörper

Fig. 6.

In den Heizkörper wurde ein Messingrohr gelegt von 2 mm lichter Weite, das einen Schlitz hatte, so daß die Eisenproben bequem hereingebracht werden konnten. Nachdem der Draht in das Messingrohr eingeführt war, wurde der Schlitz durch eine Asbestrolle geschlossen. Nach der Beheizung wurde der erhitzte Teil des Drahtes in Wasser von Zimmertemperatur abgeschreckt. Der Ofen stand senkrecht und ragte mit seiner unteren Öffnung bis an die Wasserfläche eines Behälters. Das Wasser dieses Behälters wurde konstant auf Zimmertemperatur gehalten. Wurde also der mittlere Teil des $^3/_4$ m langen Drahtes erhitzt, so ragte das eine freie Ende des Drahtes in das Wasserbad. Damit ließ es sich erreichen, daß nur ein Teil des Drahtes erhitzt wurde, während der andere Teil thermisch nicht beansprucht war, und eine scharfe Grenze zwischen beiden Zuständen auftrat. (Vgl. Fig. 5).

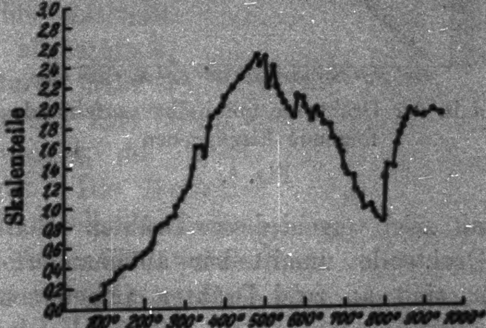
Die Trennungsstelle war auf dem Draht selbst leicht markiert. Der erhitzte Teil des Drahtes wurde so abgeschreckt, daß er rasch in das darunter stehende Wasserbecken gezogen wurde. Mit diesem so vorbehandeltem Drahte wurden die beiden Polklemmen eines Spiegelgalvanometers kurz geschlossen. Die dabei auftretenden Kontaktkräfte zwischen Eisen und Messing wurden so eliminiert, daß der konstante Ausschlag der Thermokraft als Nullpunkt angenommen wurde. Zur sicheren Messung der Thermokraft wurden dann die Ausschläge nach rechts und links durch Vertauschen der Pole gemessen. Es ergab sich, daß die nach diesem Verfahren nach beiden Seiten gemessenen Werte der Thermokraft immer übereinstimmten. Dann wurde mittels eines zweiten für diese Zwecke konstruierten elektrischen Öfchens die Trennungsstelle „Eisen erhitzt“ und „Eisen unerhitzt“ 15° über Zimmertemperatur erwärmt und der Ausschlag des Galvanometers gemessen. Das elektrische Öfchen für die Erwärmung der Trennungsstelle „Eisen erhitzt“ gegen „Eisen unerhitzt“ bestand aus einem 10 cm langen Quarzröhrchen von 1 cm lichter Weite, das ebenfalls einen Schlitz hatte. Mittels Drahtumwicklung konnte das Quarzröhrchen 15° über Zimmertemperatur erwärmt werden. Die Temperatur wurde mit einem Widerstandsthermometer gemessen. Die Trennungsstelle „Eisen erhitzt“ gegen „Eisen unerhitzt“ konnte genau in die Mitte des Öfchens gelegt werden, so daß je 5 cm des thermisch vorbehandelten Drahtes und des thermisch unbeanspruchten Drahtes erwärmt wurden. Die Messungen in dieser Anordnung waren befriedigend, und wie es sich nachfolgend herausstellen wird, zur Lösung vorliegenden Problems völlig ausreichend.

4. Meßergebnisse.

Im folgenden werden nun die mit dieser Anordnung erhaltenen Meßergebnisse wiedergegeben und besprochen. Als Abszissen sind wie vorher die Erhitzungstemperaturen aufgetragen, als Ordinaten die dazugehörigen Thermokräfte in Mikrovolt.[1]) Fig. 7 gibt eine Meßreihe wieder, bei der nur ein einziger Draht für die Messung in dem Temperaturbereich von 70—950° verwandt wurde; mit anderen Worten, der mittlere Teil des Drahtes wurde zunächst auf 70° erhitzt, abgeschreckt, gemessen, sodann derselbe Teil desselben Drahtes auf 80° erhitzt, abgeschreckt, gemessen u. s. w. Die Kurve beginnt bei 70° mit 0,11 Mikrovolt und steigt dauernd an bis 490°. Bei dieser Temperatur erreicht die Thermokraft ihren höchsten Wert 2,75 Mikrovolt. Bis 250° steigt sie zunächst langsam an und von 250—490° etwas schneller. Von 490—790° fällt die Thermokraft ziemlich gleichmäßig. Bei 790° hat sie einen tiefsten Wert von 0,99 Mikrovolt. In dem Temperaturbereich von 490—640° macht die Kurve einige Schwankungen, die größte Schwankung hat den Wert von ± 0,2 Mikrovolt. Von 790° an steigt die Kurve wieder gleichmäßig an bis 880°, wo sie den Wert von 2 Mikrovolt erreicht. Von diesem Punkt bleibt sie konstant bis 950°, dem Temperaturpunkt, der die Grenze der mit dieser Anordnung möglichen Messungen bietet. Von dieser Temperatur an wird der Draht sehr rasch dünner und die Verringerung seines Querschnittes bedingt große Meßfehler. Daß diese Messungen auch so hätten ausgeführt werden können, daß für jeden Temperaturpunkt ein neuer Draht verwandt worden wäre, ergab die Tatsache, daß ein neuer Draht sofort mit Überspringen aller vorhergehenden Temperaturen bei einer bestimmten Temperatur 15 Minuten erhitzt werden konnte und daß die bei dem so vorbehandelten Draht gemessene Thermokraft den Wert hatte, den die Kurve (Fig. 7) bei dieser Temperatur anzeigt. Ob man also *einen* Draht für die ganzen Messungen verwendet oder *verschiedene* Drähte, ist für diese Messungen gleichgültig. Grundbedingung für diese

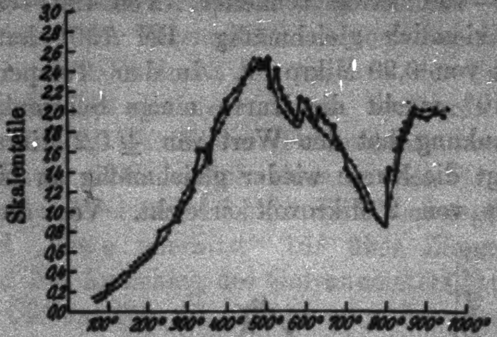
---

[1]) 1 Skalenteil (0,1) = 0,11 Mikrovolt. Die Messungen beziehen sich auf 15° Temperaturdifferenz.



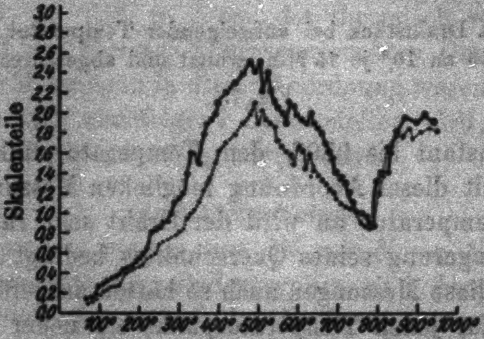
Ein Drahtstück bei aufsteigender Temperatur
von 10 zu 10° je 15 Min. erhitzt und abgeschreckt
Fig. 7.

Erscheinung ist, daß die Drähte an demselben Ende der Eisendrahtrolle aufeinanderfolgend abgeschnitten wurden und nicht Drähte verwandt wurden, einmal von dem einen Ende und einmal von dem anderen Ende der Drahtrolle. Die Kurven (Fig. 8) sind mit zwei verschiedenen Drähten erhalten worden, die in der Drahtrolle unmittelbar aufeinanderfolgten. Die Kurven (Fig. 9) sind an zwei Drähten aufgenommen, die an verschiedenen Enden der 50 m langen Drahtrolle abgeschnitten worden waren. Der charakteristische Verlauf bei beiden Kurven ist derselbe, jedoch unterscheiden sich die Thermokräfte bei einer bestimmten Temperatur um mehr oder weniger große Beträge.



Zwei in der Drahtrolle unmitelbar aufeinanderfolgende Eisenproben

Fig. 8.



Messungen an zwei Eisenproben, die in der Drahtrolle weit voneinander entfernt liegen

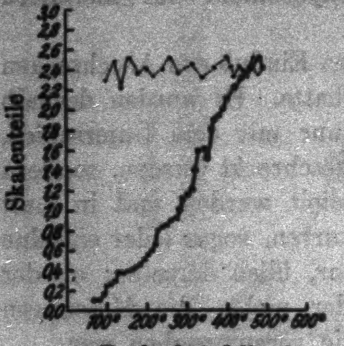
Fig. 9.

Um nun zu entscheiden, welchen Einfluß die Oxydschichten des erhitzten Teiles des Drahtes auf die Messung ausübten, wurden die Oxyde mit Salzsäure abgeätzt. Der Wert der Thermokraft war mit und ohne Oxydschicht des thermisch vorbehandelten Drahtes derselbe.

Zu entscheiden war noch, welchen Einfluß das Abschrecken auf den Verlauf der Thermokurven hatte. Es wurden deshalb dieselben Messungen durchgeführt, nur mit dem Unterschied, daß die Drähte nicht im Wasser abgeschreckt wurden, sondern nach 15 Minuten aus dem Ofen geholt wurden und in Luft abkühlten. Der Verlauf der Thermokurven, sogar jeder einzelne Wert für eine bestimmte Temperatur, blieb derselbe; ob der Draht also abgeschreckt wurde oder nicht, die Messungen wurden dadurch nicht beeinflußt, wie vorauszusehen war.

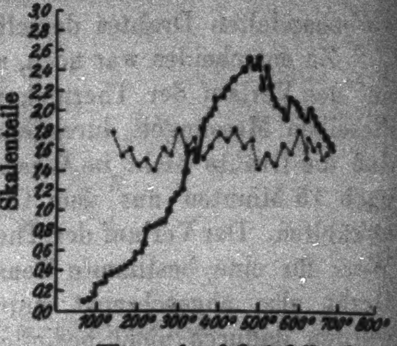
Die Kurven sind völlig reproduzierbar, wenn man die Drähte verwendet, die in der Drahtrolle unmittelbar aufeinanderfolgen. Die Meßfehler blieben in der Grenze von 0,01—0,1 Mikrovolt. — Die Schwankungen in dem Temperaturbereich von 500—650° waren nicht reproduzierbar. Da die Werte dieser Schwankungen innerhalb der Beobachtungsfehler liegen (0,1—0,2 Mikrovolt), ist es nicht statthaft, aus diesen Schwankungen auf Strukturänderungen in dem untersuchten Eisendraht zu schließen. Es ist außerdem zu berücksichtigen, daß die Verschiedenheiten in der Bearbeitungsgeschichte jedes einzelnen Drahtstückes innerhalb enger Grenzen einen verschiedenen Verlauf der Rekristallisation (vgl. weiter unten) bedingen. Eine sichere Entscheidung über die Bedeutung der Schwankungen ist daher unmöglich.

Wurde ein Draht 15 Min. bei einer beliebigen Temperatur erhitzt, und ging man so vor, daß man nach Messung der Thermokraft für diese Temperatur den vorher beheizten Teil des Drahtes eine Temperaturstufe niedriger erwärmte, abschreckte und dann die Thermokraft maß usw., also den Draht nicht bei steigender Beheizung, sondern bei fallender Beheizung untersuchte, so ergab die Messung, daß die Thermokraft konstant blieb und den bei der höchsten Beheizungstemperatur erreichten Wert behielt. Fig. 10 und 11 zeigen das Bild der Messungen. — Zum Schluß wurde noch der Versuch gemacht, den Verlauf der Thermokraft bei längerer Beheizungsdauer festzustellen. Es wurde deshalb der Draht nicht 15 Minuten bei einer bestimmten Temperatur erhitzt, sondern 4 Stunden. Es wurde der Verlauf der Kurve durch Messung der Thermokraft bei bestimmten Temperaturen festgelegt (Fig. 12). Die Thermokraft steigt an bis 490°. Bei 490° erreicht sie den Wert von 1,9 Mikrovolt. Von 490—700° bleibt sie fast konstant, über 700° steigt sie zuerst etwas stärker, macht nur bei 790° einen kleinen Knick, und steigt von hier ab wieder gleichmäßig weiter bis 850°. Von 850° an bleibt die Thermokraft fast konstant. Die Werte über 650° liegen bei dieser Kurve bedeutend höher, als die Werte über 650° bei den Kurven in



.... Draht bei fallender Beheizungstemperatur

Fig. 10.



.... Thermokraft bei fallender Beheizungstemperatur

Fig. 11.

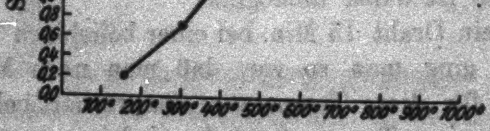


Fig. 12.

Fig. 8. Der höchste Wert, den die Thermokraft bei diesen Messungen erreicht, liegt bei 950°, und zwar hat hier die Thermokraft den Wert von 2,7 Mikrovolt. Ob bei allen diesen Messungen nur ein einziger Draht verwandt wurde oder zu jeder Messung jeder Draht nur einmal, blieb bei den vorhin angeführten Vorbedingungen gleichgültig. Fig. 13 gibt das Bild zweier Meßreihen wieder. Kurve 1 wurde erhalten bei der Messung an einem einzigen Draht, Kurve 2 bei verschiedenen Drähten. Zur weiteren Klärung der thermoelektrischen Erscheinung wurde nicht nur der mittlere Teil des zu untersuchenden Drahtes erhitzt, sondern der ganze Draht, und zwar wurde er zwei Stunden bei 550° beheizt. Dieser so vorbehandelte Draht wurde nun, wie die vorhergehenden Drähte, der Untersuchung unterworfen. Der mittlere Teil dieses Drahtes wurde zunächst 15 Minuten auf 500° erhitzt, abgeschreckt und gemessen. Sodann wurde derselbe Teil auf 510° erhitzt, abgeschreckt usw. Fig. 14 gibt die Meßergebnisse dieser Untersuchungen wieder. Von 500—590° steigt die Thermokraft von 0,22 Mikrovolt an bis 0,50 Mikrovolt, fällt dann bis 650°, dreht hier ihren Richtungssinn um und beginnt von 650—800° mit umgekehrten Vorzeichen zu steigen. Bei 800° erreicht sie den Wert von −1,5 Mikrovolt und von 800° ab beginnt sie wieder zu fallen.

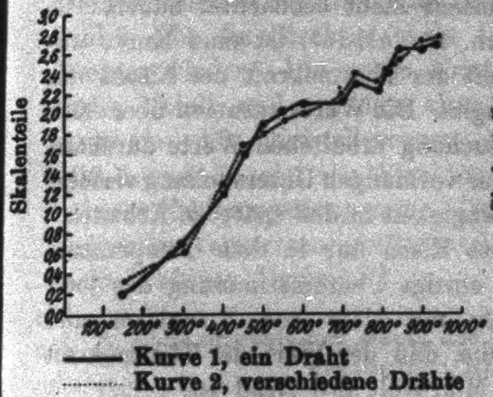
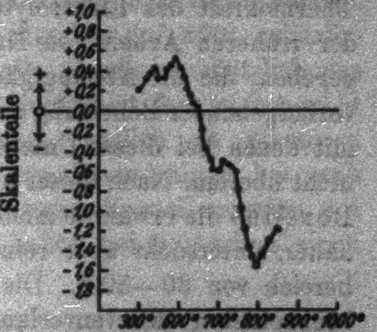


Fig. 13.



Der ganze Meßdraht bei 550° C ausgeglüht

Fig. 14.

Vergleicht man die nach dieser Methode erhaltenen Kurven (Fig. 7 und 8), mit der von **Borelius** und **Gunneson** erhaltenen und in Fig. 2 reproduzierten Elektrolyteisenkurve, so ergibt sich, daß

1. die neue Kurve nicht wie die von Borelius und Gunneson unterhalb der 0-Linie beginnt,
2. die Knicke, die Borelius und Gunneson beobachtet haben, nicht auftreten.

Es sind zwar auch in den neu erhaltenen Kurven einige Knicke vorhanden, sie liegen aber erst oberhalb 500°, also bei einer Temperatur, bei der Borelius und Gunneson die Thermokraft des Elektrolyteisens nicht beobachtet haben. In der früheren Arbeit von Hrn. Borelius[1]) ist eine Kurve angegeben, die die Abhängigkeit der Thermokraft des Eisens von vorhergehender Beheizung angibt. Die Werte stimmen über 500° mit denen bei dieser Untersuchung erhaltenen Werte durchaus nicht überein. Nach dieser nur vorläufigen Untersuchung verfolgt Borelius die erwähnte Abhängigkeit in den späteren Arbeiten[2]) näher, untersucht aber reines Eisen nur in dem Temperaturbereich von 30—500°. Die einzige Übereinstimmung des jetzt beobachteten Kurvenverlaufs mit dem von Borelius und Gunneson ermittelten ist die, daß der Wert der Thermokraft bei 500° ungefähr gleich 1 Mikrovolt pro Grad ist.

5. Mikrophotographische Strukturaufnahmen.

Da die Erscheinungen, die Borelius zur Annahme einer Reihe von neuen polymorphen Modifikationen des Eisens geführt hatten, sich nicht bestätigen ließen, andererseits die Form der Kurve in großen Zügen auch von mir wiedergefunden und schließlich festgestellt wurde, daß beim Zurückgehen mit der Temperatur die Kurve nicht umgekehrt durchlaufen wird, vielmehr die Werte ungefähr konstant bleiben, so lag es nahe, an den ausschließlichen Einfluß von Rekristallisationserscheinungen zu denken. Wie oben gesagt, war der Eisendraht nicht frei von Kaltbearbeitungseffekten. Es wurden deshalb zunächst einige mikrophotographische Strukturaufnahmen an den untersuchten Drähten gemacht. Sie zeigen deutlich den Verlauf der Rekristallisation in dem untersuchten Temperaturbereich.

---

1) G. Borelius, Ann. d. Phys. 60. S. 396. 1919.

2) G. Borelius, a. a. O.

Bild 1 (Taf. IV) zeigt die Eisenprobe nach der kalten Bearbeitung. Es ist das typische Bild kalt verarbeiteter geschreckter Metalle. Die Begrenzungslinien der Kristallite sind unscharf und man sieht eine Hauptdeformation der Kristalle in der Richtung des Ziehens. Aus dieser verworrenen Struktur muß sich nun bei der Erhitzung das Kristallisationsgefüge entwickeln. Bild 2 zeigt die Struktur eines Eisendrahtes, der 4 Stunden auf 500° erhitzt worden war. Die Ätzeindrücke sind schon viel besser ausgebildet, und es werden schon kleine Kriställchen sichtbar. Die Deformation der alten Kristalle ist noch nicht verschwunden. Bild 3 gibt die Struktur eines 4 Stunden auf 600° erhitzten Drahtes wieder. Die neuen Kristalle überfluten plötzlich das ganze Metall, und von dem alten Gefüge ist fast nichts mehr sichtbar. Die Kristallgrenzen sind deutlich zu erkennen. Bild 4 und 5 zeigt die Struktur von Eisendrähten bei noch höherer Erhitzungstemperatur. Die neuen Kristalle werden mit steigender Temperatur größer und haben bei 900° schon einen recht kräftigen Umfang.

6. Abhängigkeit der Härte des Materials von der vorangegangenen Erhitzung.

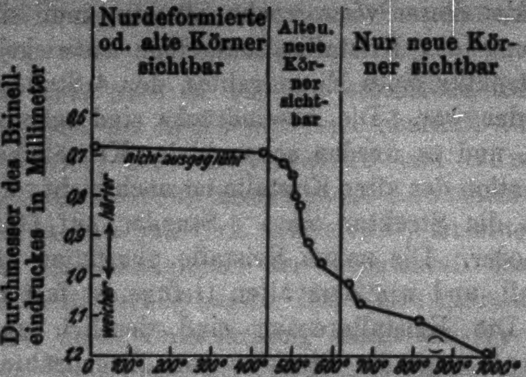
In dem nächsten Abschnitt soll gezeigt werden, daß der Verlauf der erhaltenen Thermokurven in engstem Zusammenhang mit dem Verlauf der Rekristallisation stehen muß. Sehr willkommen war bei diesen Überlegungen eine Arbeit von **Masing**[1]), die zur selben Zeit in der Zeitschrift „Die Naturwissenschaften“ veröffentlicht wurde, in der u. a. auch die Abhängigkeit der Härte von dem Verlauf der Rekristallisation erwähnt wird. Die Fig. 15, die die Abhängigkeit der Härte von vorangegangener Erhitzung darstellt, stammt von **Adcock**. Aus der Arbeit von G. **Masing** entnehmen wir, a. a. O., folgendes:

„Die Härte beginnt nach einer Erhitzung etwa auf die Temperatur, bei der die Wahrnehmung der kleinen Kristalle möglich wird, zu sinken und fällt dann innerhalb von etwa 200° schnell ab, um nach einer weiteren Erhitzung nur noch verhältnismäßig langsam zu sinken. Die Änderung der Härte geht also mit der Rekristallisation parallel.“

---

1) G. **Masing**, Naturwissenschaften 11. S. 412. 1923.

Es soll dies nur eine beiläufige Bemerkung sein, um darauf hinzuweisen, daß die Eigenschaften der Metalle durch die Rekristallisationserscheinung wesentlich beeinflußt werden.



Abhängigkeit der Härte des Materials von der vorangegangenen Erhitzung

Fig. 15.

7. Vergleich des Verlaufs der Thermokurven mit dem Verlauf der Rekristallisation.

Bei Verfolgung des Verlaufs der Kurve der Thermokraft eines Elektrolyteisendrahtes, der um je 10° aufsteigend 15 Minuten erhitzt und dann abgeschreckt wird, fällt zunächst auf, daß bei 500° die Kurve einen scharfen Knick hat und daß die Thermokraft von 2,5 Mikrovolt bei 790° abfällt. Es ist wohl völlig ausgeschlossen, daß dies mit einer Umwandlung des Eisens in eine andere Modifikation zusammenhängen kann. Wohl aber kann ein Zusammenhang zwischen der einsetzenden Rekristallisation und der sinkenden Thermokraft bestehen. Das Elektrolyteisen, aus dem die zu messenden Drähte gezogen sind, wird während seiner Verarbeitung viermal auf über 700° geglüht. Die Korngröße des Eisens nach dem Abgießen im Vakuumofen ist verhältnismäßig groß und wird während der scharfen, kalten Verarbeitung mit den eingeschalteten Glühungen dauernd abnehmen. Der Draht zeigt also nach Beendigung der Bearbeitung in seiner Struktur das typische Bild aller kalt gezogenen Drähte, in denen deformierte Kristalle oder überhaupt kristallinische Anteile schwer zu erkennen sind. Nun setzt bei Eisen, wie Jeffries und Archer[1]) angeben, die Rekristallisation sehr reinen Eisens etwa bei 450° ein. Dies ist jedoch die niedrigste Temperatur, bei der eine Rekristallisation dann einsetzen kann, wenn alle Vorbedingungen der Rekristallisation so günstig als irgend möglich für das frühzeitige Auftreten derselben gegeben sind. Es bleibt für den Verlauf unserer Kurve zwischen 500 und 790° keine andere Deutung übrig, als sie mit dem Vorgang im Eisen in Verbindung zu bringen, der darin besteht, daß sich aus dem Gefüge der durch die kalte Bearbeitung deformierten Kristalle neue kleine Kristalle bilden, die sich mit wachsender Beheizungstemperatur vermehren und vergrößern, wobei im Gefüge eine Anzahl kleiner Kristalle verschwinden, deren Platz dann von einem großen Kristall eingenommen wird (Fig. 16).

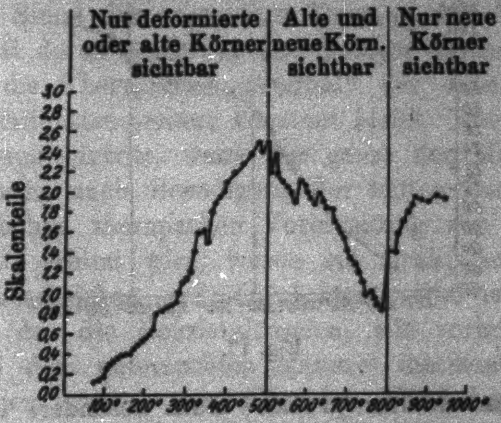


Fig. 16.

In dem vorliegenden Falle muß also das Fallen der Thermokraft bei 15-minütlicher Erhitzungsdauer dahin gedeutet werden, daß die Rekristallisation von Beobachtungspunkt zu Beobachtungspunkt langsam fortschreitet und die Thermokraft herabdrückt.

Liegt jedoch zwischen den einzelnen Beobachtungspunkten eine größere Zeit der Beheizung, in unserem Fall 4 Stunden,

---

1) Z. Jeffries and R. S. Archer, Chemical and Metallurgical Engineering, 22. Februar 1922; 1. März 1922.

so ist die Rekristallisation (Fig. 17) von einem Punkt zum anderen bedeutend weiter vorgeschritten, als im ersten Fall und das Gefüge des beobachteten Drahtes hat sich bei längerer Beheizung schon viel mehr dem Zustand genähert, in dem aus dem ursprünglichen Gefüge des Drahtstückes ein neues kristallinisches Gefüge hervorgegangen ist. Es ist auch durchaus verständlich, das sowohl bei kurzer, wie bei langer Beheizung nur die Beobachtungen an zwei unmittelbar aufeinanderfolgenden Drahtstücken vergleichbar sind; denn bei dem Vorgang des Drahtziehens werden die zu ziehenden Drähte keineswegs in ihrer ganzen Länge durch die Ziehsteine in gleicher Weise mechanisch beansprucht. Ganz besonders ist bei dem Walzen des Barrens die Einwirkung der Walzen auf das kristallinische Gefüge am Anfang des Barrens ganz anders, als am Ende. Liegen zwei Drahtstücke dicht aneinander, so werden die Eingriffe in das kristallinische Gefüge derselben durch Walzen und Ziehsteine den gleichen Charakter haben, während der gleiche Bearbeitungsvorgang bei zwei weit voneinander entfernten Drahtstücken unter kristallographisch sehr verschiedenen Bedingungen verlaufen sein kann.

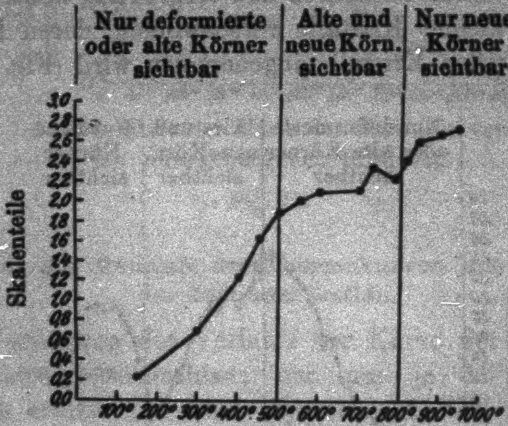


Fig. 17.

Aus den Beobachtungen geht also hervor, daß die Erscheinung der Rekristallisation sich charakteristisch in dem thermoelektrischen Verhalten des Elektrolyteisens ausprägt, und zwar kommen alle Einzelheiten, in denen sich die mechanische und thermische Vorgeschichte zweier Drähte gleichen Materials unterscheidet, in der Thermokurve deutlich zum Ausdruck.

Um zu erweisen, daß diese Deutung tatsächlich alle experimentell möglichen Erscheinungen umfaßt, wurde je ein Drahtstück, auf eine bestimmte Temperatur zwischen 60 und 800° erhitzt und dann von diesem Punkt aus rückwärts in derselben Weise beobachtet, wie vorher aufwärts bei den Kurven, die für jeden Temperaturpunkt 15 Minuten erhitzt wurden. Es ergab sich, daß die Kurve rückwärts parallel zur Abszisse verläuft (Fig. 10 und 11), d. h., daß der Wert der Thermokraft nicht wieder sinkt. Das einmal gewonnene Stadium der Rekristallisation wird, wie ja bekannt ist, durch Erhitzen auf niedrigere Temperaturen, als die einmal erreichte Rekristallisationstemperatur, nicht mehr beeinflußt. Daher ist es also gerade im Sinne der versuchten Deutung der Änderung der Thermokraft durch Änderung des Gefüges durchaus verständlich, daß die Thermokraft unterhalb der einmal erreichten Rekristallisationstemperatur konstant bleibt. Um nun zu entscheiden, was eintritt, wenn der ganze der Messung unterworfene Draht nach Beendigung der kalten Bearbeitung vor der eigentlichen thermischen Vorbereitung zur Messung der Thermokraft erhitzt wird, wurde ein Drahtstück 2 Stunden, wie oben beschrieben, auf 550° erhitzt. Dies ist die Temperatur, bei der die Rekristallisation, wie vorher festgestellt wurde, bei dem untersuchten Material thermoelektrisch und optisch schon deutlich feststellbar ist. Wird daher nach dem beschriebenen Versuchsverfahren dieser im ganzen auf 550° vorgeglühte Draht von 500° an thermoelektrisch beobachtet, so läßt die angegebene Deutung des thermoelektrischen Effektes erwarten, daß nunmehr die Thermokraft nach kurzem Verweilen auf gleicher Höhe abfällt und schließlich ihre Richtung umkehrt, während der Abstand zwischen dem höchsten und dem niedrigsten Wert innerhalb des gleichen Temperaturintervalls derselbe bleiben muß. Dies trifft auch angenähert zu; denn die Kurve (vgl. Fig. 14) bleibt innerhalb der Beobachtungsfehler zuerst nahezu konstant und fällt dann zwischen 600 und 800° ab, unter Änderung des Richtungssinnes.

Nachdem so gezeigt worden ist, daß die Deutung des

Kurvenverlaufes zwischen 500 und 790° unter Annahme eines Zusammenhanges zwischen Thermokraft und Rekristallisation zu einem befriedigenden Ergebnis führt, muß nunmehr auch berücksichtigt werden, daß bei etwa 770° *α*-Eisen in *β*-Eisen und etwa 900° *β*-Eisen in *γ*-Eisen übergeht. Es erscheint möglich, daß die Thermokraft, die von 500—790° fällt und dann wieder bis 870° steigt, von diesen Umwandlungen beeinflußt wird. Doch ist diese Frage nicht klar zu entscheiden, da aus dem gewonnenen Kurvenverlauf allein eine sichere Erkenntnis dieser Vorgänge nicht möglich ist. Es muß in diesem Zusammenhang besonders darauf hingewiesen werden, daß gegen die Annahme einer Beeinflussung der Kurve durch die Umwandlung des *α*-Eisens in *β*-Eisen und des *β*-Eisens in *γ*-Eisen die Tatsache spricht, daß die Kurve eine jungfräuliche, d. h. bei derselben Drahtprobe nicht zweimal zu beobachtende ist, da der Vorgang der Rekristallisation ein irreversibler ist und nur Niederschmelzen und erneut kalte Bearbeitung die Vorbedingungen für nochmalige Rekristallisation sind. Für die Beeinflussung des Kurvenverlaufes durch die Umwandlungen spricht allein die Tatsache, daß die Thermokraft von 790° an steigt und nach 870° innerhalb der Beobachtungsfehler bis zu der beobachteten Temperatur von 950° konstant bleibt. Ergeben also die vorliegenden Beobachtungen nicht eine sichere Entscheidung über die Möglichkeit einer Beeinflussung des Verlaufs der Thermokurve durch Rekristallisation und Umwandlungen gleichzeitig oder durch die Rekristallisation allein, so ist auch nicht mit Sicherheit zu sagen, ob jenseits von 950° die Thermokurve konstant bleibt. Es muß weiter erwähnt werden, daß die Temperaturkurve der Ausdehnung des gleichen Elektrolyteisens bis etwa 900° nahezu geradlinig ansteigt, ohne bei 500° eine Abweichung zu zeigen, und daß sie bei etwa 910—920° eine Umkehr erleidet, an einer Stelle also, wo die thermoelektrische Kraft konstant ist.[1])

Die Untersuchungen sollen fortgesetzt werden.

---

[1]) *Nachtrag:* G. H. **Burgess** u. H. **Scott** (Bull. Bur. of Standards 14. S. 15. 1918) finden bei 768° (Umwandlung von *α*- in *β*-Eisen) einen deutlichen Knick, bei 900° (*β*/*γ*-Eisen) eine schroffe Richtungsänderung der thermoelektrischen Kraft.

C. **Benedicks** (Compt. rend. 162. S. 297. 1916) fand bei 768° keine

8. Zusammenfassung.

Die vorliegenden Untersuchungen ergeben also:

1. daß die von **Borelius** und **Gunneson** bei der Untersuchung der Thermokurve von ungeglühtem reinen Eisen gegen geglühtes reines Eisen angewandten experimentellen Methoden zu falschen Ergebnissen führen müssen, weil darin

a) Kontaktkräfte auftreten,

b) die zu untersuchenden Drähte bei der Messung mechanisch beansprucht werden,

c) die Oxydbildung nicht berücksichtigt wird.

Die Kurve von **Borelius** und **Gunneson** wird mit ihrer Anordnung reproduziert, und es wird weiter nach Ausschaltung der Anordnungsfehler die reine Thermokurve gewonnen.

2. Es wird eine neue Beobachtungsmethode für die Bestimmung der Thermokräfte von geglühtem reinen Eisen gegen ungeglühtes reines Eisen angegeben und unter Anwendung dieser Methode folgendes festgestellt:

Die Thermokurve ist in dem Temperaturgebiet zwischen 60 und 900° eine jungfräuliche Kurve in dem Sinne, daß die Kurve nach tieferen Temperaturen nicht reproduzierbar ist. Der Verlauf der Thermokurve wird also bei der Beheizung durch den Verlauf der Rekristallisation bestimmt. Je kürzer die Dauer der Glühung, um so schärfer ausgeprägt sind die Knicke in der Thermokurve zwischen 60 und 900°.

---

thermoelektrische Auswirkung. Nach F. **Wever** (Mitt. Kaiser Wilh.-Inst. f. Eisenforschung 3. S. 45. 1921) ist der β/γ-Punkt von einer Änderung im Kristallsytem begleitet (kubisch in regulär oktaedrisch). Gleichzeitig haben A. **Westgren** u. A. **Lindh** (Zeitschr. f. phys. Chem. 98, S. 181. 1921) und A. **Westgren** u. G. **Phragmén** (Zeitschr. f. phys. Chem. 102. S. 1. 1922) röntgenspektroskopisch gefunden, daß das Gitter des β-Eisens mit dem des α-Eisens identisch, nämlich ein raumzentriertes Gitter, das des γ-Eisens ein flächenzentriertes kubisches Gitter ist, und daß das sogenannte δ-Eisen mit dem α-Eisen übereinstimmt.

Auf die Resultate von **Burgess** u. **Scott** bin ich erst nach Abschluß der Arbeit durch die Veröffentlichung von A. **Goetz** (Phys. Zeitschr. 24. S. 379. 1923) aufmerksam geworden. Die dort gezeichnete Kurve der Thermokraft (Fig. 1 auf S. 379) zeigt gleichfalls den Umkehrpunkt bei 500°, für den die vorliegende Arbeit vielleicht die Erklärung bringt.

3. Die zur Beobachtung verwandten Drähte werden mikroskopisch untersucht, und es ergibt sich so der Beginn der Rekristallisation angenähert bei 500° und ihr Fortschreiten bis 900°.

Die Arbeit geschah auf Anregung von Hrn. Geheimrat **Wachsmuth** und wurde ausgeführt in dem Versuchslaboratorium der Firma **W. C. Heraeus**. Hrn. Geheimrat **Wachsmuth** und Hrn. Prof. **Gerlach**, sowie Hrn. Prof. **Fränkel** bin ich für das der Arbeit in weitem Maße entgegengebrachte Interesse zu großem Dank verpflichtet.

(Eingegangen 15. Oktober 1923.)

4. *Genauigkeit und Empfindlichkeit einer Druckwage mit einem sogenannten Amagatzylinder;*
von ***A. Michels.***

Vorliegende Frage hat schon mehrmals den Inhalt von Abhandlungen in der wissenschaftlichen Literatur gebildet. Unter anderem liegen auf diesem Gebiete Arbeiten vor von **Wagner**[1], **Klein**[2], **Smid** und **Crommelin**[3] und **Holborn.**[4] Zur Verdeutlichung sei die Fragestellung hier in Kürze angegeben.

Bei einer Druckwage, sei es eine **Stückrahtsche** oder ein sogenannter Differenzialkolben nach dem System **Schäffer** und **Budenberg**[5], wird der Druck durch die Belastung des Kolbens bestimmt, der genau in einen Zylinder paßt. Der Druck wird durch die jeweils verwendete Flüssigkeit, z. B. Öl, übertragen. Durch Änderung der Belastung kann man nun den Druck im Öle regeln, bzw. messen. Dieser Druck ist gleichzusetzen der Belastung geteilt durch die wirksame Oberfläche. Hierbei entstehen aber viele neue Fragen, und eine der wichtigsten ist es wohl, was haben wir unter der wirksamen Oberfläche zu verstehen, Kolbenoberfläche oder Zylinderdurchmesser? **Klein** und **Wagner** sprechen sich aus theoretischen Gründen für das arithmetische Mittel zwischen beiden Größen aus.

Doch wenn schon angenommen wird, daß dies vollkommen zutrifft, wie ändert sich dann mit dem Drucke die Form, welches ist der Einfluß der Reibung und der Viskosität des Öles, schließlich welche Folgen hat eine Temperaturänderung?

---

1) E. **Wagner**, Ann. Phys. 15. S. 906.

2) G. **Klein**, Dissertationsarbeit, Berlin 1909.

3) E. **Smid** u. C. **Crommelin**, Vers. Kon. Ac. Amsterdam 14. 1915.

4) L. **Holborn** u. H. **Schultze**, Ann. d. Phys. 47. S. 1089. 1915.

5) Konstruiert von W. **Lange**.

Wie bekannt, hat man schon lange danach getrachtet, den Einfluß der Reibung auf ein Minimum herunterzudrücken. Die besten Resultate erhält man, wenn man den Kolben in Drehung versetzt, wenngleich Holborn einer hin- und hergehenden Bewegung den Vorzug zu geben scheint.

Das Problem dieser Reibung wurde von uns in einer früheren Arbeit ausführlich besprochen.¹) Wie dort gezeigt wurde, verschwindet oberhalb einer gewissen Tourenzahl der Metallkontakt zwischen Kolben und Lagerwand. Die sogenannte kritische Tourenzahl ist nicht abhängig von der Belastung, wohl aber von der Viskosität des Öles und somit auch von der Temperatur.

Im Zusammenhang mit den in obenstehender Mitteilung veröffentlichten Ergebnissen glaube ich dann auch die Ansicht von Holborn bestreiten zu müssen. Bei den Umkehrpunkten seiner Bewegung muß doch unbedingt Metallkontakt und somit Metallreibung auftreten. Wohl wird bei genügend hoher Tourenzahl bei jeder Bewegung dieser Kontakt einmal unterbrochen werden. Die Druckwage nähert sich dann auch stoßweise dem Gleichgewichtsstand, was sicherlich für viele Beobachtungsarten kein Hindernis zu sein braucht. Unter anderem treten bei der Eichungsmethode, die Holborn wählt, keine Schwierigkeiten auf. Er war nämlich in der glücklichen Lage, über zwei Druckwagen mit gleichem Meßbereich zu verfügen. Diese beiden verband er durch Dazwischenschaltung einer langen Quecksilbersäule. Aus dem Belastungsunterschied und dem Quecksilberstand berechnete er nun den wirksamen Durchmesser. Sicher läßt sich nun die Quecksilbersäule gut und genau einstellen und ablesen; handelt es sich aber um eine ganz allmähliche Belastungsvermehrung und tritt dabei plötzlich eine Erscheinung, z. B. elektrischer Kontakt, auf, dann wird ein solches stoßweises Arbeiten sicher fehlerhafte Resultate liefern. Ein Beispiel hierfür geben alle elektrischen Volummessungen wie die gebräuchlichen Bestimmungen von Isothermen.²) Wir wollen später noch darauf zurückkommen.

---

1) A. Michels, Ann. d. Phys. 72. S. 285. 1923.

2) Siehe u. a. Kohnstam-Waldelza, Wasserstoffisothermen, Proc. Amsterdam 16. II. S. 754. 1913—1914.

Anstatt nun eine theoretische Betrachtung über die Größe der oben erwähnten Einflüsse von Temperatur usw. vorauszuschicken, scheint es uns besser, die Frage so weit als möglich experimentell zu klären und dann zu trachten, die verschiedenen Schwierigkeiten nacheinander zu besprechen.

Zur Verfügung standen uns zwei Druckwagen der Type **Schäffer und Budenberg**. Untenstehende Abhandlung beschränkt sich auf die kleinere mit einem Meßbereich bis zu 250 Atm., während mit der größeren Druckwage, die bis 5250 Atm. zuläßt, die Untersuchungen fortgesetzt wurden.

Die verwendete Druckwage ist schon in dem oben erwähnten Artikel von uns ausführlich besprochen worden. Dort findet man auch die Verbesserungen angegeben, die unter Benutzung der bei dem Studium der Reibungsfrage erhaltenen Ergebnisse angebracht wurden. Von großer Bedeutung ist es hier, festzustellen, ob wirklich die Genauigkeit und Betriebssicherheit um einen so hohen Grad erhöht worden ist, wie man nach der Theorie erwarten soll.

Empfindlichkeit und Einstellungsgenauigkeit.

Wir wollen nun zuerst die Empfindlichkeit und Einstellungsgenauigkeit bei konstanter Temperatur und Belastung bestimmen. Hierzu wurde eine Methode gewählt, die eine große Anzahl von Beobachtungen in einer entsprechend kurzen Zeit ermöglichte. Notwendig war nur ein Vergleich der verschiedenen Belastungen bei konstant gehaltenem Druck, ohne daß eine genaue Kenntnis vom jeweiligen Druck erforderlich war.

Der zu diesem Zwecke konstruierte Apparat, den wir der Kürze halber fortan das Wasserstoffmanometer nennen wollen, ist in Fig. 1 wiedergegeben.

Kurz gesagt, besteht dieser im Prinzip aus einer mit Wasserstoff gefüllten Cailletetröhre, in der der Quecksilberstand mit großer Genauigkeit gemessen werden kann. *A* ist die Cailletetröhre, worin man sich oberhalb *B* den Wasserstoff im komprimierten Zustand vorzustellen hat. Dieser Wasserstoff ist mit größter Sorgfalt gereinigt, besonders muß er frei sein von Wasserdampf, Kohlensäure und Sauerstoff. Die ersten beiden Stoffe werden deshalb entfernt, um bei Druckerhöhung einen Niederschlag auf der Quecksilberoberfläche zu verhindern, der letzte, um eine Oxydation zu vermeiden.

Die Druckwage und eine Cailletetpumpe werden bei *C* angeschaltet, wodurch der Druck sich durch das Öl und Quecksilber fortpflanzen kann. Da es uns erwünscht erschien, unregelmäßige Volumänderungen bei der Druckerhöhung zu verhindern, und um zugleich den Apparat gegen großen Druck beständiger zu machen, wurde um die Kapillare der Metallmantel *D* angebracht. Der Zwischenraum zwischen Kapillare und Wand war ebenfalls mit Öl gefüllt. Bei der Füllung leitete die Schraube *E* gute Dienste. In dem Kupferblock *F*, worin die Cailletetröhre steckte, waren die Furchen *G* und die Löcher *H*, je drei an Zahl, angebracht. Hierdurch konnte sich der Druck aus dem Quecksilberbade *I* nach dem oberen Teil fortpflanzen. Die Röhre selbst wird durch die halben Ringe *K* unbeweglich in den Kupferblock befestigt.

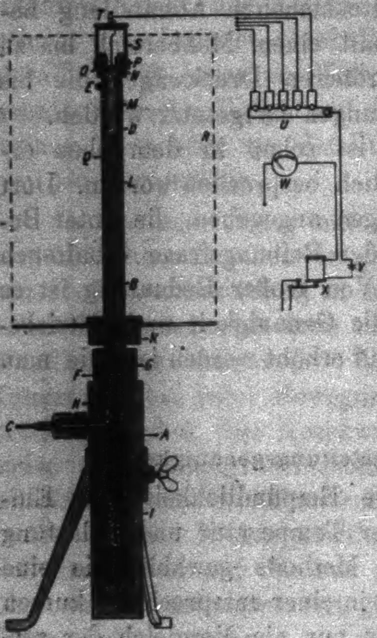


Fig. 1.

Um den Stand der Quecksilbersäule genau messen zu können, werden an fünf verschiedenen Stellen Platindrähte *L* in die Kapillare eingeschmolzen. Nach der üblichen Methode wird dann die Röhre an dieser Stelle platiniert, verkupfert und verzinnt und der Kupferdraht *M* angelötet. Danach wird alles gut isoliert. Von diesen Röhren werden für die diversen Druckintervalle verschiedene Stücke gebraucht. Um die elektrische Leitung nach außen zu führen, wird die Metallröhre an der Oberseite mit einer Kupferplatte *N* abgeschlossen, worin fünf konische Löcher gebohrt worden waren. Eines davon ist in der Figur bei *O* angegeben. In diese Löcher wird erst ein elfenbeinernes Röhrchen als Isolation und dann ein Kupferkonus eingepreßt. An jeden Konus wird ein von dem Platinkontakt kommender Draht angelötet. Mit der Schraubenmutter *P* wird nun die Platte fest angedrückt. Um aber ein Verdrehen der Platte beim Festschrauben und ein Abreißen der Zuleitungsdrähte zu verhindern, wird um die Schraube ein Kugellager eingelegt und die Platte durch einen Stift fixiert. Der besseren Isolation wegen wird innerhalb der Metallröhre *D* noch eine Glasröhre *Q* eingeschoben.

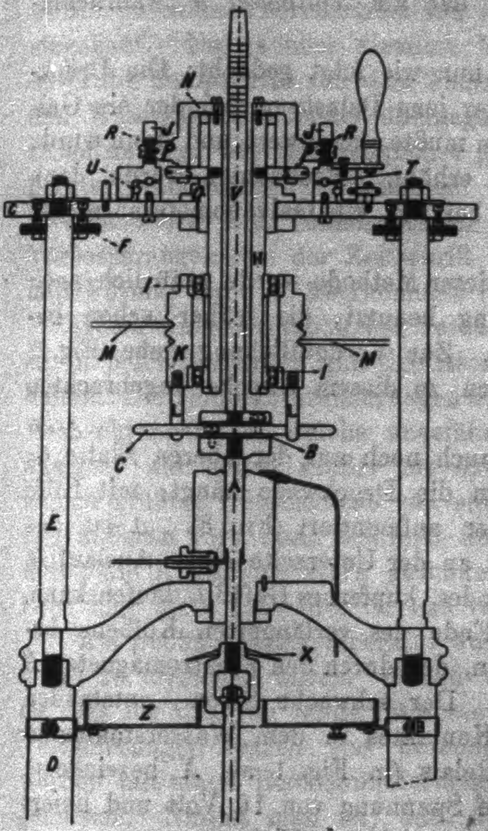


Fig. 2.

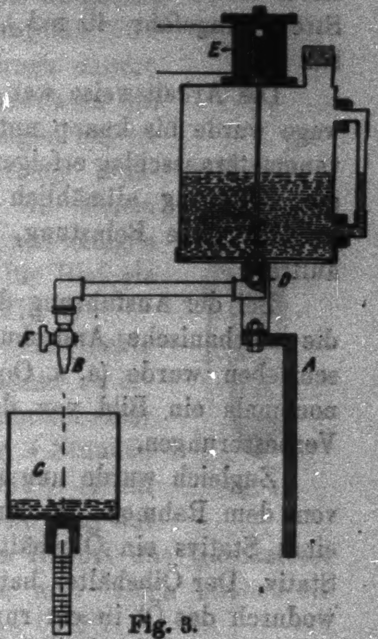


Fig. 3.

An der Oberseite von *N* kann nun wieder an jedem Konus ein Leitungsdraht angelötet werden. Da aber die gesamte Apparatur in einem Thermostaten (in der Figur durch die strichlierte Linie *R* bezeichnet) eingebaut werden mußte, wurde als Schutz gegen das Wasser auf die Schraube noch eine Kupferbüchse *S* angeschraubt, welche danach mit geschmolzenem Paraffin ausgegossen wurde. Die Drähte konnten nun an den Anschlußklemmen *T* befestigt und diese später mit dem Schaltbrett *U* verbunden werden.

Zwischen diesem und der ganzen Masse der Apparatur wird eine Spannung von 4 Volt gelegt. Mit steigendem Druck steigt der Quecksilbermeniskus in *A*. Sobald nun das Quecksilber einen der Platindrähte berührte, entstand ein schwacher Strom (ungefähr 40 mA.), der am Voltmeter *W* wahrnehmbar war.

Die Arbeitsweise war nun wie folgt gedacht: Die Druckwage wurde bis knapp unter jene Belastung, bei der ein Galvanometerausschlag erfolgen mußte, beschwert und dann wurde die Belastung allmählich erhöht. Beobachtet wurde dann jedesmal jene Belastung, bei der ein Galvanometerausschlag auftrat.

Bei der Ausführung dieser Methode wurde natürlich auch die mechanische Andrehung benutzt, die früher schon beschrieben wurde (a. a. O.). Zur Verdeutlichung gebe Fig. 2 nochmals ein Bild von den zu diesem Zwecke angebrachten Verbesserungen.

Zugleich wurde nun auch noch auf der oberen Platte *G*, von dem Rahmen, in dem die Druckwage hängt, mit Hilfe eines Stativs ein Ölbehälter aufmontiert (Fig. 3). *A* ist das Stativ. Der Ölbehälter hat an der Unterseite einen Auslauf *B*, wodurch das Öl in ein rundes, kupfernes Gefäß *C* laufen kann, das auf dem konischen Ende des verlängerten Kolbens befestigt ist. *D* ist ein Hahn, der durch den Elektromagneten *E* geschlossen werden kann. Der schwache Strom, entstanden durch das Schließen des Kontaktes in dem Wasserstoffmanometer, läuft durch ein Relais (in Fig. 1 als *X* bezeichnet). Dieses Relais schließt eine Spannung von 16 Volt und liefert den Strom für den oben beschriebenen Elektromagneten.

Das aus *B* ausströmende Öl liefert nun eine allmähliche Belastungserhöhung, bis das Galvanometer ausschlägt und gleichzeitig der Hahn geschlossen wird.

Danach kann das Ölfaß gewogen werden und die Belastung berechnet, wobei der Quecksilberkontakt aufgetreten ist. Natürlich wurde nur mit ausgeschalteter Andrehung gearbeitet. Da die Tourenzahl aber oberhalb der kritischen gehalten werden mußte, kann nur in Zwischenräumen die Ablesung vorgenommen werden. Darum war noch der Hahn *F* angebracht, welcher während der Andrehung geschlossen werden konnte.

Es ist selbstverständlich, daß vorgesorgt werden mußte, daß die Temperatur des Wasserstoffmanometers genau bekannt ist. Dazu war es, wie oben schon mitgeteilt wurde, in einem Thermostaten von ungefähr 70 l eingebaut. Da es aber ziemlich lange dauert, bevor die Temperatur von dem Thermostaten auf den Wasserstoffmanometer übergegangen ist, ist es notwendig, daß nur möglichst geringe Temperaturveränderungen vorkommen. Zu diesem Zwecke wurde ein Toluolregulator mit einigen Verbesserungen aus der Zeitschrift für Biologie und Physik, Band 3, übernommen (Fig. 4).

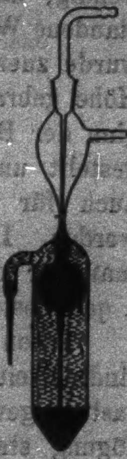


Fig. 4.

Nach einigen vergeblichen Versuchen glückte es, in jeder Beziehung günstige Resultate zu erhalten. Die Temperaturänderungen während einer Beobachtungsreihe, welche ungefähr 4 Stunden dauerte, war selten größer als 0,004°. Wohl kamen größere Unterschiede von einem Tag auf den anderen vor, wann während des Nachts das Quecksilber durch die Abkühlung stark gesunken war. Doch blieben sie auch hier stets unter der Grenze von 0,02°.

Als Beobachtungstemperatur wurden 30° gewählt, da diese leicht zu erreichen waren. Genau wurde sie nicht bestimmt, da dies für uns von wenig Interesse war. Nur die jeweiligen Veränderungen waren von besonderer Wichtigkeit. Diese wurden mit einem Beckmannthermometer bis auf 0,001° genau gemessen. Nimmt man an, daß, von ganz geringen Abweichungen abgesehen, das Gesetz von Boyle-Gay-Lussac gilt, dann erreicht man eine Genauigkeit von rund $^1/_{300000}$ oder bei der von uns als Maximum beobachteten Belastung von 180 kg per qcm rund $^1/_2$ g, was man später als in jeder Hinsicht genügend erkennen wird.

Bei unseren später mitgeteilten Ergebnissen ist stets die Belastung auf eine bestimmte Temperatur reduziert.

Angemerkt muß werden, daß bei jeder Beobachtungsreihe dafür gesorgt werden mußte, daß schon einige Stunden vorher der Thermostat auf konstante Temperatur und das Manometer auf den richtigen Druck gebracht werden mußte, damit sich das Temperaturgleichgewicht zwischen den Thermostaten und dem Wasserstoffthermometer vollständig einstellen konnte.

Die Wage rechtzeitig auf den Druck zu bringen, war notwendig, damit die durch die adiabatische Kompression entstandene Wärme wieder abgegeben werden konnte. Der Druck wurde zuerst mit einer Cailletetpumpe bis fast zur gewünschten Höhe gebracht und dann ungefähr eine halbe Stunde vor Beginn der Beobachtung genau mit dem Quecksilberkontakt eingestellt und die Druckwage eingeschaltet. Natürlich mußte auch für eine Korrektion des Barometerstandes vorgesorgt werden. Da diese Abweichung aber nicht allzugroß war, kann man für diese Korrektion den wirksamen Durchschnitt auf 1 qcm festsetzen.

Schon bei der ersten Beobachtung zeigte sich die Empfindlichkeit als sehr groß. Darum war es notwendig, die Belastungsgewichte der Druckwage genauer zu wägen. Zur Verfügung stand uns hierzu eine Wage von Becker mit einer Empfindlichkeit von einem halben Gramm bei einer Belastung von 25 kg. Die Resultate sind die folgenden (die kleineren Gewichte sind natürlich mit einer anderen Wage gewogen):

Nominalgewicht		Wirkliches Gewicht
0,050		0,050
0,100		0,100
0,200	Nr. 1	0,200
0,200	2	0,1993
0,500		0,500
1	1	0,9993
2	1	1,9989
2	2	1,9988
5	1	5,001
5	2	5,0015
10	1	9,9995
10	2	9,9985
20		19,9955
25	1	24,996
25	2	24,999
25	3	24,996
25	4	25,002
25	5	25,000
25	6	24,996
25	7	24,998
25	8	24,996
Die Kolben, Grundfläche usw.		6,4655

Um zu verhindern, daß bei der Summation eine Addition von Beobachtungsfehlern ein schlechtes Resultat gibt, werden die Gewichte stets entsprechend ihrer Nummernfolge verwendet.

Als Beispiel für eine Beobachtungsreihe mit den anzubringenden Korrektionen führen wir unseren Versuch Nr. 239 mit dem Kontakt 1 in der Cailletetröhre Nr. 3 an:

Nominalgewicht		Wirkliches Gewicht
20		19,9955
25	Nr. 1	24,996
25	2	24,999
10	1	9,9995
5	1	5,001
0,200	1	0,200
0,010		0,010
Ölbehälter		0,797
Kolben		6,4655
Barometer 760,3		92,4635
reduz. auf 760		0,0005
Die Temperatur des Thermostaten mit einem Beckmannschen Thermometer		
gemessen	0,994	
reduziert auf	1,000	0,0015
		92,4655

Zuerst wollen wir die Frage der Empfindlichkeit der Meßmethode bei konstanter Temperatur behandeln. Diese Empfindlichkeit erwies sich als sehr groß, doch war sie für die verschiedenen Kontaktpunkte nicht konstant. Namentlich zeigte es sich, daß die jeweilige Form der eingeschmolzenen Platindrähte eine große Rolle spielt. War dieser früher mehr in Form eines kleinen Bogens eingeschmolzen, so erwies sich später die in Fig. 5 wiedergegebene Art als zutreffender. Zugleich fiel auf, daß das Einschieben des elektrischen Kontaktes stark von der Höhenstellung des Kolbens abhängig war. In der Hauptsache glaube ich dieses der einigermaßen konischen Form des Kolbenendes zuschreiben zu müssen, da natürlich der aufwärtsgerichtete Archimedesdruck in dem untersten Lagerraum (Fig. 6) eine zu geringe Rolle spielt, um die Differenzen zu erklären. Diesen Schluß glaube ich aus der Tatsache ableiten zu können, daß der Unterschied der Belastung bei ge-

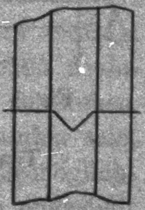


Fig. 5.

gebener Höhendifferenz nahezu der totalen Belastung proportional ist, was auf eine Zunahme des wirksamen Durchmessers hinweist. Auf Grund dieser Erfahrung wurde der verlängerte Kolben mit Teilstrichen versehen, wie Fig. 7 zeigt. Ein Zeiger *A* gibt die Höhe an. Der Abstand der Teilstriche ist in der Figur in Millimeter angegeben, eine genauere Einteilung ist nicht erforderlich, da sonst die Ablesung während der Rotation Schwierigkeiten machen würde.

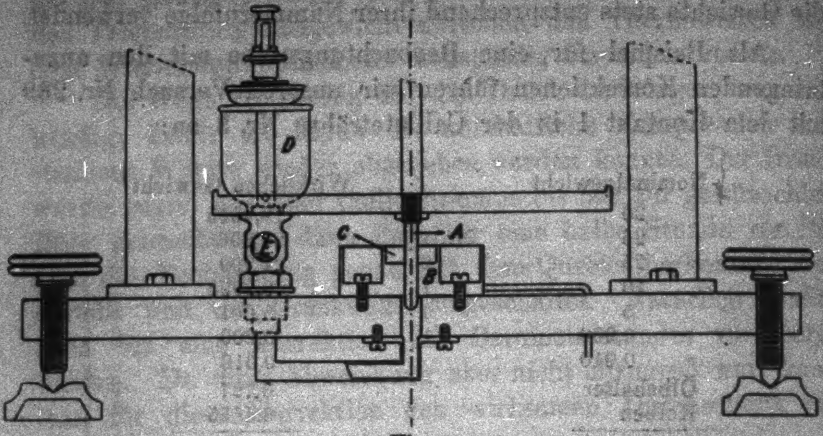


Fig. 6.

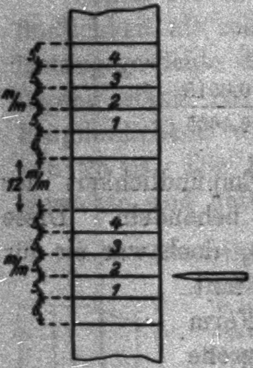


Fig. 7.

Ein Beispiel für die Beurteilung der Empfindlichkeit ersieht man in untenstehender Tabelle, die bei einem Druck von ungefähr 92,5 Atm. aufgenommen wurde.

Temperatur	Stand	Belastung
18,89	1,9	92,508
	1,9	92,5085
	2,0	92,5095
	1,9	92,5105
	2,0	92,510
	2,0	92,509
	1,8	92,5095
	2,0	92,5105

Nun ist es freilich nicht gut möglich, stets bei gleich hoher Kolbenstellung zu arbeiten, besonders weil schon während des Versuches der Kolben wegen des Ölverlustes sinkt und man nicht voraussagen kann, wenn der elektrische Kontakt genau einspielen wird. Man kann auch nicht fortwährend Öl nachpumpen, da zuerst einmal beim Steigen des Kolbens in dem Öllager *B* (Fig. 6) einen Augenblick lang ein Vakuum entsteht und weil sich außerdem zeigte, daß sich der von dem Nachpressen stammende Druck schneller nach dem Wasserstoffmanometer fortpflanzt als nach der Druckwage. Bevor noch die Druckwage die Druckvermehrung aufgenommen hat, hat der Überdruck schon auf einen Augenblick das Quecksilber in dem Wasserstoffmanometer einige Bruchteile eines Millimeters in die Höhe gepreßt, was schon einen elektrischen Ausschlag zur Folge haben konnte.

Auf Grund dieser Erfahrung schien es uns gut, einmal genau den Einfluß einer Höhenstellungsänderung des Kolbens zu untersuchen. Es zeigte sich nun, daß diese Abweichung in der Belastung bei einem Höhenunterschied von 1,4—3, also im Bereiche von 8 mm proportional der Höhendifferenz zu setzen war, und daß sie der Belastung nahezu proportional war. Nehmen wir völlige Proportionalität an, dann liegen die dadurch verursachten Fehler innerhalb der Grenze der Beobachtungsgenauigkeit. So wurde z. B. bei einer Senkung um einen Skalenteil (also 5 mm) und einem Druck von 180 Atm. eine Belastungsvermehrung von 12 g notwendig.

Mit Hilfe dieser Zahlen wurden nun unsere Ablesungen alle auf den Kolbenstand 2,0 reduziert.

Der Temperatureinfluß erwies sich auch als sehr einfach. Es genügt vollständig, die gewöhnlichen oberflächlichen Änderungen bei Temperaturunterschieden in Rechnung zu ziehen. Sollten noch anderweitige Temperatureinflüsse vorhanden sein, dann fallen sie sicherlich außer unsere Beobachtungsmöglichkeit. Der Temperaturbereich, bei dem die Versuche angestellt wurden, ist nicht zu groß gewählt. Es wurde nämlich stets bei einer Temperatur von 12—24° C gearbeitet. Eine Temperatur außerhalb dieser Grenzen kommt in Wirklichkeit in unserem Versuchslokal doch nicht vor und obendrein müßte bei höherer Temperatur jedesmal wieder die kritische Tourenzahl bestimmt werden. Steigt die Temperatur zu hoch, dann sind sicherlich sechzig Umdrehungen in der Minute infolge des Sinkens der Viskosität des Öles nicht hinreichend.

Hierbei will ich noch besonders aufmerksam machen, daß die Temperatur des Arbeitsraumes nicht als maßgebend betrachtet werden kann. Schon in einer früheren Abhandlung[1]) wurde darauf hingewiesen, wie langsam die Druckwage die Zimmertemperatur annimmt. Außerdem liefert die Reibung in der Ölschicht selbst auch Wärme. Das beste wäre es denn auch, wenn man imstande wäre, die Temperatur des Kolben selbst zu messen. Da dies nicht tunlich war, wurde auf der oberen Platte (*G* von Fig. 2) ein eiserner Quecksilbertopf angebracht und da hinein das Thermometer gestellt. Vorausgesetzt, daß vor jeder Beobachtungsreihe die Druckwage eine kurze Zeit bzw. eine halbe Stunde konstant in Drehung gehalten wurde, damit sich ein Gleichgewicht zwischen wegströmender und neuentstandener Wärme einstellen konnte, glauben wir wohl, die Temperaturdifferenzen vom Quecksilbertopf und Achse mit großer Annäherung gleichsetzen zu können.

Einige Beispiele von gut gelungenen und minder gut gelungenen Versuchen sollen nun folgen. Die bei den verschiedenen Temperaturen und Kolbenhöhen aufgenommenen Werte sind auf eine Temperatur von 18° und auf den Kolbenstand 2,0 reduziert.

Belastung (ungefährer Druck 56,5 Atm.).

56,681
56,680
56,6805
56,6805
56,6805
56,681 **Mittelwert 56,6805**

56,6805
56,6825
56,680
56,681
56,680

Belastung (ungefährer Druck 97 Atm.).

97,0625
97,065
97,0685
97,0635
97,0655
97,065

97,0635
97,062 **Mittelwert 97,0635**
97,063
97,0625
97,064
97,062

Belastung (ungefährer Druck 143 Atm.).

143,156
143,1565
143,156
143,155
143,1555
143,1545
143,1555 **Mittelwert 143,155**

143,1545
143,1555
143,1525
143,160
143,1565
143,1545

---

[1]) a. a. O.

Belastung (ungefährer Druck 176,5 Atm.).

176,870	176,871	
176,868	176,8715	Mittelwert 176,8705
176,8705	176,871	

Diese Ziffern geben nur einige Serien von unseren vielen Versuchen wieder, die aber alle den gleichen Verlauf zeigen.

Aus den angegebenen Zahlen glauben wir folgenden Schluß ziehen zu können.

Innerhalb der Fehlergrenzen ist unserer Ansicht nach die einzige Temperaturfunktion berechtigt, die mit der gewöhnlichen Metallausdehnung zusammenhängt.

Die Beobachtungsgenauigkeit ist nicht größer zu setzen als ungefähr 1,5 g nach beiden Seiten des Mittelwertes.

Die Genauigkeit der Beobachtung würde in unserem Falle nicht durch die Empfindlichkeit der Druckwage, sondern durch die des Wasserstoffmanometers beschränkt. Obwohl dieser Schluß nicht unumstößlich beweisbar ist, glaube ich ihn doch aus folgenden Tatsachen ziehen zu können.

Vorerst ist die Empfindlichkeit keine Druckfunktion. Aus den gegebenen Tabellen ersieht man, daß die Einstellungsgenauigkeit bei 97 Atm. sicherlich nicht besser ist als bei 176. Außerdem geben dicht beieinander liegende Werte gerade ziemliche Abweichungen. Ist in dem gegebenen Fall bei einem Druck von 97 Atm. die Abweichung nach beiden Seiten 2,5, bzw. 3, so wollen wir demgegenüber eine Beobachtungsreihe bei rund 92,5 Atm. anführen.

92,4705	92,4715	
92,4725	92,4715	
92,4705	92,473	Mittelwert 92,4715
92,472	92,4725	
92,472		

mit einer maximalen Abweichung von 1 bzw. 1,5.

Ein derartiges Bild der Empfindlichkeit ist aber leicht zu erklären, wenn wir als Ursache das Wasserstoffmanometer annehmen. Wenn es zutrifft, daß bei höherem Druck die gleiche Belastungserhöhung eine geringere Quecksilbererhebung zur Folge hat, ist doch andererseits bei höherem Druck die Dichte des Wasserstoffes wieder größer, wodurch die Durchschlagsmöglichkeit für elektrische Funken fällt. Die geringe Konstantheit bei verschiedenen Kontaktpunkten ist einfach der mehr oder weniger richtigen Form des Platindrahtes zuzuschreiben. Außerdem erwies es sich, daß die Genauigkeit stark abnahm, wenn gegen den Tisch, worauf das Wasserstoffmanometer stand, geklopft wurde oder wenn auch nur mit dem Finger darüber hingefahren wird. Sollte aber unser Schluß nicht richtig sein, dann ist sicher noch zu sagen, daß mindestens bei einer Belastung von 176,5 Atm. die Empfindlichkeit und Einstellungsgenauigkeit der Druckwage gleichzusetzen ist 1,5 g oder

$$\frac{1{,}5}{176\,500} = \pm \frac{1}{120{,}000},$$

vermutlich ist sie noch größer.

Wäre es uns möglich, bei verschiedenen Belastungen den wirksamen Durchmesser mit dieser Genauigkeit zu bestimmen, dann müßte man unbedingt über einen sehr genauen Meßapparat verfügen.

Ganz im Gegenteil kommen wir da mit den Ergebnissen anderer Forscher, welche wir oben anführten namentlich mit C. A. Crommelin und E. Smid (a. a. O. und [1]).

Diese Forscher bestimmten den wirksamen Durchmesser und die Genauigkeit der gleichen Druckwage durch direkte Vergleichung mit einem Quecksilbermanometer bis zu 100 Atm. und kamen zu folgendem Resultat.

When the determinations were repeated, the same value was not always found for the functional section, the greatest deviation being about 0,005 in this case.

The sentivity of the pressure balance $^1/_{10000}$ thus far exceeds its accuracy.

Unbedingt müssen wir auch bestreiten, was C. A. Crommelin später mitteilt.[2]) „Die Abweichungen zeigten sich nicht konstant, sie waren abhängig von dem Druck, außerdem verschieden von Tag zu Tag, so daß geschlossen werden mußte, daß bei zwei nicht gleichen Druckwagen im günstigsten Fall keine größere Genauigkeit als 1:400 erwartet werden konnte. Nach der Eichung soll man eine Genauigkeit von 1:1000 erreichen können.“

---

1) C. A. Crommelin u. E. Smid, Comm. Leiden 146c.

2) C. A. Crommelin, Naturwissenschaftl. Laboratorium zu Leiden 1904—22, Gedenkschrift, S. 228.

Wenn wir es schon dahingestellt sein ließen, daß es einen Einfluß des Druckes überhaupt gibt, worauf wir später noch zurückkommen wollen, kann ich doch nicht umhin, die anderen Einflüsse zu bestreiten. Nach unserer Meinung muß die Ursache der minder guten Resultate der Leidenschen Untersuchung in ganz anderer Richtung gesucht werden und sind vielleicht in dem Satze aus seiner eigenen Veröffentlichung zu finden: „Of the theory of the pressure balance only little is kwown (S. 24)." U. a. konnten die Verfasser die kritische Tourenzahl gar nicht in Rechnung gezogen haben. Die Vermutung liegt dann auf der Hand, daß darin die Ursache der minderguten Resultate ihrer Versuche zu suchen war.

Auch wurde in der genannten Mitteilung nirgends von dem Einfluße der Temperatur der Achse und dem der Kolbenhöhe gesprochen.

Der wirksame Durchmesser.

Nach oben stehender Erörterung kann es nicht Wunder nehmen, daß es uns wünschenswert erscheint, einen neuen Versuch der Bestimmung des wirksamen Diameters zu wagen und zwar dann gleich auch für den Bereich über 100 Atm. Um so mehr erschien dieser notwendig, da C. A. **Crommelin** und E. **Smid** eine besondere Druckfunktion annehmen zu müssen glaubten, während **Holborn** zu ganz anderen Resultaten kam. Nun verfügten wir nicht über ein Quecksilbermanometer bis zu so hohem Druck wie die beiden ersten Forscher, noch waren wir in der glücklichen Lage, über zwei Druckwagen mit demselben Meßbereich verfügen zu können wie **Holborn**. Nach einigen Überlegungen wurde eine Aufstellung wie sie in Fig. 8 schematisch wiedergegeben ist, als die beste gewählt.

A und *B* stellen zwei Cailletetpumpen vor, die durch einen Hahn *C* verbunden sind. Bei *D* wurde die Druckwage, bei *E* das Wasserstoffmanometer angeschaltet. Außerdem sind *A* und *B* durch eine Röhre *F—G* verbunden, die zum Teile mit Quecksilber gefüllt ist. Zuerst wird nun in dem Wasserstoffmanometer die Lage des Kontaktpunktes auf die oben beschriebene Weise bestimmt, dadurch, daß die Druckwage bei geöffnetem Hahn *C* solange belastet wurde, bis das Galvanometer einen Ausschlag gab. Darnach wurde der

Hahn *C* geschlossen und durch Druckvermehrung in *A* und Verminderung in *B* der Quecksilberstand geändert. Der Druck aus der Druckwage kann sich jetzt nur längs *A* durch das Röhrensystem *F—G* zu der Cailletetpumpe *B* und dem Wasserstoffmanometer fortpflanzen. Der Druck im Letzteren ist aber gleich dem, der in der Druckwage herrscht, vermindert um den von der Höhe des Quecksilbers abhängenden Betrag. Belastet man wieder die Druckwage, bis das Galvanometer einen Ausschlag gibt und mißt man gleichzeitig die Quecksilberhöhe in *G* und *F* ab, dann kann man aus der notwendigen Belastungsvermehrung und aus dem Unterschied im Quecksilberniveau auf elementare Weise den gesuchten wirksamen Diameter berechnen.

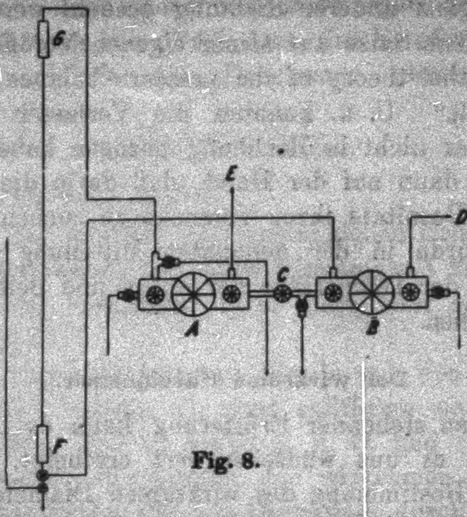


Fig. 8.

Die Instrumente.

Um die Brechbarkeit des Röhrensystems zwischen *A* und *B* so viel als möglich zu verringern, wird dieses beinahe zur Gänze aus Stahl verfertigt. Nur in der Höhe, wo sich das Quecksilberniveau einstellen soll, wird eine Kapillare aus Glas eingefügt. Es war nun höchst wissenswert, bei den Versuchen mit Zwischenschaltung der Quecksilbersäule genau die gleichen Bedingungen zu wählen und einzuhalten, wie bei der direkten Bestimmung der Lage des Platinkontaktes. Da hierbei mit sehr geringer Belastungsvermehrung gearbeitet wurde, glaubten wir es jetzt auch tun zu müssen. Hierzu war es aber notwendig, im Augenblicke, daß das Galvanometer den Ausschlag anzeigt, mit möglichst größter Genauigkeit den Stand des Quecksilbermeniskus abzulesen. Da dies kaum gut zu machen war, wurde beschlossen, die Meniske zu photographieren. Derselbe Strom, der vom Relais kommend, den Ölhahn abschloß, kann auch gleichzeitig den Verschluß des Photographenapparates auslösen.

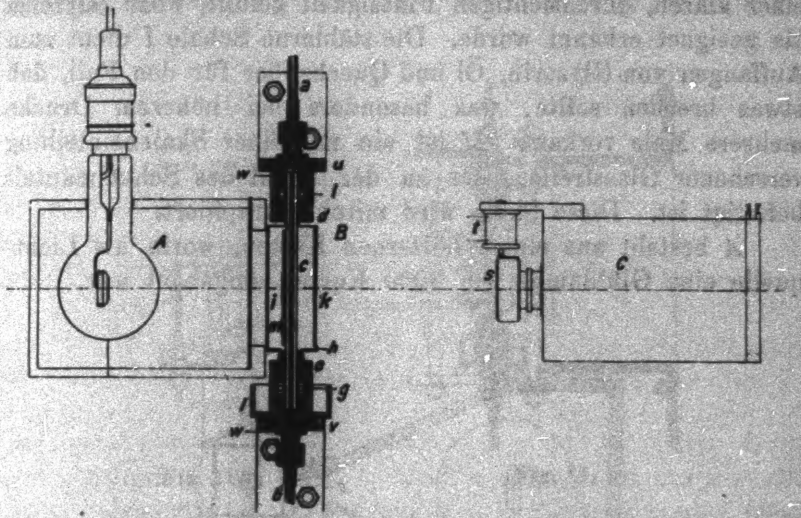


Fig. 9.

Die Fig. 9—11 geben ein Bild unseres Apparates, wie er nach einigen vergeblichen Versuchen gute Resultate ergab. Sie zeigen Zeichnungen von der Einrichtung beim obersten Quecksilbermeniskus, bei den untersten wurde eine ganz analoge angebracht.

Betrachten wir zuerst Fig. 9.

A zeigt die Aufstellung der Lichtquelle, *B* den zur Beobachtungsröhre gehörigen Teil, *C* den Photographenapparat. In *B* sind *a* und *b* die Röhren, wovon oben die Rede war, und *c* die Glaskapillare. Diese Kapillare wird an ihren beiden Enden in zwei Eisenhülsen eingekittet, die sorgfältig rund gedreht und poliert waren. Mit Lederdichtungen in den Schraubenmuttern *d* und *e* wird eine vollkommen leckfreie Kuppelung erreicht. Die Kugellager *f* und *g* dienen dazu, um bei dem Festschrauben ein Mitdrehen der Kapillare, das ihren Bruch zur Folge haben könnte, zu verhindern. Um die Glasröhre ist ein Metallmantel *h* angebracht. Dieser ist mit zwei Glasfenstern *i* und *k* versehen und dient einerseits als Schutzmantel, andererseits als Thermostat. Die Strahlen der Lichtquelle *A* würden sonst eine unkontrollierbare Temperaturänderung zur Folge haben. Darum wird der Metallmantel mit einer klaren, durchsichtigen Flüssigkeit gefüllt, wozu Glyzerin als geeignet erkannt wurde. Die stählerne Schale *I* dient zum Auffangen von Glyzerin, Öl und Quecksilber für den Fall, daß etwas brechen sollte, was besonders bei höherem Drucke mehrere Male vorkam. *M* ist ein mit einer Skaleneinteilung versehener Glasstreifen, der an der Wand des Schutzmantels befestigt ist. Diese Skala wird mitphotographiert.

A besteht aus einem hölzernen Kasten, worin als Lichtquelle eine Glühlampe von 2000 Kerzen eingebaut war.

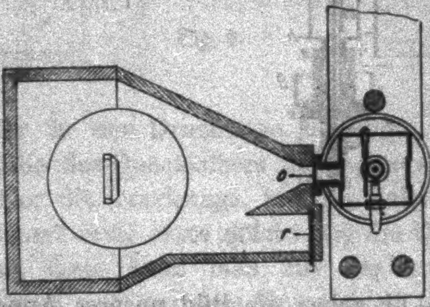


Fig. 10.

In Fig. 10 gibt die Horizontalprojektion eine bessere Übersicht von der Form des Lichtbehälters. Hierin ist *o*, eine Mattglanzscheibe, um diffuses Licht zu erzeugen. Bei *r* waren zwei Mattglasfensterchen angebracht. Vor diese Fensterchen werden Blechplättchen geschoben, in denen Ziffern ausgestanzt sind. Bei jeder Aufnahme werden Plättchen mit anderen Ziffern vorgelegt. Die Photographplatte nimmt somit sowohl den Quecksilberstand als auch die Nummer des Versuches auf, wodurch eine Verwechslung der Platten ausgeschlossen wurde.

Bei *C* dem Photographenapparat, gibt *s* den Auslöser an und *t* den Elektromagneten, der diesen bedient.

Der Apparat *B* wird an der Mauer mit Hilfe zweier Bügel befestigt, die in zwei U-förmigen Stücken enden, zwischen welchen das Ganze genau hineinpaßt. Die U-förmigen Klauen sind in Fig. 9 im Durchschnitt bei *u* und *v* angegeben, Abplattungen an den eisernen Büchsen verhindern eine eventuelle Verdrehung.

Eine bessere Übersicht der Befestigungsart gibt Fig. 11, welche einen vertikalen Durchschnitt senkrecht auf Fig. 9 vorstellt.

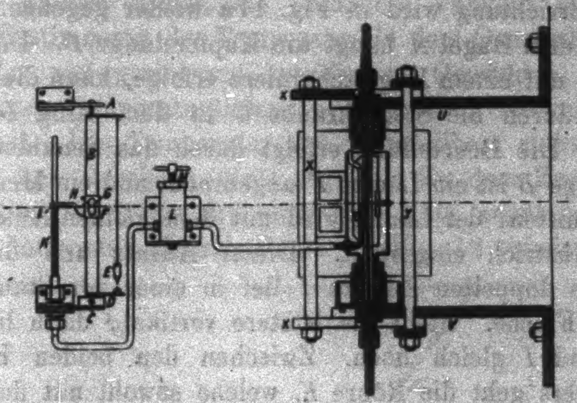


Fig. 11a. **Fig. 11.**

Die Bügel *x* an der linken Seite der Figur werden erst bei Versuchen über 120 Atm. angebracht. Besonders schwierig war es, oberhalb dieses Druckes die Glaskapillaren gegen Bruch zu schützen. Bei genauer Beobachtung wurde bemerkt, daß trotz der schweren Konstruktion (die Bügel waren etwa 10 cm breit und 13 mm dick) und trotz der Verbindungsstange *y*, die Bügel bei großer Belastung ein wenig auseinandergedrückt werden. Dadurch blieben die Stücke *u* und *v* nicht mehr parallel und im Glase entstand eine Beugungsspannung mit der erwähnten unangenehmen Folge. Nach Anbringung der Verstärkung *x* brachten wir es bis auf 180 Atm.

In der Fig. 11 ist gleichzeitig noch zu bemerken, daß die Quecksilberröhre *z* mit einem Schlauch in Verbindung steht. Der Zweck ist folgender.

Will man auf den Photographien die Quecksilberbestände beurteilen, dann muß gleichzeitig eine richtige Nullpunktlinie vorhanden sein. Würde dieser Nullstrich auf der Skaleneinteilung angebracht, so erhielten wir keine genügend genauen Resultate, denn die Skala war an dem Schutzmantel befestigt und ihr Stand also von der Montage abhängig, die nicht jedesmal die gleiche war. Außerdem wiesen wir schon oben nach, daß sich bei einer Druckerhöhung die Bügel und somit auch die Skala bewegte. Darum wurde an der Wand ein kleiner Apparat angebracht, der mit der Röhre *x* korrespondierte. Diese Vorrichtung wird in Fig. 11a wieder gegeben.

An dem Bügel *A* hängt die Kupferstange *B*. Da die Aufhängung mit einem Kugelscharniere erfolge, kann die Vertikalstellung durch die Stellschraube *C* in dem Ring *D* erreicht werden. Die Beurteilung erfolgt durch das Senkblei *E*. Auf der Stange *B* ist ein Läufer *F* angebracht und ein Merkstrich *G* eingeschnitten; der Läufer wird mit dem kleinen Ansatz *K* auf den Merkstrich eingestellt. Dieser Ansatz und die untere Seite des doppelten Zeigers *I* lief in einer zur Stange *J* lotrechten Fläche. Steht die letztere vertikal, dann liegen also *G*, *H* und *I* gleich hoch. Zwischen den beiden Fortsätzen des Zeigers geht die Röhre *K*, welche sowohl mit dem Quecksilbergefäß *L* wie mit der Röhre *x* durch einen Schlauch verbunden ist. Gefäß, Röhre und Schlauch sind mit Quecksilber gefüllt, welches mit der Schraube *M* so hoch eingestellt werden kann, daß das Niveau in der Röhre *K* genau ebenso hoch steht wie die Unterseite des Zeigers. Die Höhe ist somit mit der des Merkstriches *G* auf der Stange *H* gleich. Da nun auf beiden photographischen Aufnahmen von der untersten und der obersten Beobachtungsröhre diese Nullstände als Bild des Quecksilberspiegels in *x* wiedergegeben werden, braucht man nur noch den genauen Abstand der beiden Merkstriche *G* zu kennen, um aus den Aufnahmen die Höhe der totalen Quecksilbersäule berechnen zu können.

Um diesen Abstand messen zu können, werden in verschiedenen Höhen Kupferplättchen an der Mauer angebracht und hierauf zwei feine Linien in X-form eingeritzt. Der Abstand dieser Merkzeichen untereinander wird nun mit einem Kathetometer bestimmt. Das Resultat war folgendes.

Oberster Nullpunkt bis Zeichen 2	75,565
Zeichen 2 bis Zeichen 3	90,411
„ 3 „ „ 4	86,725
„ 4 „ „ 5	92,102
„ 5 „ „ 6	61,544
„ 6 „ unterster 0 Punkt	80,857
	486,704

Dies war die ganze Höhe, die zur Verfügung stand. Der Apparat reichte schon bis auf den Boden des Arbeitsraumes und war mit der Unterseite in der Diele zwischen der Fundierung eingelassen.

Eine andere Sache, die besondere Vorsicht erheischte, war die Bestimmung der Temperatur in dem Quecksilberrohre. Infolge des viel geringeren spezifischen Gewichtes war der Einfluß einer Temperaturänderung in dem Öle von viel weniger Wichtigkeit. Die Temperatur des Quecksilbers selbst zu bestimmen, war durchaus nicht einfach. Zu dem Zwecke war um die Steigröhre ein Behälter aus Holz angebracht, wovon der horizontale Durchschnitt in Fig. 12 wiedergegeben ist. Zugleich ersieht man auf dieser Figur die Art der Befestigung der Röhre an der Mauer mit Hilfe der Bügel *A*. Insgesamt waren acht solche Bügel in Verwendung, In der Figur ist *B* der hölzerne Behälter, *C* die Stahlröhre.

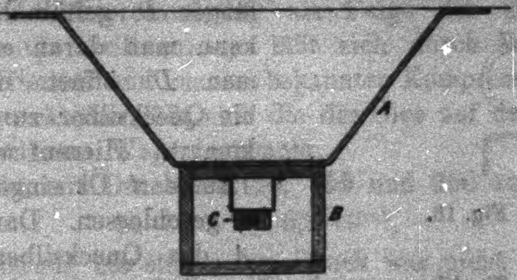


Fig. 12.

In dem Behälter werden nun an drei verschiedenen Punkten Thermometer angebracht. Vor und während der Beobachtung wird nun von unten in dem Behälter Luft eingeblasen, während mit dem Versuch erst begonnen wird, nachdem die Temperatur geraume Zeit konstant war.

Zum Schluß gibt Fig. 13 noch eine Übersicht über den gesamten Röhrenkomplex in abgekürzter Form. Zu beachten ist, daß soviel als irgend zulässig, horizontale Stücke vermieden sind, um zu verhindern, daß irgendwo Quecksilber zurückbleibt oder daß sich Öl zwischen das Quecksilber eindrängt. Das würde sicherlich zu fehlerhaften Resultaten Anlaß geben. Zwischen der Cailletetpumpe *A* und dem Röhrensystem ist noch ein Quecksilberfang *D* angebracht, damit bei irgendeinem Unglück das Quecksilber nicht bis in die Pumpe vordringen kann.

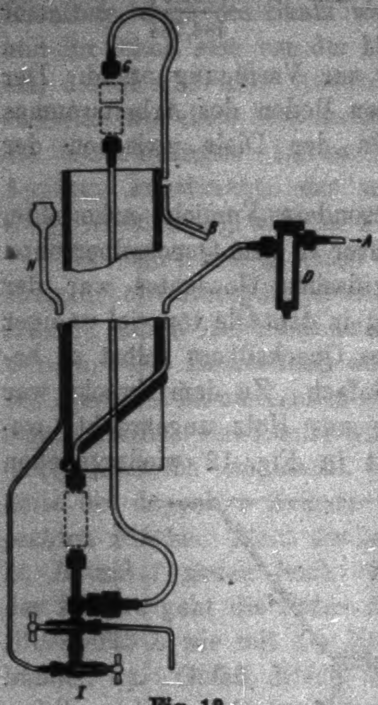


Fig. 13.

Mußte der Apparat gefüllt werden, dann wurde zuerst in die Trichterröhre *H* Quecksilber eingegossen und der Hahn *I* geöffnet, bis das Quecksilber den ganzen Apparat bis an den Auffänger *D* gefüllt hatte. Dies kann man daran ersehen, daß man *D* öffnet und wartet, bis Quecksilber zum Vorschein kommt. Hierauf wird mit der Pumpe *A* Öl eingepumpt und *D* geschlossen. Dann wird mit *A* das Quecksilber so hoch hinaufgepreßt, bis es an der Oberseite von *G* an der geöffneten Röhre heraustritt. Nun wird mit der Cailletetpumpe *B* die Röhre *K* mit Öl gefüllt und das Röhrensystem bei *G* geschlossen.

Korrekturen.

Außer der schon erwähnten Korrektion bei Bestimmung der Einstellung der Genauigkeit muß hier noch das spezifische Gewicht von Quecksilber und Öl bei verschiedener Temperatur und wechselnden Druck in Rechnung gezogen werden. Für das Quecksilber wurden die Zahlen aus **Landolts** Tabellen übernommen, während als Kompressibilitätskoeffizient

$$3{,}9 \cdot 10^{-6}$$

angenommen wurde. Für das verwendete Öl mußten wir diese Zahl aber erst selbst feststellen. Piknometrische Bestimmungen ergaben als spezifisches Gewicht bei 15 Grad 0,91 444, während die Temperaturkorrektion per Grad 0,000 724 beträgt. Da nur Temperaturänderungen von einigen Graden in Betracht kamen, wurde durch Verwendung dieser direkten Korrektion genügende Genauigkeit erzielt.

Die Zusammenpreßbarkeit wurde wie folgt bestimmt:

Ein Glasgefäß von der in Fig. 14 angegebenen Form wurde mit dem zu untersuchenden Öl gefüllt und hierauf aufrecht in einen eisernen Behälter gestellt. Dieser wird dann so hoch mit Quecksilber gefüllt, daß auch die Öffnung des Ölgefäßes unter das Quecksilber kommt. Dann wird alles verschlossen und unter Druck gesetzt. Durch das Zusammenpressen des Öles dringt das Quecksilber in das Ölgefäß ein. Wird nun der Druck aufgehoben, dann dringt nicht wieder das Quecksilber, sondern das Öl aus der Öffnung aus. Die Gewichtsvermehrung als Folge der eingedrungenen Quecksilbermenge läßt sich durch Wägung bestimmen. Hieraus und aus der bekannten Kompressibilität von Glas und Quecksilber läßt sich die des Öles auf dem gewöhnlichen elementaren Wege berechnen.

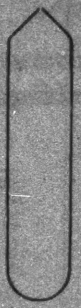


Fig. 14.

Versuche mit Druck von 50, 150 und 250 Atm. ergaben

$$51 \cdot 10^{-6} \pm 0{,}3 \cdot 10^{-6},$$

eine Veränderung bei steigendem Druck war nicht bemerkbar.

Was die Messung der Temperatur des Quecksilbers und des Öles in dem Röhrensystem anbelangt, so haben wir für das Quecksilber schon Gelegenheit gehabt, darauf hinzuweisen. Die in dem Holzbehälter abgelesenen Temperaturen nennen wir

$$t_2,\ t_3 \quad \text{und} \quad t_4.$$

Zugleich werden die Temperaturen in dem Glyzerinmantel bestimmt. Die letztere nennen wir

$$t_1 \quad \text{und} \quad t_5.$$

Außerdem wird die Zimmertemperatur an vier verschiedenen Punkten gemessen. Die Höhe findet man in der schematischen Zeichnung 15 angegeben. Die Temperaturen werden mit

$$t_6,\ t_7,\ t_9 \quad \text{und} \quad t_{10}$$

bezeichnet. Für t_2 wird die Temperatur der Druckwage eingesetzt. Aus der Stellung der Thermometer und der Länge der Röhren läßt sich sehr leicht die mittlere Temperatur des Quecksilbers ablesen.

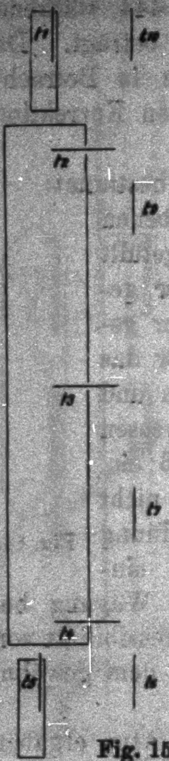


Fig. 15.

$$t_{\mathrm{Hg}} = \frac{9}{10}\left(\frac{t_2 + t_3 + t_4}{8}\right) + \frac{1}{10}\,t_6 + \frac{8}{100}\,(t_1 - t_5)$$

$$= \frac{t_2 + t_3 + t_4}{8} + \frac{1}{10}\left(t_6 - \frac{t_2 + t_3 + t_4}{8}\right) + \frac{8}{10}\,(t_1 - t_5).$$

Zur Abkürzung wird die Ableitung dieser Formel hier nicht wieder gegeben. Sie ist übrigens aus den Zahlen bei der Fig. 15 leicht zu ersehen.

Bei Beachtung der Tatsachen, welche bei den Beobachtungen mitgeteilt wurden, ersieht man, daß man für die Temperatur des Öles mit einer mindergroßen Genauigkeit auslangt. Es ist genügend genau, wenn man das arithmetische Mittel von t_6 bis t_{10} nimmt.

Die Genauigkeit.

Bei der Bestimmung der Einstellungsgenauigkeit wird gefunden, daß auf keine größere Genauigkeit $2^1/_2$ g nach beiden Seiten gerechnet werden kann. Da jetzt unser Apparat um so vieles komplizierter geworden ist, kann man diesen Wert wohl als die äußerst erreichbare Grenze ansehen. Ein störender Einfluß ist da noch die weniger schüttelsichere Aufstellung, da der Ventilator, der Luft in den Behälter bläst, stets eine leichte Bewegung verursacht.

Sicher werden wohl Kontakte gefunden werden, die eine bessere Übereinstimmung ergeben, doch wie schon oben erwähnt, muß das ausschließlich nur der besonderen guten Funktion des Platinkontaktes zugeschrieben werden. Diese können dann auch nicht als Grundlage genommen werden.

Nehmen wir an, daß unsere wirksame Quecksilbersäule eine mittlere Höhe von 485 cm hat, dann wird diese, da das Öl einen Gegendruck zeigt, eine nutzbare Belastung geben von

$$485\ (13{,}56 - 0{,}91)\ \text{g per qcm}$$

$$485 \cdot 12{,}65 = \pm\ 6100\ \text{g.}$$

Bei einem Fehlerminimum von $2^1/_2$ g kann also auf eine maximale Genauigkeit von $\frac{1}{2400}$ gerechnet werden.

Die Versuche.

Als Beispiel für unsere Beobachtungen führen wir unseren Versuch Nr. 274 mit dem Kontakt III—3 bei ungefähr 150 Atm. an.

Stand des Kolbens		1,9
Temperatur der Druckwage		18,9
Temperatur des Thermostaten		1,017 Beckmann
Nominalbelastung		
20 K. G.		19,9955
25	Nr. 1	24,996
25	2	24,999
25	3	24.996
25	4	25,002
10	1	9,9995
10	2	9,9985
2	1	1,999
0,100		0,100
Kolben		6,4655
Ölbehälter		0,798
		149,348
Korrektion der Temp. des Thermostaten auf 1,010		− 0,003
Barometer 760,4		0,0005
		149,3455
Kolbentemperaturkorrektion		0,0035
		149,342
Korrektion der Kolbenhöhe		0,001
		149,343
Belastung ohne die Quecksilbersäule		143,1555
		6,1875

Temperaturen		Temperaturen	
t_1	25,4	t_6	15,0
t_2	20,5	t_7	19,4
t_3	18,8	t_8	18,9
t_4	17,8	t_9	20,5
t_5	16,6	t_{10}	21,8

hieraus folgt für T_{Hg} 18,9 (aufgerundet auf $^1/_{10}$)

„ „ „ $T_{Öl}$ 19 („ „ $^1/_4$)

Spesifisches Gewicht Hg $\dfrac{13,54892}{(1 - 146,5 \cdot 3,9 \cdot 10^{-6}}$

13,5566 [1])

Spesifisches Gewicht des Öles $\dfrac{0,91154}{(1 - 143,5 \cdot 51 \cdot 10^{-6}}$

0,9184.

Nummer der belichteten Platte	104
Stand der obersten Platte	30,4
„ „ untersten „	4,1
	34,5
Abstand der Nullpunkte	4867,0
Höhe der Hg-Säule	4901,5 mm

Druck der Hg-Säule per cm²

490,5 (13,5566 − 0,9184) = 6194,6 g

Totale Belastungsvermehrung.

6187,5 = 6194,6 × wirksamer Durchmesser.

somit ist der wirkliche Durchmesser

$$\frac{6,1875}{6,1946} = 0,9985.$$

Auf diese Art werden mit jedem Kontakte verschiedene Beobachtungen gemacht und aus den Resultaten das Mittel gezogen. Die Ergebnisse sind folgende:

Bei 40,5 Atm.	0,99885	bei 100 Atm.	0,9989
59,5	0,9985	119	0,99915
70,5	0,9990	146	0,99915
95,5	0,9988	177,5	0,99885

Das gibt einen Mittelwert von

0,99885.

Die maximale Abweichung ist also 3, bzw. $3^1/_2$ oder die gefundenen Werte bleiben mit einer Genauigkeit von $\frac{1}{3000}$ konstant. Diese Abweichungen fallen aber ganz innerhalb der Fehlergrenze.

Folgerungen.

Als Folgerung daraus müssen wir bemerken: Innerhalb unserer Fehlergrenzen ist der wirksame Durchmesser keine Druckfunktion. Diese Genauigkeit ist $\frac{1}{3000}$.

Die Einstellungsgenauigkeit der Druckwage ist zumindest $\frac{1}{120,000}$.

---

1) 146,5 ist der mittlere Druck, worunter das Quecksilber steht.

Zum Schluß noch einige Bemerkungen: Vergleichen wir obenstehende Resultate mit den von C. A. Crommelin und E. I. Smid, dann ersieht man, daß unsere Abweichungen untereinander weit geringer sind. Bei den letztgenannten Verfassern war der Mittelwert des wirksamen Durchmessers bei demselben Exemplar

bei ungefähr	60 Atm.	0,99775,
„ „	100 „	0,9963,
oder ein Unterschied von		0,00145,

während bei unseren Beobachtungen ein Maximum von

0,00 065

gefunden worden ist.

Hätte uns eine höhere Hg-Säule zur Verfügung gestanden, dann wäre wohl eine größere Genauigkeit erreichbar gewesen. Versuche mit Druck über 180 Atm. sind von uns wohl probiert worden. Wir konnten aber keine guten Resultate erhalten, da die Glaskapillaren ständig sprangen. Da die Druckwage als Maximum 250 Atm. anzeigen kann, glaubten wir uns doch mit obenstehendem zufrieden geben zu dürfen.

Die Theorie.

Nach diesen experimentellen Ergebnissen drängt sich von selbst die Frage auf, wie das Obenstehende mit der Theorie in Einklang zu bringen ist. Wie wir schon erwähnt haben, war bis heute noch sehr wenig von einer solchen Theorie bekannt und auch jetzt scheint es noch, daß die Erscheinungen infolge der Deformation usw. zu verwickelt sind, um sie in einfache Grundlagen aufzulösen.

Da es nun aber feststeht, daß wir es nur mit Flüssigkeitsreibungen zu tun haben, läßt sich doch wohl das eine oder das andere näher beleuchten.

Die Kräfte, die ihre Wirkung auf den Kolben ausüben, lassen sich in drei Gruppen einteilen:

1. Rein hydrostatische Kräfte.
2. Reibungskräfte, durch die Flüssigkeit ausgeübt infolge der Strömungen zwischen den beiden Wänden.
3. Reibungskräfte infolge des Fallens des Kolbens.

Nehmen wir vorerst an, daß keine Deformation erfolgt, und daß Kolben und Führung zwei vollkommen zylindrische

Wände besitzen. Die Größe unter 1 ist der einfache hydrostatische Druck multipliziert mit dem Oberflächenunterschiede der beiden Kolbendurchschnitte. Diese Oberflächendifferenz wollen wir weiterhin F nennen. Wäre Kolben und Lager axial gelagert, dann ließe sich leicht beweisen, daß der unter 2 erwähnte Einfluß eine scheinbare Vermehrung von F zur Folge hat, wodurch der wirksame Diameter das arithmetische Mittel zwischen Kolben und Lagerdurchschnitt wird. Fig. 16 zeige einen Durchschnitt durch den Spalt, welche wir uns im Verhältnis zum Kolbendurchmesser sehr klein vorzustellen haben. Nennen wir die Spaltweite σ. Wir errichten nun ein Koordinatensystem mit dem Nullpunkt in dem halben Abstand zwischen Kolben und Lagerwand. Die x-Achse ist nach dem Zentrum gerichtet und die z-Achse parallel zur beschreibenden geraden. Wegen der Symmetrie können wir voraussetzen, daß in dem gezeichneten Durchschnitt die Geschwindigkeitsverteilung eine symmetrische ist in bezug auf die x-Achse. Betrachten wir ein Prisma mit den Abmessungen $2x$ (x auf jeder Seite vom 0-Punkt aus) der Breite dy und der Höhe dz.

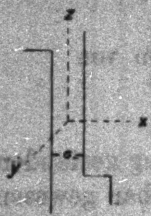


Fig. 16.

Der hierauf ausgeübte Druck ist

$$2x\,dy\,\frac{dp}{dz}\,dz$$

Als zweite Kraft wirkt noch die Reibung und zwar auf der linken und rechten Seitenfläche.

$$-\eta\,\frac{dv}{dx}\,dz\,dy$$

an beiden Seiten. Für stationäre Strömungen ist dann

$$2x\,dy\,\frac{dp}{dz}\,dz - 2\eta\,\frac{dv}{dx}\,dz\,dy = 0,$$

$$\eta\,\frac{dv}{dx} = x\,\frac{dp}{dz},$$

die auf dem Kolben ausgeübte Kraft

$$\varkappa = \int \eta\,\frac{dv}{dx}\,ds\,dr$$

s längs des Umfanges gemessen.

Setzen wir der Einfachheit halber η konstant (also unabhängig von dem Druck). Da wir es mit koaxialen Zylindern zu tun haben, können wir überall längs des Umfanges auf gleicher Höhe

$$\frac{d\,v}{d\,x}$$

gleich groß annehmen. Wir erhalten dann

$$K = \eta\, 2\pi R \int \frac{d\,v}{d\,x}\, d\,z$$

für die Kolbenwand ist

$$R = \tfrac{1}{2}\sigma$$

$$\eta\,\frac{d\,v}{d\,x} = \tfrac{1}{2}\sigma\,\frac{d\,p}{d\,x}\,.$$

Die auf den Kolben wirkende Kraft

$$K = 2\pi R \int \frac{1}{2}\sigma\,\frac{d\,p}{d\,x}\,d\,x$$

$$= \pi R \sigma p$$

der Druck gegen die Unterseite ist

$$p \cdot 0\,,$$

so daß die totale Kraft

$$p\,0 + \pi R \sigma p$$

$$p \pi R^2 + 2 R \sigma p$$

$$\pi p (R^2 + R\sigma)$$

mit großer Annäherung

$$p\,v\,(R + \tfrac{1}{2}\sigma)^2$$

wird.

Dasselbe erhalten wir natürlich auch für den dünnen Teil des Kolbens, so daß wir als wirksamen Durchmesser folgenden Wert finden.

$$\pi\,(R + \tfrac{1}{2}\sigma)^2 - \pi\,(r + \tfrac{1}{2}\sigma')^2\,.$$

Mutatis mutandis gilt dies aber auch für den Fall, daß Lager und Achse keine koaxiale Lage haben. Wir wollen als Beschränkung noch annehmen, daß beide Wände, zwischen denen die Flüssigkeit sich befindet, Zylinderflächen bilden (nicht Zirkelzylinder) mit parallellaufenden beschreibenden Geraden. Fig. 17 gibt einen senkrecht auf diese Geraden geführten

Schnitt wieder. Wir teilen nun die Fläche der Spalte (die Spalte ist sehr schmal) in kleine Rechtecke. Betrachten wir nun die Flüssigkeitssäule in so einem Stückchen mit der Breite ds und der Länge σ, dann kann man ebenso wie oben eine symmetrische Geschwindigkeitsverteilung annehmen. Wir finden dann gleichfalls

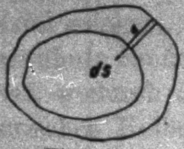


Fig. 17.

$$\eta \frac{dv}{dx} = x \frac{dp}{ds} \,.$$

Für die Kolbenwand ist

$$x = \tfrac{1}{2} \sigma \,.$$

Die längs ds auf dem Kolben ausgeübte Kraft ist wieder

$$\int ds\, dz\, \eta \frac{dv}{dx},$$

$$\int ds\, dz\, \tfrac{1}{2} \sigma \frac{dp}{dz},$$

$$\tfrac{1}{2} ds\, \sigma \int_0^p dp,$$

$$\tfrac{1}{2} p\, \sigma\, ds$$

oder für den ganzen Umfang

$$\int \tfrac{1}{2} p\, \sigma\, ds,$$

$$\tfrac{1}{2} p \int \sigma\, ds,$$

$$\tfrac{1}{2} p \int do,$$

$$p \cdot \tfrac{1}{2} \text{ Spaltoberfläche.}$$

Bemerkenswert ist es, daß bei unseren Resultaten die Viskosität aus der Formel wegfällt und sie also klarer Weise keine Rolle spielt.

Der dritte Einfluß beruht auf der Reibung der Flüssigkeit längs der Wand infolge des Senkens des Kolben selbst. Für diese Kraft können wir somit folgende Formel ableiten.

$$K = \int \eta \frac{v}{\sigma}\, ds\, dh \quad (v = \text{Fallgeschwindigkeit})$$

$$= \eta v \int \frac{ds\, dh}{\sigma} \,.$$

Eine gleichartige Formel finden wir für die Reibung bei der Drehung. Diese ist nämlich

$$\int \eta \frac{u}{\sigma}\, ds\, dh,$$

worin die Umfangsgeschwindigkeit u gleichzusetzen ist

$$u = R\omega,$$

also die Reibung

$$\int \eta \frac{R\omega}{\sigma}\, ds\, dh$$

wird.

Nun ist diese Kraft nicht leicht zu berechnen, wohl ihr Moment in Beziehung zur Achse; denn dieses ist das hemmende Moment, wovon schon in einer der früheren Arbeiten die Rede war. Das Gesamtmoment ist gleichzusetzen

$$M = \int \eta\, \omega \frac{R^2\, ds\, dh}{\sigma}$$

$$= \eta\, \omega R^2 \int \frac{ds\, dh}{\sigma}$$

setzen wir für

$$\int \frac{ds\, dh}{\sigma} = J,$$

dann wird

$$k = \eta v J,$$
$$M = \eta\, \omega R^2 J.$$

Bei der Druckwage nach **Schäffer** und **Budenberg** hat man aber mit zwei verschiedenen Durchmessern zu rechnen. Eigentlich sind es tatsächlich drei, da sich an der Unterseite der Druckwage noch ein Öllager befindet. Da dieses aber einen viel größeren Spielraum hat und die daraus berechneten Kräfte sehr klein erscheinen, kann man diesen Einfluß wohl vernachlässigen.

Die totale Reibungskraft in axialer Richtung ist somit

$$k = \eta v (J_1 + J_2)$$

und das Moment

$$M = \eta\, \omega (R^2 J_1 + r^2 J_2).$$

K, J_1 und J_2 sind unbekannt, so daß also die Gleichungen nicht auflösbar sind. Um eine Vorstellung von der ungefähren Größe dieser Kräfte zu erhalten, wollen wir annehmen, daß wir für R^2 und r^2 ihre Mittelwerte setzen können. Wenn die

Spaltweiten nicht sehr verschieden sind, was schwer anzunehmen ist, liefert folgende Gleichung ein in jeder Beziehung gutes Bild von der ungefähren Größe des Einflusses.

$$M = R r \eta \omega (J_1 + J_2),$$

$$\frac{k}{M} = \frac{v}{R r \omega}.$$

Nun setzen wir, da M der Winkelgeschwindigkeit proportional ist für

$$M = \varrho \omega$$

$$k = \frac{v}{R r} \varrho.$$

Für eine Temperatur von 12° bestimmten wir für ϱ schon früher (a. a. O.) einen Mittelwert von 700 g/qcm. Wir erhalten also

$$k = \frac{v}{R r} \cdot 700$$

Zur Berechnung von v wird die Zeit bestimmt, die der Kolben bei verschiedener Belastung notwendig hat, um eine gewisse Strecke zu fallen. Hierzu wird ein Abstand von 9 mm gewählt. Zu dem Zwecke wird auf der oberen Platte der Druckwage ein Kupferstäbchen aufrecht hingestellt. In der verlängerten Kolbenachse wird ein Splint senkrecht auf die Wand befestigt und nun beobachtet, wann das Kupferstäbchen durch den Splint umgeschlagen wird. Der Versuch wird mit einem zweiten 9 mm kürzeren Stäbchen fortgesetzt. Der Zeitverbrauch zwischen beiden ist die gesuchte Zeit. Die Resultate waren folgende:

Temperatur 12,4°.

Belastung (abgerundet)	Fallzeit		Belastung (abgerundet)	Fallzeit	
	Min.	Sek.		Min.	Sek.
6,5	32	42,4	226,5		59,2
26,5	8	53,6	201,5	1	7,6
51,5	4	32,8	176,5	1	17
76,5	2	59,2	151,5	1	29
101,5	2	16,6	126,5	1	44
126,5	1	46,6	101,5	2	11,2
151,5	1	27,8	76.5	2	56,2
176,5	1	16	51,5	4	22,2
201,5	1	6,6	26,5	8	28
226,5		59	6,5	31	9
251,5		56			

Bemerkenswert ist es, wie gut die Ausströmungsgeschwindigkeit der Belastung proportional ist. Nimmt man die Mittelwerte der beobachteten Zeiten und multipliziert diese mit der Belastung, dann erhält man folgende Werte:

Belastung	Produkt	Belastung	Produkt
6,5	12 500	151,5	13 400
26,5	13 300	176,5	13 500
51,5	13 800	201,5	13 500
76,5	13 500	226,5	13 400
101,5	13 600	251,5	14 100
126,5	13 300		

Mittelwert 13 450.

Man ersieht also, daß mit genügend genauer Annäherung v und somit auch K proportional der Belastung wird. Das hat nun zur Folge, daß man den Einfluß von K als eine Vergrößerung des wirksamen Diameters betrachten kann, der nun keine Druckfunktion ist. Daraus folgt weiter, daß der wirksame Diameter ein wenig größer ist, als der etwa durch Abmessung gefundene Betrag.

Die Bestimmung der Größenordnung ergab:

$$k = \frac{v}{Rr} 700\,,$$

oder in kg/cm

$$k = \frac{0{,}7\,v}{Rr}.$$

Die Vermehrung von F ist also

$$dF = \frac{k}{\text{Belastung}} = \frac{0{,}7\,v}{Rrp}\,,$$

da $v = \frac{0{,}9}{T}$ ist und in unserm Falle R ungefähr 0,8 cm und r etwa 0,57 cm ist, wird

$$dF = \frac{0{,}7\cdot 0{,}9}{0{,}8\cdot 0{,}57\cdot Tp}$$

$$= \frac{0{,}7\cdot 0{,}9}{0{,}8\cdot 0{,}57\cdot 13\,450} = \text{etwa } \underline{\frac{1}{10\,000}}.$$

Die Tatsache, daß die Größe $p \times T$ konstant ist, weist daraufhin, daß entweder nur eine sehr geringe Deformation der Spaltweise bei Druckerhöhung stattfindet, vereint mit einer geringeren Änderung der Viskosität, oder daß beide Einflüsse einander aufgeben.

Beachtung verdient, daß bei einer Änderung der Temperatur oder bei der Wahl einer anderen Flüssigkeit die Viskosität sich ändern wird, daß aber dies keinen Einfluß auf

dF hat. Denn mit einer Änderung der Viskosität ändert sich die Ausströmungsgeschwindigkeit des Öles und somit auch v; sowohl die Ausströmungsgeschwindigkeit aber wie v sind proportional der Viskosität. Andererseits ist, wie die Formel angibt, das Ordnungsmoment direkt proportional damit. Hieraus folgt die Unabhängigkeit der Größe k.

Wenn alle besprochenen Einflüsse aber unabhängig von der Viskosität sind, dann spielt auch die Ölsorte und die Temperatur des Öles keine Rolle für die Korrektion des wirksamen Diameters.

Einflüsse der Deformation bei Belastung.

Wir kommen zum Schlusse auf die Deformationseinflüsse bei steigendem Druck zu sprechen. Es mag wohl einigermaßen sonderbar erscheinen, daß wir von Formveränderungen sprechen, bevor wir die Einflüsse behandelt haben, welche eine Folge von dieser Form selbst sind; denn es nicht anzunehmen, daß unsere Zylinder eine ideale Form haben. Wir müssen aber zugeben, daß wir diese Frage nicht aufklären können. Gesetzt z. B. der Kolben und Zylinder habe eine einigermaßen tonnenartige Form, die nicht absolut symmetrisch zu sein braucht Fig. 18. Bei dieser Form verschwindet die Symmetrie in der Ölbewegung. Unsere Ableitung von dem wirksamen Diameter gilt dann nicht mehr, doch gleichzeitig verschwindet dann auch die Regelmäßigkeit in dem Verlauf des Druckabfalles in der Spalte und wird unberechenbar. Das hat wieder zur Folge, daß die Deformation, welche im ersten Falle mit genügender Annäherung dem Druck proportional gesetzt werden konnte, nicht mehr bestimmt werden kann. Wollen wir dann auch das Verhältnis kennen lernen zwischen unseren obenstehenden Ableitungen und den experimentellen Abmessungen, dann kann in dem Falle, daß ein nicht vollkommener Zylinder vorliegt, keine absolute Übereinstimmung herrschen.

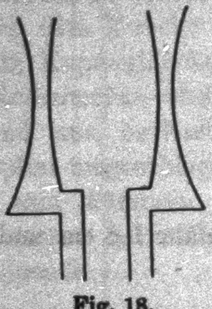


Fig. 18.

Doch kann eine Besprechung der Deformationseinflüsse auch bei solchen Zylindern einen Nutzen haben, da es sich doch nur um die Feststellung der Größenordnung der zu erwartenden Korrektionsglieder handelt. Wir können die Deformation einteilen in eine

a) Deformation des Kolbens,

b) Deformation der Zylinderwand.

Der Kolben ist zwei verschiedenen Formveränderungen unterworfen. Die einfachste ist die, welche durch die Gewichte entsteht, die an dem Kolben aufgehängt werden. Diese üben allein auf den untersten dünneren Teil einen Zug aus, welcher wieder im Horizontalschnitt eine Zusammenziehung zur Folge hat. Da diese Kraft in jeder Höhe gleich groß ist, soll auch jeder Durchschnitt eine gleiche Verminderung erfahren. Die Spaltweite wird dann um einen Betrag größer, der dieser Verminderung gleich ist. Der wirksame Durchschnitt vom untersten Teil des Kolben wird dann um die Hälfte dieses Wertes kleiner und somit der wirksame Diameter der Druckwage größer.

Nennen wir die Oberfläche vom Durchschnitt durch den untersten Kolbenteil vor der Ausdehnung 0 und danach 0′, dann ist der Zusammenhang zwischen 0 und 0′ durch die beFormel

$$0 = 0'\left(1 - \frac{2e}{m}\right)$$

gegeben, worin e die Größe der spez. Ausdehnung angibt. Ferner sei die Belastung P und der Elastizitätskoeffizient E, dann ist

$$e = \frac{P}{0 \cdot E},$$

der für Metalle $m = 10/3$ mg gleichgesetzt werden kann, finden wir somit

$$0' = 0\left(1 - \frac{6P}{10 \cdot 0 \cdot E}\right)$$

oder

$$0 - 0' = \frac{6P}{10E} = \frac{6pF}{10E}.$$

Die Oberfläche des Spaltes wird also um denselben Betrag größer und der Mittelwert zwischen Lager und Kolbendurchmesser um die Hälfte dieses Wertes kleiner. Da aber der wirksame Durchmesser der Unterschied des wirksamen Durchmessers des obersten und des untersten Kolbenteiles ist, wird dieser größer um den Betrag

$$\frac{3pF}{10E}$$

oder nach Substitution der Werte F und E

$$\frac{3}{10 \cdot 2{,}2 \cdot 10^6}\, p$$

für den Fall von 200 Atm. wird dies

$$\frac{0{,}6}{22\,000} \text{ oder rund } \frac{1}{40\,000},$$

was außerhalb unserer Beobachtungsmöglichkeit liegt.

Bei Bestimmung des Einflusses durch Zusammenpressen müssen wir die Tatsache mit in Rechnung ziehen, daß der Druckabfall längs der ganzen Spalthöhe nur allmählich stattfindet. Da wir ferner mit großer Annäherung die Zusammenpressung proportional dem Druck setzen können, können wir, etwas übertrieben vorgestellt, eine Spaltform erwarten, wie sie in Fig. 19 angegeben ist.

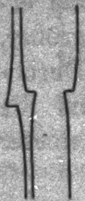


Fig. 19.

Nehmen wir an, daß rechts die Kolbenwand ist, dann ersieht man sofort aus der Figur, daß wir auf die schiefe Fläche einen hydrostatischen Druck erwarten können, welcher eine Komponente in vertikaler Richtung liefert.

Ist bei unseren Beispielen der Druck in Δp und nehmen wir an, daß der Druckverlauf an jeder Kolbenseite der gleiche ist, dann erhalten wir in der Höhe von Δ eine vertikale Komponente.

$$K_z = p\, 2\pi R \frac{dR}{dh}$$

(l der Wand entlang nach oben gemessen.)

Mit sehr großer Annäherung können wir nun

$$dl = dz$$

gleichsetzen und also

$$K_z = p\, 2\pi R \frac{dR}{dz}$$

setzen wir ferner

$$dR = \left(\delta R \frac{dp}{dz}\right) dr,$$

dann wird

$$K_z = p\, 2\pi R\, \delta R \frac{dp}{dz}\, dz.$$

Für die gesamte vertikale Komponente erhalten wir dann

$$\int p\, 2\pi R\, \delta R \frac{dp}{dz}\, dz.$$

Nennen wir den Druck unter dem Kolben t_m, dann sind die Integrationsgrenzen 0 und P_m.

$$2\pi R^2 \delta \int_0^{p_m} p\, dp$$

$$\pi R^2 \delta p_m{}^2 .$$

Da die Kraft, gegen den Kolben ausgeübt,

$$p_m \pi (R - \delta p_m R)^2$$

ist, wird somit der Gesamtdruck

$$\pi R^2 \delta p_m{}^2 + p_m \pi (R - \delta p_m R)^2 .$$

Gleichzeitig finden wir für den untersten Kolbenteil für die nach unten gerichtete Kraft

$$\pi r^2 \delta p_m{}^2 + p_m \pi (r - \delta p_m r)^2 .$$

Die vertikale Gesamtkraft ist somit bei Vernachlässigung von δ^2

$$\begin{aligned} &\pi R^2 p_m (1 - \delta p_m) - \pi r^2 p_m (1 - \delta p_m) \\ &= (\pi R^2 - \pi r^2) p_m (1 - \delta p_m) \\ &= F p_m (1 - \delta p_m) \end{aligned}$$

und somit der wirksame Diameter

$$F' = F(1 - \delta p_m) .$$

Für die Bestimmuug von δ gilt folgendes. Angenommen, auf einen Block (Fig. 20) würden zwei Druckkräfte p in der Richtung x, bzw. $= x$ einwirken. Die Folge davon ist einerseits eine Zusammenpressung in dieser Richtung, andererseits eine Ausdehnung in der y-Richtung nach der Formel

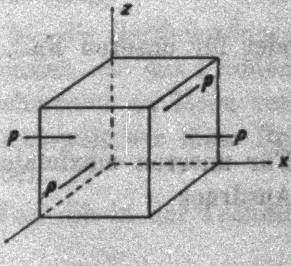


Fig. 20.

$$l_y' = l_y \left(1 + \frac{\alpha p}{m}\right),$$

worin

$$\alpha = \frac{1}{E} .$$

Wirken aber auch in der y-Richtung Druckkräfte p, dann findet auch hier eine Zusammenpressung statt. Zusammengefaßt erhält man dann

$$l_y' = l_y\left(1 + \frac{\alpha p}{m}\right)(1 - \alpha p),$$

was wir gleich setzen können dem Ausdruck

$$l_y(1 - \delta p).$$

Mit Vernachlässigung der Größen zweiter Ordnung

$$l_y\left(1 - \alpha p + \frac{\alpha p}{m}\right) = l_y(1 - \delta p)$$

ist dann

$$\delta = \frac{m-1}{m}\alpha.$$

Oben schon haben wir angemerkt, daß

$$m = \frac{10}{3};$$

somit ist

$$\delta = \frac{7}{10}\alpha$$

und wir erhalten als Endformel

$$F' = F\left(1 - \frac{7}{10}\frac{p}{E}\right).$$

Die Verminderung des wirksamen Durchmessers ist somit

$$F - F' = \frac{7}{10}\frac{p}{E}F$$

oder für unseren Fall, da $F = 1$

$$\frac{7p}{2{,}2 \cdot 10^7}.$$

Für unseren maximalen Druck von 200 Atm. ist dann dieser Ausdruck

$$\text{etwa } \frac{1}{15\,000}.$$

Diese Korrektion fällt sicher außerhalb unserer Beobachtungsmöglichkeit.

Einfluß der Druckerhöhung auf die Zylinderwand.

Mit der Wirkung, die eine Druckerhöhung auf die Zylinderwand ausübt, ist es nicht so einfach bestellt. Wäre sie symmetrisch zur Deformation des Kolbens, dann bliebe das Mittel zwischen Kolben und Lager durchschnittlich gleich.

Dies ist aber sicherlich nicht zu erwarten, außerdem ist die Bestimmung der Deformation des Zylinders nicht so einfach durchzuführen. Vorerst ist doch der Außendurchschnitt nicht kreisförmig und dann sind auch die im oberen und unteren Teile wirkenden Kräfte nicht gleich groß. Wirkt doch auf den oberen Teil nur eine lotrechte Kraft auf die Vertikalwand, welche die Borung zu vergrößern trachtet, während auf den untersten Teil noch ein axial-vertikaler Druck ausgeübt wird und zwar auf die kleine Fläche *a—b* in Fig. 21.

Wir wollen nun versuchen, das Problem in seiner allgemeinen Form zu lösen und nehmen an, daß ein vorläufig nicht näher bestimmter axialer Spannungsvektor vorhanden ist.

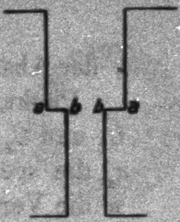


Fig. 21.

Noch schwieriger ist die Frage, die den nicht kreisförmigen Außenrand berührt. Ich glaube, daß das der einzige Punkt ist, bei dem vom theoretischen Standpunkt aus eine Bemerkung für die Konstruktion der Druckwage gemacht werden kann. Mit vollen Rechte hat denn auch die Firma **Schäffer & Bubenberg** für die Druckwage, die für einen höheren Druck (5250 Atm.) eingerichtet ist, einen runden Durchschnitt gewählt. Für die Druckwage von 250 Atm. hielt sie es wohl nicht für nötig.

Da es uns aber nur darum zu tun ist, die Größenordnung des Korrektionsfaktors zu bestimmen, werden wir das Problem vorläufig für einen kreisförmigen Durchmesser zu lösen versuchen und dann wollen wir sehen, inwieweit wir diese Resultate für unseren Fall brauchen können.

Nun bekommt unser allgemeiner Fall die in der Technik wohl bekannte Form.

„Zum bestimmen ist der Einfluß des Druckes und der axialen Spannung auf einen dickwandigen Zylinder.“

Nennen wir die Spannung in den drei Hauptrichtungen, die hier mit der radialen, axialen und tangentialen zusammenfallen

$$Sr, \quad Sa \quad \text{und} \quad St,$$

dann wird die Auflösung durch folgende Gleichungen gegeben (siehe u. a. **Klopper**, Leerboek der toegepaste Mechanica).

$$S_a = A\{(m-1)e_a + 2C_1\}$$

$$S_r = A\left\{mC_1 - (m-2)\frac{C_2}{x^2} + e_a\right\}$$

$$S_t = A\left\{mC_1 + (m-2)\frac{C_2}{x^2} + e_a\right\}$$

$$u = C_1 x + \frac{C_2}{x},$$

worin

$$A = \frac{mE}{(m-2)(m+1)},$$

x der Abstand vom Achsenzentrum bis zu dem betrachteten Punkt,

C_1 und C_2 Integrationskonstante,

e_a die spezifische Längenveränderung in axialer Richtung,

u die Verschiebung des entsprechenden Punktes in axialer Richtung sind.

Die Größen C_1, C_2 und e_a sind aus den Grundbedingungen leicht zu ersehen.

Der Vollständigkeit halber folge hier die Ableitung, wobei wir uns hauptsächlich nach dem erwähnten Werk von J. Klopper richten. Nennen wir

$$\frac{dl}{l}$$

die spezifische Längsveränderung e. Wählen wir ferner ein Volumelement, dessen Seiten den Hauptspannungsachsen parallel sind, dann wird die Veränderung der Länge in radialer Richtung verursacht durch die Spannung in dieser Richtung und es kommt ihr der Wert zu, S_r/E. Außerdem wirkt die Zusammenziehung mit, die eine Folge der Spannungen S_a und S_t ist, mit den respekt. Werten.

$$\frac{1}{m}\,\frac{S_a}{E} \quad \text{und} \quad \frac{1}{m}\,\frac{S_t}{E},$$

so daß

$$e_r = \frac{S_a}{E} - \frac{1}{m}\,\frac{S_t}{E} - \frac{1}{m}\,\frac{S_a}{E}$$

wird und zugleich

$$e_t = -\frac{1}{m}\,\frac{S_a}{E} + \frac{S_t}{E} - \frac{1}{m}\,\frac{S_a}{E}$$

$$e_a = \frac{1}{m}\,\frac{S_a}{E} - \frac{1}{m}\,\frac{S_t}{E} + \frac{S_a}{E};$$

eliminieren wir hieraus auf die gewöhnliche Weise S_a, S_r und S_t, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} S_r &= A\{(m-1)e_r + e_t + e_a\} \\ S_t &= A\{e_r + (m-1)e_t + e_a\} \\ S_a &= A\{e_r + e_t + (m-1)e_a\}, \end{aligned}$$

worin

$$A = \frac{mE}{(m-2)(m+1)}\,.$$

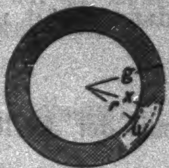


Fig. 22.

Betrachten wir in Fig. 22 einen Durchschnitt durch die Zylinderwand lotrecht auf die beschreibende Gerade und zwar in dem besonderen Punkte x, der durch die Zusammendrückung eine Verschiebung u erlitten hat; dann ist

$$e_r = \frac{du}{dx}$$

$$e_t = \frac{2\pi(x+u) - 2\pi x}{2\pi x} = \frac{u}{x}$$

da e_a überall gleich groß ist. Die Substitution ergibt:

$$\begin{aligned} S_r &= A\left\{(m-1)\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} + e_a\right\} \\ S_t &= A\left\{\frac{du}{dx} + (m-1)\frac{u}{x} + e_a\right\} \\ S_a &= A\left\{\frac{du}{dx} + \frac{u}{x} + (m-1)\,e_a\right\}. \end{aligned}$$

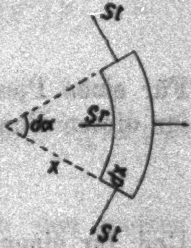


Fig. 23.

Hierzu können wir noch die Gleichgewichtsbedingung fügen. Fig. 23 sei ein Volumelement mit der Höhe dl. Die Kräfte auf die gebogenen Seitenflächen sind:

$$-S_r\,dl\,x\,d\alpha$$

bzw.

$$\left\{S_r + \frac{\partial S_r}{\partial x}dx\right\}dl(x+dx)\,d\alpha,$$

während die in die Komponenten zerlegten Kräfte auf die Seitenfläche in radialer Richtung den Wert liefern

$$-S_t\,dl\,dx\,d\alpha,$$

so daß

$$-S_r\,dl\,x\,d\alpha + \left(S_r + \frac{\partial S_r}{\partial x}\,dx\right) dl(x+dx)\,d\alpha - S_t\,dl\,dx\,d\alpha = 0$$

$$-S_r x + \left(S_r + \frac{\partial S_r}{\partial x}\,dx\right)(x+dx) - S_t\,d\alpha = 0,$$

oder mit Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$S_t - S_r - x\frac{\partial S_r}{\partial x} = 0.$$

Setzt man hierin die gefundenen Werte von S_r und S_t ein, dann erhält man die Gleichung

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{u}{x} = 0$$

mit der Auflösung

$$u = C_1 x + \frac{C_r}{x}.$$

Eine Substitution in die Gleichung der Spannungskoeffizienten liefert obenstehende Resultate.

Nehmen wir als Radius des äußeren Umfanges ϱ, als axiale Belastung P, als Innendruck p und Außendruck 0, dann ergibt die erste Gleichung nach Bestimmung der Integrationskonstanten

$$\frac{P}{A} = 2\,C_1 + (m-1)\,e_a.$$

Für einen Punkt an dem inneren Umfang ist $S = -p$, so daß für diesen Punkt die zweite Gleichung lautet.

$$-\frac{p}{A} = m\,C_1 - (m-2)\frac{C_2}{R_2} + e_a.$$

Und für einen Punkt des äußeren Umkreises, wo die radiale Spannung gleich 0 ist,

$$0 = m\,C_1 - (m-2)\frac{C_2}{\varrho^2} + e_a.$$

Nun haben wir drei Gleichungen zur Bestimmung der noch unbekannten Konstanten.

Die Berechnung ergibt (mit Substitution der Werte von A)

$$C_1 = \frac{m-1}{m\,E}\,\frac{R^2}{\varrho^2 - R^2}\,p - \frac{1}{m\,E}\,P,$$

$$C_2 = \frac{m+1}{m\,E}\,\frac{\varrho^2 R^2}{\varrho^2 + R^2}\,p.$$

Für den obersten Teil der Druckwage ist P gleich 0, so daß die Gleichungen folgende Werte annehmen.

$$C_1 = \frac{m+1}{mE} \frac{R^2}{\varrho^2 - R^2} p,$$

$$C_2 = \frac{m+1}{mE} \frac{\varrho^2 R^2}{\varrho^2 - R^2} p.$$

Für den untersten Teil ist P gleich dem Druck — p multipliziert mit der Oberfläche, worauf dieser Druck ausgeübt wird und geteilt durch die Fläche des Durchschnittes, der die Kraft überträgt. l. c. ist die erste Oberfläche 1, die zweite ist

$$\pi(\varrho^2 - r^2),$$

so daß wir für P schreiben können (R ist durch r ersetzt)

$$C_1 = \frac{m-1}{mE} \frac{r^2}{\varrho^2 - r^2} p + \frac{1}{mE} \frac{1}{\pi(\varrho^2 - r^2)} p,$$

$$C_2 = \frac{m-1}{mE} \frac{\varrho^2 r^2}{\varrho^2 - r^2} p.$$

Substitution in die Gleichung

$$u = C_1 x + \frac{C_2}{x}$$

ergibt

$$u = \frac{1}{mE} \frac{R^2}{\varrho^2 - R^2} \left\{ (m-1) R^2 + (m+1) \varrho^2 \right\} p$$

für die oberste Spalte und

$$u = \frac{1}{mE} \frac{r^2}{\varrho^2 - r^2} \left\{ (m-1) r^2 + (m+1) \varrho^2 \right\} p + \frac{1}{mE} \frac{r}{\pi(\varrho^2 - r^2)} p$$

für die unterste.

Die Oberfläche des Durchschnittes durch den ganzen Zylinder war in unserem Falle 42 qcm, was einem $\varrho = 3{,}65$ cm entsprechen würde. Setzen wir zur Bestimmung der Größenordnung diese Werte für ϱ ein, ferner für

$$r = 0{,}57$$

$$R = 0{,}8$$

$$m = \frac{10}{3}$$

$$E = 2{,}2 \cdot 10^6,$$

dann finden wir für den unteren Teil

$$u = \frac{p}{2{,}9 \cdot 10^6}.$$

Man ersieht aus der Rechnung, daß das letzte Glied der Formel, die den Einfluß der axsialen Spannung angibt, eine Größe von höchstens 1/200 des ersten Gliedes erreicht.

Für den obersten Teil der Spalte liefert die Substitution

$$u = \frac{p}{2{,}0 \cdot 10^6}.$$

In Anbetracht des sehr geringen Wertes können wir sagen, daß der nicht kreisförmige Durchschnitt keinen merkbaren Unterschied ergeben kann. Bemerkt muß hierbei noch werden, daß die Ableitung nur da gilt, wo der volle Druck p herrscht. Wenn wir in der ganzen Spalthöhe der Wirkung nachgehen wollten, dann würde die Gleichung

$$P = \frac{-p \cdot 1}{\pi(\varrho^2 - r^2)}$$

nicht mehr gelten.

Oben haben wir aber schon erwähnt, daß der Einfluß von P so gering ist, daß er in unserem Falle nur 1/200 des totalen Wertes ausmacht, was bei 200 Atm. gar nur mehr etwa 1/6 000 000 gibt.

Wir können ihn also getrost vernachlässigen, so daß wir eine Ausdehnung der Zylinderwand erhalten und wir früher schon beschrieben haben, eine Zusammenpressung des Kolbens, die überall proportional dem Drucke sind. Dieser fällt langsam von seinem maximalen Werte bis zu 1 Atm. Wir könnenalso eine in Fig. 24 angegebene Spaltform erwarten, wobei aber die Mittellinie nicht vertikal zu stehen braucht.

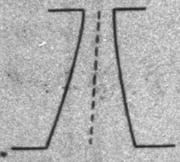


Fig. 24.

Diese Formveränderung hat nur einen Einfluß auf die Reibung des bei der Kolbenstange austretenden Öles. Wir wollen hier absehen von der Arbeit, die notwendig ist für die Beschleunigung des Öles in dem stets enger werdenden Spalt. Hierzu sind wir wegen der geringen in Betracht kommenden Maße berechtigt. Wir können dann sagen, daß die Reibungskraft gleich ist

$$\iint ds\, dz\, \tfrac{1}{2} \sigma \frac{dp}{dx} = \tfrac{1}{2} \int\limits_{\text{Umfang}} \int\limits_0^p \sigma\, ds\, dp.$$

Nun ist aber σ von der Höhe nicht mehr abhängig, während auch p von h abhängt.

Nehmen wir deshalb für σ die Spaltbreite für b) gleich 0, dann können wir für die örtliche Spaltweite setzen

$$\sigma + \lambda p,$$

so daß für die Reibung sich der Ausdruck ergibt,

$$\tfrac{1}{2}\int\limits_{\text{Umfang}} \int\limits_{0}^{p} (\sigma + \lambda p)\, d\, s\, d\, p$$

$$\tfrac{1}{2}\int\limits_{\text{Umfang}} \{\sigma p + \tfrac{1}{2}\lambda p^2\} d\, s$$

$$\tfrac{1}{2} p \int\limits_{\text{Umfang}} \{\sigma + \lambda p\} d\, s + \tfrac{1}{2} p \int\limits_{\text{Umfang}} \sigma\, d\, s$$

$\frac{1}{2} p$ (weiteste Spaltöffnung + kleinste Spaltöffnung).

Nun ist die kleinste Spaltoberfläche für den Druck 0, während die größte Spaltfläche gleichzusetzen ist demselben Wert vermehrt um die durch die Druckerhöhung bedingte Erweiterung an der Stelle des maximalen Druckes.

Die Wirkung kommt also auf eine Vermehrung des Einflusses der Flüssigkeitsströmung hinaus, und hat einen Betrag von $\frac{1}{2} p$ größte Spaltoberflächenvermehrung, so daß wir eine scheinbare Vergrößerung des Kolbendurchschnitts in dieser Größe erhalten. Für den obersten Teil gibt dieses als Vergrößerung des Radius des Lagers

$$\frac{p}{2{,}0 \cdot 10^6}$$

oder

$$\frac{p}{2{,}0 \cdot 10^6 \cdot 0{,}8} R$$

und somit für die Oberfläche

$$2 \frac{p}{2{,}0 \cdot 10^6 \cdot 0{,}8} \text{ mal ursprüngliche Oberfläche}$$

$$= \frac{p}{8 \cdot 10^5} \pi R^2 .$$

Wie wir schon früher erwähnt haben, wird die Verminderung der Oberfläche des Kolbendurchschnittes

$$\frac{7}{2{,}2 \cdot 10^7} p \text{ mal ursprüngliche Oberfläche,}$$

somit die Vermehrung der Oberfläche der Spaltbreite

$$\left(\frac{7}{2{,}2\cdot 10^7}+\frac{1}{8\cdot 10^5}\right)p\cdot\pi R^2=\frac{p}{6{,}87\cdot 10^{15}}\pi R^2.$$

Für den untersten Teil nimmt dies den Wert an

$$\left(\frac{2}{2{,}9\cdot 10^6\cdot 0{,}57}+\frac{7}{2{,}2\cdot 10^7}\right)p\,\pi r^2=\frac{p}{6{,}54\cdot 10^5}\pi r^2,$$

so daß eine Vergrößerung des wirksamen Durchmessers entsteht:

$$\tfrac{1}{4}\left\{\frac{\pi R^2}{6{,}87\cdot 10^5}-\frac{\pi r^2}{6{,}54\cdot 10^5}\right\}p$$

oder rund

$$\frac{p}{2{,}5\cdot 10^6}:$$

bei 200 Atm.

$$\frac{1}{25000}.$$

Zusammenfassung.

Zusammenfassend finden wir also: Der wirksame Durchmesser ist das Mittel der Diameter vom Lager und Kolben.

Infolge des Sinkens des Kolbens entsteht eine scheinbare Diametervergrößerung, die aber unabhängig vom Druck ist.

$$dF=\frac{v\cdot 0{,}7}{R\,r\,p}.$$ [1]

In unserem Falle rund $\frac{1}{10000}$, außerdem mußten die folgenden Korrekturen angebracht werden, die nun wohl Druckfunktionen sind.

a) scheinbare Diametervergrößerung durch die Ausdehnung des unteren Kolbenteiles mit dem Werte

$$\frac{3p}{2{,}2\cdot 10^7},$$

b) scheinbare Diameterverminderung durch Zusammenpressen des Kolbens in der Größe von

$$\frac{7p}{2{,}2\cdot 10^7},$$

---

[1] Unabhängig vom Druck, da auch v proportional p ist.

c) scheinbare Diametervergrößerung durch Zunahme der Spaltoberfläche

$$\frac{p}{2{,}5\cdot 10^6};$$

also im ganzen eine Zunahme

$$\frac{p}{2{,}5\cdot 10^6}-\frac{7\,p}{2{,}2\cdot 10^7}+\frac{3\,p}{2{,}2\cdot 10^7}=\left(4-\frac{7}{2{,}2}\right)\frac{p}{10^7}$$

$$=\frac{4{,}8}{2{,}2}\,\frac{p}{10^7}=\frac{p}{4{,}6\cdot 10^6},$$

oder für den Maximalfall von 200 Atm.

$$\frac{200}{4{,}6\cdot 10^6}=\frac{1}{23\,000},$$

was sicher außer unserer Beobachtungsmöglichkeit fällt.

Aus diesen Angaben kann man einen Schluß ziehen über die in jeder Hinsicht tadellose Funktion der Druckwage nach **Schäffer & Budenberg**. Im Prinzip kann man es durch gute Wahl der Kolbenabmessungen noch über die jetzt schon erreichte Genauigkeit von 1/23 000 bringen.

Amsterdam, 14. Mitteilung von Resultaten bei Untersuchungen für den „van der Waals-Fonds“.

(Eingegangen 14. September 1923.)

5. *Über eine neue Messung des Strahlungsdrucks*[1];

von Alice Golsen.

Im Jahre 1918 veröffentlichte **Ehrenhaft** seine Arbeit über Photophorese, in der er es unternommen hat, im Gegensatz zu den vorangegangenen Arbeiten von **Lebedew** und **Nichols** und **Hull**, die Druckkraft des Lichts in ihrer Einwirkung auf kleine Teilchen von der Größenordnung 10^{-11} bis 10^{-17} mm³ zu untersuchen. Er fand dabei bekanntlich, daß es Teilchen gibt, die dem Lichtstrahl entgegenwandern, und schloß daraus, daß es sich hierbei um eine bisher noch unbekannte Kraftwirkung des Lichtes auf die Materie handelt. Da es nach den herrschenden Theorien[2] ausgeschlossen erscheint, daß ein Teilchen, das unter der Einwirkung eines Lichtstrahls steht, einen der Richtung des Energiestroms entgegengesetzten Impuls erhält, lag es nahe, die Ursache für diese Erscheinung im umgebenden Medium zu suchen, den „negativen" Lichtdruck also auf das Vorhandensein eines Radiometereffekts zu schieben.

In der Tat beobachteten dann auch **Gerlach** und **Westphal**[3] und **Gerlach**[4] an Radiometern besonderer Art negative Effekte.

Während der Grund für den negativen Radiometereffekt in den Versuchen von **Gerlach** und **Westphal** noch nicht aufgeklärt werden konnte, zeigte **Gerlach** einen auf optischen Ursachen beruhenden negativen Effekt auf. **Laski** und **Zerner** sowie **Rubinowicz** machten es wahrscheinlich, daß von ihnen berechnete negative Radiometerwirkungen bei der **Ehrenhaft**schen Versuchsmethode zur Beobachtung gelangen können.

Bei diesen neuen Radiometermessungen, besonders aus den

---

[1] Vorl. Mitteilung: W. **Gerlach** u. A. **Golsen**, Zeitschr. f. Phys. 15. S. 1. 1923.

[2] Vgl. W. H. **Westphal**, Jahrb. d. Rad. u. El. 18. S. 81. 1921.

[3] Vgl. W. **Gerlach** u. W. H. **Westphal**, Verh. d. D. Phys. Ges. 21. S. 218. 1919.

[4] Vgl. W. **Gerlach**, Zeitschr. f. Phys. 2. S. 207. 1920.

Messungen von Westphal, ergab sich, daß im Druckbereich, bei welchem Lebedew[1]) seine klassische Messung des Strahlungsdrucks ausgeführt hat, mit der Anwesenheit beträchtlicher Radiometereffekte zu rechnen ist. Dies ergab sich dann auch bei erneuten Versuchen, und zwar zeigten sich bei Drucken von etwa 10^{-4} mm Hg und unterhalb dieser Grenze stets positive Radiometereffekte, gleichgültig ob bei höheren Drucken negative oder positive Ausschläge beobachtet waren. In der Tat gingen auch die Gerlach-Westphalschen negativen Kurven unterhalb eines gewissen für jedes Radiometer eigentümlichen Druckes in positive Radiometerkurven über.

Auf Grund dieser Erfahrungen wurde unter Leitung von Hrn. Professor Dr. Walther Gerlach eine neue Messung des Strahlungsdrucks mit Radiometern durchgeführt.

Der Gedankengang war dabei folgender:

Der Radiometereffekt ist eine Funktion des Druckes und zwar zeigen die Radiometerkurven nach Westphal mit guter Übereinstimmung folgendes Verhalten:

Die Funktion erreicht ein Maximum bei einem Druck von etwa $2 \cdot 10^{-2}$ mm Hg und wird durch eine weitgehend symmetrische Kurve dargestellt.

Kann man zu einer Druckgrenze gelangen, wo die Einwirkung des umgebenden Mediums aufhört, so muß, wenn ein Strahlungsdruck vorhanden ist, sich ein vom Druck unabhängiger „Restausschlag“ einstellen, die Kurve muß dann parallel zur Druckachse verlaufen.

Die bei den vorliegenden Messungen verwandte Apparatur entspricht im Prinzip der Anordnung, die Lebedew vor 20 Jahren in seinen klassischen Versuchen angewandt hat.

Zur Messung des Druckes diente eine Drehwage.

Eine große Reihe von Versuchen führte nicht zum Ziel. Messungen an einer Drehwage mit Flügeln aus Metallfolie, von denen der eine blank, der andere berußt waren, zeigten, daß durch die Absorption am berußten Flügel schon die geringste direkte oder indirekte Strahlungsmenge genügte, um die Messung am blanken Flügel zu verwirren.

Es wurden daher nur noch zwei gleichartige blanke Flügel oder besser *ein* blanker Flügel mit Gegengewicht an der Drehwage angebracht.

---

[1]) P. Lebedew, Ann. d. Phys. 6. S. 433. 1901. Ostwalds Klassiker Bd. 188.

Eine weitere Schwierigkeit lag in der Beschaffung einer Lichtquelle mit ausreichender und möglichst konstanter Energiemenge.

Erst die uns von Hrn. Prof. Pirani freundlichst überlassenen Wolframbogenlampen genügten beiden Anforderungen.

Bau und Konstanten der Drehwage.

An einem dünnen Glasstäbchen, das einen Spiegel vom Gewicht 48,0 mg zur Beobachtung trug, waren Querarme aus sehr dünnem, hart gezogenem Platindraht befestigt. Um die Vorder- und Rückseite der Flügel möglichst gleichartig zu gestalten, wurde die Folie mittels dünner Laschen an den Platindraht angeklemmt und nicht mehr, wie bei den ersten Versuchen, mit Schellack auf die Querarme aufgekittet.

Es wurden drei verschiedene Metallfolien verwendet:

Platin	Dicke	7 μ
Nickel	„	10 μ
Aluminium	„	15 μ

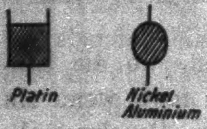


Fig. 1.

Die Form der Flügel zeigt Fig. 1.

Das System hing an einem Quarzfaden von 9—10 μ Durchmesser und 8 bis 11 cm Länge, angekittet mit einer Spur Schellack.

Von komplizierter Flügelkonstruktion, wie sie Hull in geistreicher Weise zur Vermeidung von Radiometereffekten angibt, wurde abgesehen, weil hierdurch Schwierigkeiten bei der Evakuierung entstehen, eine vollständige Vermeidung der Radiometereffekte aber durch sie doch nicht gewährleistet ist. Auch die Bestimmung des Reflexionsvermögens eines solchen Flügels bereitet Schwierigkeiten.

Der Durchmesser der Flügel und ihr Abstand von der Drehachse wurde mit Zeisskomparator bestimmt und daraus der Hebelarm berechnet.[1]

Die Direktionskraft wurde auf die übliche Weise aus Schwingungen ermittelt. Als Zusatzgewicht diente eine Glimmerscheibe von 10,0 mm Durchmesser und 88,6 mg Gewicht, die an dem unteren Ende des dünnen Glasstäbchens mit einer Spur Schellack befestigt wurde.

---

[1] Über eine andere Bestimmung des Hebelarmes vgl. S. 639.

Für die verschiedenen Systeme ergab sich folgende Direktionskraft D und Empfindlichkeit e pro 1 mm Skt.:

Platinsystem: $D = 3{,}31 \cdot 10^{-3}$ Dyn cm
$e = 7{,}2 \cdot 10^{-7}$ Dyn cm/mm Skt.
Nickelsystem: $D = 1{,}09 \cdot 10^{-3}$ Dyn cm
$e = 2{,}39 \cdot 10^{-7}$ Dyn cm/mm Skt.
Aluminiumsystem: $D = 4{,}03 \cdot 10^{-3}$ Dyn cm
$e = 8{,}89 \cdot 10^{-7}$ Dyn cm/mm Skt.

Die Empfindlichkeit des **Lebedew**schen Systems war etwa 5 mal kleiner als die des Nickelsystems.

Beschreibung der Apparatur.

Das Beobachtungsgefäß ist eine Glaskugel *Gl* von 20 cm Durchmesser mit 3 horizontalen und 2 vertikalen Ansätzen.[1])

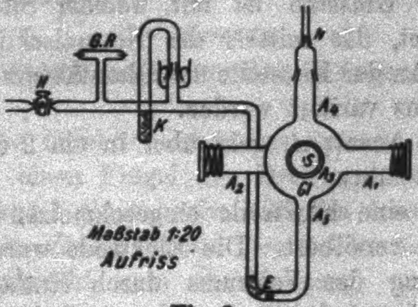

G.R
H
K
A₄
S
A₃
A₂
Gl
A₁
A₅
E
Maßstab 1:20
Aufriss

Fig. 2.

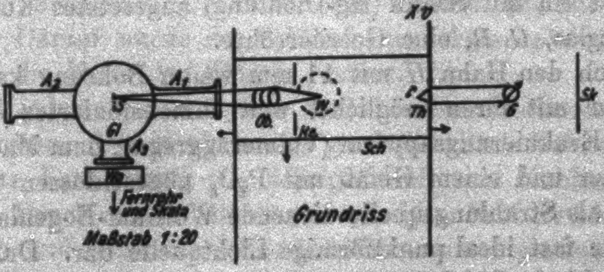

XV
A₂
A₁
S
Gl
A₃
Ha
Ob
W
Ke
C
Th
G
Sk
Sch
Fernrohr und Skala
Maßstab 1:20
Grundriss

Fig. 3.

Die 6 cm weiten horizontalen Ansätze sind an den Enden plan geschliffen und mit Spiegelglasplatten verschlossen.

---

[1]) Von **Hanff** u. **Buest** in Berlin hervorragend gut ausgeführt.

Das Aufkitten der Glasplatten geschah in folgender Weise: Um die großen Planschliffe bei der Erwärmung möglichst nicht zu gefährden, wurden die Rohrenden mit in Asbest dicht eingepacktem elektrischem Widerstandsdraht umwickelt und langsam auf die Schmelztemperatur des Siegellacks erhitzt. Durch diese gleichmäßige Erwärmung war es möglich, mit einem Minimum von weißem Siegellack (die Schicht war durchsichtig) die Platten vollkommen luftdicht aufzukitten.

Durch die 15 cm langen Ansätze A_1 und A_2 wird die Ein- und Austrittsstelle der Lichtstrahlen in beträchtliche Entfernung von dem System verlegt. Der Ansatz A_3 dient zur Beobachtung der Drehung des am System befestigten Spiegels mit Fernrohr und Skala.

Der vertikale Ansatz A_4 trägt einen 4 cm weiten Schliff, durch den die Drehwage eingelassen werden kann. Der Quarzfaden des Systems ist mit Schellack an einem Glasstab befestigt. Dieser Glasstab ist mit weißem Siegellack in ein Rohr eingekittet, das mittels des Normalschliffes *N* gedreht werden kann. An der Kittstelle des Glasstabes kann die Höhenlage des Systems variiert werden.

Der untere Ansatz A_5 geht über in ein 2 cm weites Rohr, das zur Pumpe führt.

Bei *E* ist eine Elektrode eingeschmolzen und das Knie innen chemisch versilbert. Die Elektrode wurde geerdet, um bei der Prüfung des Vakuums durch Entladung das Beobachtungsgefäß und das System vor Aufladung zu schützen.

K ist ein mit Schliff (Hg-Dichtung) angesetztes Kohlerohr aus Hartglas, *G. R.* eine Geisslerröhre.

Durch den Hahn *H* mit 11 mm weiter Bohrung kann die Apparatur mit ihren möglichst weit dimensionierten Rohren von dem Evakuierungsapparat (Volmeraggregat), dem Mac Leod-Manometer und einem Gefäß mit P_2O_5 abgeschlossen werden.

Die als Strahlungsquelle dienende Wolfram-Bogenlampe *W* stellt eine fast ideal punktförmige Lichtquelle dar. Durch das photographische Objektiv *Ob* wurde auf einem Flügel des Systems ein Bild der weißglühenden Wolframkugel entworfen.

Die Energie konnte während der Messung durch eine mit Galvanometer *G* verbundene Thermosäule *Th* kontrolliert werden.

Die Empfindlichkeit von Thermosäule und Galvanometer wurde bei jeder Messung mit einer Vergleichslampe *V*, 6 Volt-Lampe, die mit Unterspannung gebrannt eine sehr konstante Energiequelle abgibt, geprüft.

Lampe, Objektiv und Thermosäule saßen mit Reitern auf einer optischen Bank, die auf einem in zwei zueinander senkrechten Richtungen verschiebbaren Schlitten montiert war.

Die Verschlußklappe *Kl* trug gleichzeitig eine Hülle für die Wolframlampe, um den Strahlengang zur Thermosäule zu unterbrechen.

Um das Beobachtungsgefäß gegen Temperaturschwankungen und falsche Strahlung zu schützen, war es bis auf die 3 Glasfenster dicht in Watte eingepackt.

Die Einwirkung der an sich schon gut abgedeckten Skalenbeleuchtung wurde durch einen 5 cm dicken Wassertrog *Wa* auf ein Mindestmaß reduziert.

Die Messung.

Die endgültigen Versuche wurden in folgender Weise ausgeführt:

Nachdem die Direktionskraft des Systems bestimmt war, wurde auf dem einen Flügel der Drehwage von der leuchtenden Wolframkugel ein scharfes Bild von 1 cm Durchmesser erzeugt. Zu dem Zweck wurde der Schlitten mit Objektiv und Lampe senkrecht zum Strahlengang vorgezogen, der Wassertrog *Wa* entfernt, und in der Ebene des Flügels außerhalb des Beobachtungsgefäßes eine scharfe Abbildung eingestellt. Darauf wurde der Schlitten zurückgeschoben und das Bild auf die Mitte des Flügels justiert.

Von jedem System wurde zunächst eine Radiometerkurve aufgenommen. Die Evakuierung geschah mittels Volmeraggregats unter Verwendung von flüssiger Luft zum Kühlen.

Der Druck wurde mit einem von Hrn. Prof. Seddig konstruierten und geliehenen Mac Leod-Manometer gemessen, das eine Druckmessung bis $1 \cdot 10^{-5}$ mm Hg gestattete.

Der Radiometereffekt war bei der Aluminiumfolie positiv (Fig. 6), bei den beiden anderen Systemen bis zu einem Druck von der Größenordnung 10^{-4} negativ.

Zur Aufnahme der Radiometerkurve mußte die Lichtquelle durch Reduktion der Stromstärke und durch Filter geschwächt werden.

Bei den negativen Radiometern zeigte sich bei einem Druck im Bereich 10^{-4} mm Hg ein Übergang ins Positive. Die Kurve erreicht ein Maximum und läuft dann asymptotisch in eine parallel der Druckachse verlaufende Gerade ein.

Im Bereich des Radiometereffektes war die Dämpfung noch groß, so daß die Ruhelage bald erreicht war und abgelesen werden konnte. Im weiteren Verlauf mußten wegen der geringen Dämpfung Schwingungen um eine Ruhelage abgelesen werden.

Während bei Nichols und Hull[1]) die Ausschläge ballistisch gemessen wurden, konnten bei diesen Versuchen durchgehends stationäre Zustände beobachtet werden.

Wenn die Ausschläge bis zu einem Druck von 10^{-5} mm Hg registriert waren, wurde die Kohle[2]) im Gefäß *K* durch ein elektrisches Öfchen zur hellen Rotglut erhitzt, während die Pumpen unter Kühlung mit flüssigem Sauerstoff in Tätigkeit blieben. Wenn die Gasabgabe stark zurückgegangen war, wurde die Heizung eingestellt und weiter evakuiert.

Da unterhalb $1 \cdot 10^{-5}$ eine Druckmessung durch das Mac Leod-Manometer nicht mehr möglich war, wurde nunmehr der Druck indirekt durch die Dämpfung des schwingenden Systems gemessen.

War bei der Evakuierung durch die Pumpen ein Punkt erreicht, wo die Dämpfung nicht mehr abnahm, so wurde der Hahn *H* geschlossen und die Kohle mit flüssigem Sauerstoff gekühlt.[3])

Von jetzt an wurde das Vakuum nur noch durch die Adsorption der Kohle verbessert, was sich durch abnehmende Dämpfung bemerkbar machte. Mit der Dämpfung nahm der Ausschlag stetig ab, bis nach 2—3 Tagen Kühlung ein konstanter „Restausschlag" erreicht war. Während die Dämpfung und somit der Druck weiter abnahmen, blieb jetzt der Ausschlag konstant, das bedeutet, daß erst unterhalb eines Druckes

---

1) E. F. Nichols u. G. F. Hull, Ann. d. Phys. 12. S. 225. 1903.

2) „A-Kohle" der Elberfelder Farbenfabriken vorm. Fr. Bayer & Co.

3) Die Firma Messer & Co. stellte uns die bedeutenden Mengen an flüssigem Sauerstoff stets bereitwilligst zur Verfügung. Wir sprechen auch hier unsern herzlichsten Dank dafür aus.

von 10^{-5} mm Hg der störende Einfluß des Radiometereffekts beseitigt ist.

Diese Druckgrenze ist für jedes Material eine andere. Für dieses Verhalten kann man wohl eine von den Materialien adsorbierte Gasschicht verantwortlich machen, die erst während *mehrtägiger* Behandlung im Hochvakuum allmählich herausdiffundiert. Um diese Gasabgabe zu beschleunigen, wurde der Flügel während der Wartezeit zwischen den Messungen oft viele Stunden lang durch Strahlung geheizt.

Bei Kühlung mit fester Kohlensäure wurde des Restausschlag nicht erreicht.

Lebedew hat nur mit Eis und Kochsalz gekühlt. Er gibt eine Fehlergrenze von 20 Proz. an, und zwar sind seine Ergebnisse um diesen Betrag zu hoch. Offenbar hat also Lebedew noch im Bereich merklichen Radiometereffektes gearbeitet, wo er auch von Störungen durch adsorbierte Gase noch nicht frei war.

Daß die Einwirkung des umgebenden Mediums im Bereich des konstanten Restausschlags wesentlich ausgeschaltet war, geht aus folgendem hervor:

1. Im Bereich des Radiometereffekts waren Störungen durch Nullpunktsverschiebungen und Nullpunktsschwankungen durch größte Vorsichtsmaßregeln nicht zu vermeiden. Im höchsten Vakuum war die Ruhelage durch mehrere Tage hindurch auf wenige Skalenteile konstant.

2. Ehe der Restausschlag erreicht war, stellte sich der Ausschlag „kriechend“ ein, während im Gebiet des Restausschlags die Schwingungen gleich um die Ausschlagsruhelage erfolgten, die konstant blieb, ob eine oder 5—10 Minuten belichtet wurde. Tab. I zeigt

a) das Verhalten ehe der Restausschlag erreicht war,

b) das Verhalten im Gebiet des Restausschlags.

3. Mehrere hintereinander ausgeführte Dämpfungsmessungen ergeben erst im Hochvakuum gut übereinstimmende Werte.

Die Ergebnisse der Messungen sind aus den Tabb. II—V und aus den Figg. 4—9 zu ersehen.

Tabelle I.

a) Dämpfung 1,00318			b) Dämpfung 1,00205		
Nullage		673	Nullage	606,5	
	577	673		606,5	658
	578				658
Bestrahlung		623	Bestrahlung	551	
	496	623		550	—
	497	622		550	616
	498	621,5		550	615
	—	620		550	615
	497	619			
	497				
Nullage		670	Nullage		662
	570,5	672		600	660
	572	673		599,5	660
	573	673		599,5	660
	574	673		600	660
	574,5	673		600	
	576	673			
	576				

Tabelle II.

System mit Platinfolie (7 μ).

Radiometerkurve.

Druck p in mm Hg	Ausschlag in mm bei 2300 mm Skalenabstand bezogen auf konstante Strahlung $E = 2{,}23 \cdot 10^{-4}$ Erg	Druck p in mm Hg	Ausschlag in mm bei 2300 mm Skalenabstand bezogen auf konstante Strahlung $E = 2{,}23 \cdot 10^{-4}$ Erg
⊙ $7{,}6 \cdot 10^{-1}$	− 22	● $2{,}2 \cdot 10^{-1}$	− 91
$6{,}0 \cdot 10^{-1}$	− 27	$1{,}8 \cdot 10^{-1}$	−117
$2{,}6 \cdot 10^{-1}$	− 66	$1{,}1 \cdot 10^{-1}$	−188
$1{,}6 \cdot 10^{-1}$	−147	$9{,}2 \cdot 10^{-2}$	−218
$5{,}6 \cdot 10^{-2}$	−317	$6{,}4 \cdot 10^{-2}$	−304
$4{,}0 \cdot 10^{-2}$	−396	$4{,}4 \cdot 10^{-2}$	−375
$3{,}3 \cdot 10^{-2}$	−407	$2{,}8 \cdot 10^{-2}$	−445
$1{,}6 \cdot 10^{-2}$	−468	$2{,}6 \cdot 10^{-2}$	−451
$7{,}0 \cdot 10^{-3}$	−324	$2{,}2 \cdot 10^{-2}$	−468
$1{,}0 \cdot 10^{-3}$	− 49	$2{,}0 \cdot 10^{-2}$	−470
$7{,}0 \cdot 10^{-4}$	− 20	$1{,}8 \cdot 10^{-2}$	−470
$6{,}2 \cdot 10^{-5}$	+ 8	$1{,}1 \cdot 10^{-2}$	−430
$1{,}4 \cdot 10^{-5}$	+ 8,5	$5{,}2 \cdot 10^{-3}$	−277
$6{,}0 \cdot 10^{-6}$	+ 9,5	$4{,}6 \cdot 10^{-3}$	−238
$1{,}4 \cdot 10^{-6}$	+ 8,0	$3{,}2 \cdot 10^{-3}$	−181
		$2{,}0 \cdot 10^{-3}$	● −133
● $9{,}0 \cdot 10^{-1}$	− 17	$5{,}0 \cdot 10^{-4}$	− 14
$8{,}8 \cdot 10^{-1}$	− 19	$2{,}0 \cdot 10^{-4}$	+ 3
$4{,}5 \cdot 10^{-1}$	− 40	$1{,}4 \cdot 10^{-5}$	+ 9,5
$3{,}5 \cdot 10^{-1}$	− 51		

Tabelle III. System mit Platinfolie. Dicke = 7 μ.

	Zeit in Stunden seit Beginn der Kühlung der ausgeglühten Kohle durch flüssig. Sauerstoff	Druck p in mm Hg	Dämpfung	Ausschlag in mm bei 2300 mm Skalenabstand bezogen auf konstante Strahlung $E = 7{,}73 \cdot 10^{-5}$ Erg
1.	0	$1{,}1 \cdot 10^{-4}$	1,1641	101
	12	$1{,}3 \cdot 10^{-5}$	1,0230	170
	18½	$3{,}6 \cdot 10^{-6}$	1,0053	76
		$3{,}4 \cdot 10^{-6}$	1,0051	69
	33½	$2{,}9 \cdot 10^{-6}$	1,0043	65
	44½	$2{,}1 \cdot 10^{-6}$	1,0031	55
	54	$2{,}2 \cdot 10^{-6}$	1,0033	58
	68	$1{,}7 \cdot 10^{-6}$	1,0026	52
	78	$1{,}6 \cdot 10^{-6}$	1,0024	50
		$1{,}8 \cdot 10^{-6}$	1,0027	50 48
	87	$1{,}3 \cdot 10^{-6}$	1,0020	44,5
	101½	$1{,}7 \cdot 10^{-6}$	1,0026	46,0
	113	$1{,}9 \cdot 10^{-6}$	1,0028	43,0
	115½	$1{,}9 \cdot 10^{-6}$	1,0028	42,8
	120	$1{,}2 \cdot 10^{-6}$	1,0017	43,0
		$1{,}3 \cdot 10^{-6}$	1,0019	43,5
		$1{,}2 \cdot 10^{-6}$	1,0017	43,2
	127	$1{,}6 \cdot 10^{-6}$	1,0024	44,0
	128	$1{,}5 \cdot 10^{-6}$	1,0023	43,7
	135	$1{,}9 \cdot 10^{-6}$	1,0029	43,1
		$1{,}8 \cdot 10^{-6}$	1,0027	43,4
	147	$2{,}1 \cdot 10^{-6}$	1,0031	44,0
2.	0	$1{,}05 \cdot 10^{-4}$	1,1571	117
	1	$1{,}9 \cdot 10^{-5}$	1,0295	190
	17	$2{,}4 \cdot 10^{-6}$	1,0036	65
	18	$2{,}1 \cdot 10^{-6}$	1,0031	61
		$2{,}1 \cdot 10^{-6}$	1,0031	59
	31	$1{,}7 \cdot 10^{-6}$	1,0026	—
			1,0029	54
			1,0025	54
			1,0029	—
	40	$1{,}1 \cdot 10^{-6}$	1,0017	52
			1,0023	—
	51½	$1{,}5 \cdot 10^{-6}$	1,0022	49
			1,0022	48
	53½	—	—	45,5 46,5
	64	$8{,}6 \cdot 10^{-7}$	1,00123	44,4
			1,00128	43,6
	74	$1{,}3 \cdot 10^{-6}$	1,00205	43,5
	89	$7{,}3 \cdot 10^{-7}$	1,00110	44,0
	100		1,00130	43,7
	112	$8{,}7 \cdot 10^{-7}$	1,00130	43,5
			1,00129	—
	124½	$1{,}6 \cdot 10^{-6}$	1,00155	—
			1,00148	43,5
	196½	$1{,}1 \cdot 10^{-6}$	1,00230	44,0

Bei dem außerordentlich empfindlichen System mit Nickelfolie war schließlich, obwohl nur noch mitten in der Nacht gemessen wurde, eine Dämpfungsmessung nicht mehr möglich.

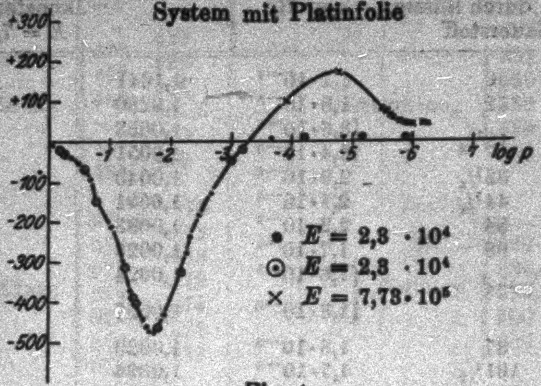

System mit Platinfolie

Fig. 4.

Die Figg. 7, 8 und 9 geben ein besonders deutliches Bild für die Natur des Restausschlags. Auf der Abszissenachse ist das gemessene Dämpfungsverhältnis abgetragen,

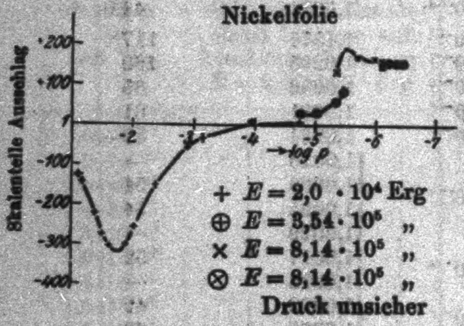

Nickelfolie

Fig. 5.

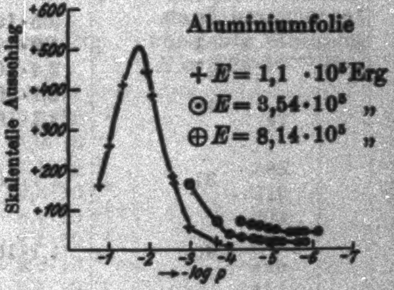

Aluminiumfolie

Fig. 6.

auf der Ordinatenachse der Ausschlag in Skalenteilen. Die Werte sind bei den niedrigsten Drucken in Reihenfolge der Beobachtung mit Strichen verbunden, die eingerahmten Zahlen geben ungefähr die zwischen den Messungen liegende Zeit in Stunden an. Die konstanten Restausschläge sind in der Reihenfolge der Beobachtung numeriert. Die Zeit, die zwischen den

Tabelle IV. System mit Nickelfolie (10 μ).

Zeit in Stdn. nach Beginn d. Kühlung d. ausgeglühten Kohle mit flüssigem Sauerstoff	Druck p in mm Hg	log p	Dämpfung	Ausschlag in mm bei 2300 mm Skalenabstand bezogen auf konstante Strahlung a) $E = 2{,}0 \cdot 10^4$ Erg	b) $E = 3{,}54 \cdot 10^5$ Erg	c) $E = 8{,}14 \cdot 10^5$ Erg
	$8{,}5 \cdot 10^{-2}$	0,92942 − 2		− 125		− 5 088
	$7{,}1 \cdot 10^{-2}$	0,85126 − 2		− 146		− 5 942
	$4{,}1 \cdot 10^{-2}$	0,61278 − 2		− 221		− 8 995
	$3{,}1 \cdot 10^{-2}$	0,49136 − 2		− 275		− 11 193
	$2{,}45 \cdot 10^{-2}$	0,38917 − 2		− 307		− 12 494
	$1{,}3 \cdot 10^{-2}$	0,11394 − 2		− 308		− 12 382
	$9{,}0 \cdot 10^{-3}$	0,95424 − 3		− 257		− 10 459
	$4{,}5 \cdot 10^{-3}$	0,65321 − 3		− 152		− 6 186
	$1{,}3 \cdot 10^{-3}$	0,11394 − 3		− 55		− 2 237
	$7{,}5 \cdot 10^{-4}$	0,87506 − 4		− 31		− 1 262
	$1{,}1 \cdot 10^{-4}$	0,04139 − 4		+ 2		
8	$1{,}8 \cdot 10^{-5}$	0,25527 − 5	1,0240	+ 4	+ 23	+ 49
	D. folg. Drucke s. aus d. Dämpfg. ber.					
28	$9{,}0 \cdot 10^{-6}$	0,95424 − 6	1,0120		+ 30	
41,5	$4{,}5 \cdot 10^{-6}$	0,65321 − 6	1,0062		+ 55	+ 130
50,5	$3{,}3 \cdot 10^{-6}$	0,51851 − 6	1,0046		+ 81	+ 191
83			D. n. meßbar Wind		+ 85	+ 200
71	$2{,}0 \cdot 10^{-6}$	0,30103 − 6	1,0028			+ 168
92,5	$1{,}0 \cdot 10^{-6}$	0,00000 − 6	1,0018			+ 157
116,5	$8{,}3 \cdot 10^{-7}$	0,91908 − 7	1,0011			+ 150 + 152
122 (40 Stdn. konstant)			D. n. meßbar			+ 150
130			„ „ „			+ 152
156			„ „ „			+ 150
172	$1{,}9 \cdot 10^{-6}$	0,27875 − 6	1,0026			+ 160

Tabelle V.

System mit Aluminiumfolie. [15 μ.]

Datum	Zeit in Stunden nach Beginn der Kühlung der ausgeglühten Kohle mit flüssigem Sauerstoff	Druck p in mm Hg	log p	Dämpfung
		$1,8 \cdot 10^{-1}$	0,25527 − 1	
		$1,0 \cdot 10^{-1}$	0,00000 − 1	
		$4,5 \cdot 10^{-2}$	0,65321 − 2	
		$1,1 \cdot 10^{-2}$	0,04139 − 2	
		$8,9 \cdot 10^{-3}$	0,94939 − 3	
		$3,05 \cdot 10^{-3}$	0,48430 − 3	
		$2,75 \cdot 10^{-3}$	0,43933 − 3	
		$1,03 \cdot 10^{-3}$	0,01284 − 3	
		$2,3 \cdot 10^{-4}$	0,36173 − 4	
		$1,17 \cdot 10^{-4}$	0,06819 − 4	
		$1,0 \cdot 10^{-4}$	0,00000 − 4	
	10	$6,0 \cdot 10^{-5}$	0,77815 − 5	
	33,5	$2,8 \cdot 10^{-5}$	0,44716 − 5	1,0215
	46	$2,0 \cdot 10^{-5}$	0,30103 − 5	1,0160 1,0159
		Die folg. Drucke sind aus der Dämpfung berechn.		
	61,5	$1,0 \cdot 10^{-5}$	0,00000 − 5	1,0080
	Kohle frisch geglüht			
	66	$8,7 \cdot 10^{-6}$	0,93952 − 6	1,0071
	78	$6,6 \cdot 10^{-6}$	0,81707 − 6	1,00525
	91	$8,0 \cdot 10^{-6}$	0,90309 − 6	1,00640
	28	$6,0 \cdot 10^{-6}$	0,77815 − 6	1,0048
	69	$2,4 \cdot 10^{-6}$	0,38021 − 6	1,0019
	72	$2,1 \cdot 10^{-6}$	0,32222 − 6	1,0017
	93 } 47 Stdn. konstant	$2,1 \cdot 10^{-6}$	0,32222 − 6	1,0017
	95	$1,7 \cdot 10^{-6}$	0,23045 − 6	1,0014
	116	$2,1 \cdot 10^{-6}$	0,32222 − 6	1,0017
	Kohle frisch geglüht			
	0	$9,5 \cdot 10^{-6}$	0,97772 − 6	1,0076
	15	$3,8 \cdot 10^{-6}$	0,57978 − 6	1,0081
	22	$3,8 \cdot 10^{-6}$	0,57978 − 6	1,0080
	38	$3,2 \cdot 10^{-6}$	0,50515 − 6	1,0026
	45	$1,9 \cdot 10^{-6}$	0,27875 − 6	1,0015
	62	$1,5 \cdot 10^{-6}$	0,17609 − 6	1,0012
	86	$1,8 \cdot 10^{-6}$	0,25527 − 6	1,0014
	111,5	$1,5 \cdot 10^{-6}$	0,17609 − 6	1,0012
	117 } 134 Stdn. konstant	$1,8 \cdot 10^{-6}$	0,25527 − 6	1,0014
	135	$1,4 \cdot 10^{-6}$	0,14613 − 6	1,0011
	141	$7,7 \cdot 10^{-7}$	0,88649 − 7	1,0006 unsicher
	156	$1,4 \cdot 10^{-6}$	0,14613 − 6	1,0011
	164	$2,0 \cdot 10^{-6}$	0,30103 − 6	1,0016
	172	$1,8 \cdot 10^{-6}$	0,25527 − 6	1,0014

Tabelle V.

Aluminiumfolie.

Ausschlag in mm bei 2800 mm Skalenabstand bezogen auf konstante Strahlung.

a) $E = 1{,}10 \cdot 10^6$ Erg.	b) $E = 8{,}54 \cdot 10^5$ Erg.	c) $E = 8{,}14 \cdot 10^5$ Erg.
+162,0		+1150
+260,0		+1846
+410,0		+2911
+444,0		+8152
+385,0		+2783
+182,0		+1292
+170,0		+1207
+ 58,0	+179	+ 412
+ 22,5	+ 71	+ 160
+ 12,0	—	
+ 12,0	+ 38	+ 85
	+ 30	+ 68
	+ 26	+ 60
	+ 25	+ 57,5
	+ 28,5	+ 58,5
	+ 28,5	+ 52,0
	—	+ 51
	23,0	+ 53
	+ 22,5	+ 50,0
	+ 19,0	+ 42,5
	+ 19,5	+ 48,0
	+ 19,0	+ 42,0
	+ 19,0	+ 42,5
		+ 42,3
		+ 50,5
		+ 48,0
		+ 46,5
		+ 43,0
		+ 43,5
		+ 44,0
		+ 42,5
		+ 42,8
		+ 42,5
		+ 42,0
		+ 48,0
		+ 48,5
		+ 44,0
		+ 42,0

einzelnen Messungen liegt, ist aus den Tabb. III, IV, V zu ersehen. Die Anzahl der Stunden, über die sich die Beobach-

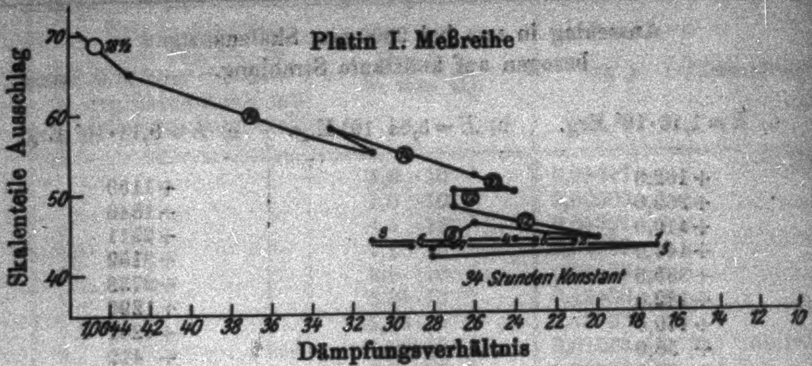


Fig. 7.

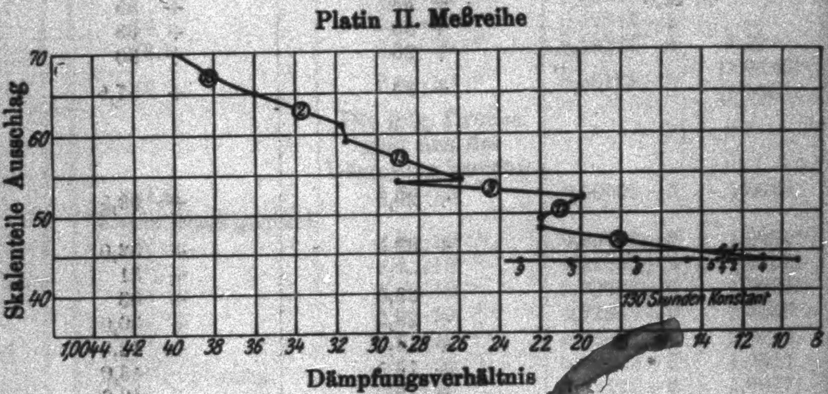


Fig. 8.

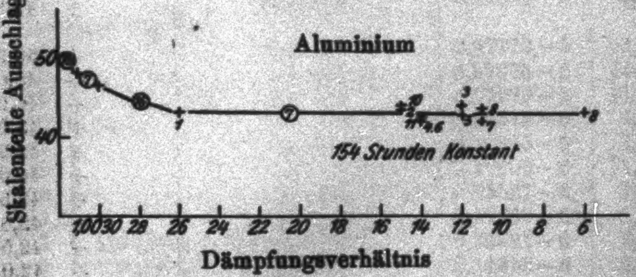


Fig. 9.

tung des konstanten Restausschlags erstreckt, ist in Tab. VI aufgezeichnet. Eine Meßreihe beim Platin zeigt 132 Stunden, eine beim Aluminium 134 Stunden lange Konstanz, und zwar innerhalb einer Druckvariation im Verhältnis 1:4, die durch mehr oder weniger intensives Kühlen erreicht wurde.

Im Gebiet des konstanten Ausschlag wurde für die Ermittlung des Hebelarms beim Platinflügel folgendes Verfahren angewendet.

Da die Justierung auf die Mitte des Flügels für die rechteckige Fläche $F = 1{,}45 \cdot 1{,}05$ qcm sehr schwierig war, wurde das Bild der Lichtquelle einmal scharf am linken und einmal scharf am rechten Flügelrand erzeugt. Es ergaben sich die Ausschlage 32,0 und 56,0 Skalenteile, so daß sich für den Hebelarm 10,0 mm ein Ausschlag von 44,0 Skalenteilen errechnete. Der direkt gemessene Ausschlag betrug 43,8 bzw. 43,4 mm. Die Genauigkeit der Ausschläge ist ± 1 Proz.

Beim System mit Platinflügel wurde ferner bei tiefsten Drucken die Art der Beleuchtung variiert. Die Abbildung wurde vergrößert, so daß der ganze Flügel bestrahlt wurde. Der Ausschlag reduzierte sich der Energie proportional auf 19,0 Skalenteile.

Um den beobachteten Strahlungsdruck mit dem von der Theorie geforderten vergleichen zu können, muß man die Energie der Strahlung und das Reflexionsvermögen der absorbierenden Fläche kennen.

Nach Maxwell-Bartoli ist der Strahlungsdruck

$$p = \frac{E}{c}(1 + \varrho),$$

wo E die Energie der Strahlung,
c die Lichtgeschwindigkeit,
ϱ das Reflexionsvermögen bedeuten.

Die Energiemessung erfolgte mit Thermosäule und Galvanometer durch Anschluß an die Meterkerze.

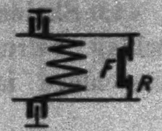
Die Thermosäule, die zu dieser Messung verwandt wurde, war nach Paschens Methode gebaut. Der Ausschlag des Galvanometers für die Meterkerze wurde aus mehreren Messungen, bei denen der Abstand von Hefnerkerze und Thermosäule variiert wurde, berechnet und proportional 908 Erg[1]) gesetzt.

---

[1]) W. Gerlach, Phys. Zeitschr. 14. S. 577. 1913.

Darauf wurde der Wassertrog *W* entfernt, die Thermosäule parallel zum Flügel vor A_3 aufgestellt und der Schlitten senkrecht zum Strahlengang vorgezogen, so daß die Abbildung in derselben Weise wie auf dem Flügel auf der Thermosäule erfolgen konnte. Eine vorgesetzte Spiegelglasscheibe ersetzte das Spiegelglasfenster am Beobachtungsgefäß. Aus dem Verhältnis der Ausschläge für Meterkerze und Wolframlampe wurden die angewandten und aus den Tabellen ersichtlichen Energien pro qcm berechnet.

Das Reflexionsvermögen wurde mit Hilfe von Thermosäule und Galvanometer bestimmt.



Die benutzte Flächenthermosäule war in ein Messingrohr montiert. In dieses Rohr war ein Hartgummirahmen *R* mit kreisförmiger Öffnung eingepaßt. Die Öffnung wurde durch die zu untersuchende Metallfolie *F* verschlossen und der Rahmen mit Blende hierauf in das Rohr vor die berußten Lötstellen der Thermosäule eingesetzt.

Zunächst wurde der Ausschlag bei Bestrahlung der blanken Folie gemessen, sodann wurde die Folie kalt berußt.

Das Absorptionsvermögen der so berußten Fläche ist nach noch nicht veröffentlichten Messungen von Hrn. Prof. Gerlach (Rußschichtdicke 15—28 μ) zu 92,5% ± 2% eingesetzt. Aus dem Verhältnis der Ausschläge für berußte und blanke Folie ergibt sich das Absorptionsvermögen für die blanke Folie und daraus das Reflexionsvermögen für die benutzten Wellenlängenbereiche für:

Aluminium . . . . . . $\varrho = 0{,}81 \pm 1\%$
Nickel . . . . $\varrho = 0{,}43 \pm 1\%$
Platin . . . . $\varrho = 0{,}60 \pm 1\%$.

Aus der Energie pro qcm und dem Reflexionsvermögen errechnet sich der Lichtdruck zu

$$p = \frac{E \cdot F\,(1 + \varrho)}{c},$$

wo *F* die bestrahlte Fläche darstellt.

Aus den gemessenen Ausschlägen α und der Empfindlichkeit e ergibt sich ferner

$$p = \frac{\alpha \cdot e}{H},$$

wo *H* den Hebelarm bedeutet.

Tabelle VI.

α = beob. Ausschlag bez. auf konst. Strahlung.
e = Empfindlichkeit pro 1 mm Skt.
H = Hebelarm.
p = Druck in Erg.
t^h = Zeit des konstanten Ausschlags in Stunden.
n = Zahl der Meßfolgen während der Zeit t.
F = bestrahlte Fläche.

$$p_{\text{ber.}} = \frac{E \cdot F(1 + \varrho)}{c}\,.$$

$$p_{\text{beob.}} = \frac{\alpha \cdot e}{H}\,.$$

Material	t^h	$E \pm 1{,}5\,\%$	F cm² $\pm 2\,\%$	$(1 + \varrho_{\text{beob.}}) \pm 1{,}5\,\%$	$p_{\text{ber.}}$
Pt [7 μ]	34	$7{,}73 \cdot 10^5$	$0{,}78_5$	1,60	$3{,}24 \cdot 10^{-5}$
Pt "	132	$7{,}73 \cdot 10^5$	$0{,}78_5$	1,60	$3{,}24 \cdot 10^{-5}$
Pt	—	$1{,}84 \cdot 10^5$	$1{,}52_2$	1,60	$1{,}49 \cdot 10^{-5}$
Ni [10 μ]	40	$8{,}14 \cdot 10^5$	$0{,}78_5$	1,43	$3{,}05 \cdot 10^{-5}$
Al [15 μ]	47	$8{,}14 \cdot 10^5$	$0{,}78_5$	1,81	$3{,}86 \cdot 10^{-5}$
Al "	134	$8{,}14 \cdot 10^5$	$0{,}78_5$	1,81	$3{,}86 \cdot 10^{-5}$
Al "	27	$3{,}54 \cdot 10^5$	$0{,}78_5$	1,81	$1{,}68 \cdot 10^{-5}$

Material	α	n	e	$H \pm 1\,\%$	$p_{\text{beob.}}$	Diff. $p_{\text{beob.}} - p_{\text{ber.}}$
Pt [7 μ]	$43{,}4 \pm 0{,}5$	5	$7{,}2 \cdot 10^{-7}$	1,0	$3{,}12 \cdot 10^{-5}$	$-4\,\%$
Pt "	$43{,}8 \pm 0{,}5$	11	$7{,}2 \cdot 10^{-7}$	1,0	$3{,}15 \cdot 10^{-5}$	$-3\,\%$
Pt	$20{,}0 \pm 0{,}5$	4	$7{,}2 \cdot 10^{-7}$	1,0	$1{,}44 \cdot 10^{-5}$	$-2{,}5\,\%$
Ni [10 μ]	$150{,}0 \pm 0{,}5$	5	$2{,}39 \cdot 10^{-7}$	1,1	$3{,}23 \cdot 10^{-5}$	$+6\,\%$
Al [15 μ]	$42{,}5 \pm 0{,}5$	10	$8{,}89 \cdot 10^{-7}$	1,0	$3{,}89 \cdot 10^{-5}$	$+1\,\%$
Al "	$43{,}0 \pm 0{,}5$	8	$8{,}89 \cdot 10^{-7}$	1,0	$3{,}94 \cdot 10^{-5}$	$+2\,\%$
Al "	$19{,}0 \pm 0{,}5$		$8{,}89 \cdot 10^{-7}$	1,0	$1{,}74 \cdot 10^{-5}$	$+3\,\%$

Tabell VI zeigt die Gegenüberstellung der Werte. Die Abweichung schwankt zwischen − 4% und + 6%, liegt also durchaus innerhalb der Beobachtungsfehler, da die maximale Fehlergrenze ± 6% ohne Berücksichtigung des Fehlers bei der Messung des Ausschlags beträgt.

Ergebnis.

Von Störungen durch Radiometereffekt oder verdampfende adsorbierte Gasschicht ist man erst im Bereich von 10^{-6} mm

Hg frei. In diesem Druckgebiet zeigt das Radiometer einen Restausschlag, der als reiner Strahlungsdruck zu deuten ist und mit dem theoretischen Wert gute Übereinstimmung zeigt.

Hrn. Geh. Rat Prof. Dr. R. **Wachsmuth** sage ich meinen aufrichtigen Dank für die Anregung zu der Untersuchung und das mir während ihrer Ausführung in reichem Maße entgegengebrachte Wohlwollen.

Ganz besonderen Dank zolle ich Hrn. Prof. Dr. W. **Gerlach**, der in reichstem Maße Anteil hat am Zustandekommen dieser Arbeit.

Wesentlich gefördert wurden die Versuche durch Mittel, die die Jagorstiftung in Berlin Hrn. Prof. **Gerlach** in dankenswerter Weise für die Untersuchung zur Verfügung gestellt hat.

Frankfurt a. M., Physik. Inst. d. Univ., Okt. 1923.

(Eingegangen 10. Oktober 1923.)

6. *Über Lyman-Geister in den Wellenlängenmessungen des ultraroten Neonspektrums;*

von K. W. Meißner.

Für die Bestimmung der ultraroten Linien des Neonspektrums[1]) wurde seinerzeit ein Konkavgitter von ca. 1 m Krümmungsradius und mit 15000 Linien pro inch benutzt, das von A. Hilger, London geliefert und von Anderson geteilt war.

Die bei dem Gitter auftretenden Rowlandschen Geister waren bekannt und die entsprechenden Geisterfaktoren ermittelt. Es treten bei längeren Expositionen nur die Geister $\lambda_{\text{Geist}} = \lambda\left(1 \pm \frac{m}{750}\right)$, $m = 1$ und 4 auf und nur bei sehr übertriebener Belichtungsdauer erhält man auch die Geister für die $m = 5, 6, 7, 9$ ist. Mit Hilfe dieser vor den Messungen bestimmten Faktoren konnten etwa als echte Linien gemessene Geister leicht eliminiert werden.

Bei den langen Expositionszeiten, die zur Erlangung der längsten Wellenlängen notwendig sind, läuft man Gefahr, durch die von Lyman[2]) zuerst beschriebenen und nach ihm genannten Geister getäuscht zu werden. Diese Geister sind viel schwerer zu erkennen, als die Rowlandschen, da sie sehr weit von der Mutterlinie entfernt liegen und meist zu lichtschwach sind, um sie okular an der Farbe zu erkennen, falls die Grundlinie dem sichtbaren Spektrum angehört.

Von den Hrn. W. F. Meggers und C. C. Kiess wurde ich freundlich darauf aufmerksam gemacht, daß sich unter den von mir gemessenen Neonlinien Geister befinden, die zur Klasse der Lymanschen gehören. Nachdem sie selbst im Eisen-, Nickel- und Kobaltspektrum viele solcher Geister als echte Linien gemessen hatten, fanden sie bei der Messung des Chromspektrums, daß eine Reihe von Linien im ultraroten Gebiet Wiederholungen der drei starken Linien 7355, 7400 und 7462 seien. Dadurch erkannten sie die Geisternatur der scheinbar ultraroten Linien und haben durch besondere Untersuchungen die Geisterfaktoren ermittelt und inzwischen veröffentlicht.[1])

---

[1]) K. W. Meißner, Ann. d. Phys. 58. S. 333. 1919.

[2]) Th. Lyman, Phys. Rev. 12. S. 1. 1901; 16. S. 257. 1903.

Um auch aus den Neonmessungen diese Geister gegebenenfalls zu eliminieren, wurde das damals benutzte Gitter von mir einer Untersuchung unterworfen und die Geisterfaktoren ermittelt.

Mit Hilfe eines Monochromators wurde der Spalt des Gitters mit der Quecksilberlinie 4358,34 Å.-E. beleuchtet und bei einer Spaltbreite von ca. 0,05 mm 8 bis 24 Stunden belichtet, wobei die Kamera mit gewöhnlichen Platten voll besetzt wurde, so daß man ein Wellenlängengebiet von 0 bis 11000 Å.-E. beherrschte. Bei anderen Aufnahmen wurde einfach ein Methylviolettfilter verwendet, das das Gebiet 435 bis 344 $\mu\mu$ durchläßt. In diesem Falle erzeugten die Linien 4358, 4047, 4056 und das Triplet bei 3663 Geister, die man nach den vorhergegangenen Versuchen mit der Linie 4358 leicht auffinden und auseinanderhalten konnte. Die scheinbaren Wellenlängen der Geister wurden gegen Eisen- oder Quecksilberlinien in der üblichen Weise gemessen. Die Aufnahmen mit der Linie 4358 Å.-E. zeigten deutlich Geister, die sich symmetrisch zu der Mutterlinie gruppierten. Der erste Geist war bei ca. 870 Å.-E., der zweite bei 1740, der dritte bei 2615, der vierte 3486 usw., d. h. es traten Geister auf ungefähr bei $\lambda/5$, $2\lambda/5$, $3\lambda/5$, $4\lambda/5$ usw.; der letzte Geist der noch in die Kamera fiel war $12\lambda/5$, wo λ die Wellenlänge der Mutterlinie ist. Die Faktoren $n/5$ sind nur ungefähre Werte. In der Nähe dieser Geister traten zum Teil auch schwächere auf, von denen die stärksten unten mitgeteilt sind. Die Auswertung der Geisterwellenlängen ergab die genaueren Werte der Geisterfaktoren, die mit den von **Meggers** und **Kiess** für das Gitter Nr. 222, 7500 Linien pro inch, ange-

---

1) Journ. Opt. Soc. Amer. 6. S. 417. 1922. Die Theorie wird von C. **Runge** gegeben. Ebenda S. 429 bis 434.

gebenen übereinstimmen. Die Wellenlängen der Geister lassen sich darstellen als

$$\lambda_{\text{Geist}} = \lambda\left(\frac{n}{5} \pm \frac{p}{1500}\right).$$

Genauer gemessen wurden die folgenden:

n	p	Intensität
3	+ 1	stark
3	− 4	schwach
4	− 2	stark
4	+ 5	schwach
6	+ 2	stark
7	+ 4	schwach
7	− 1	stark
8	+ 1	stark
8	− 4	schwach
9	− 2	stark

Die Intensität der Geister ist sehr klein im Vergleich zu der der Hauptlinie. Meggers und Kiess geben die Größenordnung 10^{-5} bis 10^{-4} an.

Mit Hilfe der so ermittelten Geisterfaktoren lassen sich aus den Messungen des ultraroten Neonspektrums eine Reihe schwacher Linien eliminieren, die sich bisher auch nicht in die Serien einfügen ließen.

Da sämtliche Aufnahmen damals unter Vorschaltung der Filter α oder F von Wratten-Wainright gemacht wurden, so kamen als Ursprungslinien der Geister nur Linien > 6096 für das F-Filter und $\lambda > 6402$ für das α-Filter in Betracht.

Die folgende Tabelle enthält die als Geister erkannten Linien. Die erste Kolonne gibt die Wellenlängen der gemessenen Linien, die zweite die Wellenlängen der Ursprungslinien λ_0, die dritte den Geisterfaktor und die vierte den berechneten Wert des Geistes.

$\lambda_{\text{gem.}}$	λ_0	Geisterfaktor	λ_{Geist}
9840,42	7032,41	$^7/_5 - {}^1/_{1500}$	9840,68
9696,46	6929,47	$^7/_5 - {}^1/_{1500}$	9696,61
9399,10	6717,04	$^7/_5 - {}^1/_{1500}$	9399,38
9368,02	6678,28	$^7/_5 + {}^4/_{1500}$	9367,38
9345,06	6678,28	$^7/_5 - {}^1/_{1500}$	9345,12
9234,08	6598,95	$^7/_5 - {}^1/_{1500}$	9234,13
9105,18	6506,53	$^7/_5 - {}^1/_{1500}$	9104,80
8958,46	6402,25	$^7/_5 - {}^1/_{1500}$	8958,88
8937,00	7438,89	$^6/_5 + {}^2/_{1500}$	8936,58
8822,66	6304,79	$^7/_5 - {}^1/_{1500}$	8822,52
7528,56	6266,50	$^6/_5 + {}^2/_{1500}$	7528,16

Die Linie 9368,02 läßt sich auch als Geist der sehr starken Linie 5852,49 deuten (Geisterfaktor $[{}^{8}/_{5} + {}^{1}/_{1500}]$), doch ist diese Deutung ausgeschlossen, da die benützten Filter für diese Linie vollkommen undurchlässig sind.

Die Linie 8704,15 ($2p_7 - 3d_3$) ist reell und wurde auch mit einem Glasspektrographen erhalten; sie ist also nicht identisch mit dem in ihre Nähe fallenden Geist $({}^{6}/_{5} + {}^{2}/_{1500}) \cdot 7245{,}17 = 8703{,}84$.

Durch den Wegfall dieser Geister werden die im äußersten Rot des Neonspektrums liegenden nicht in die Seriengesetze eingeordneten Linien auf vier reduziert.

Zürich, Physikal. Institut der Universität, Oktober 1923.

(Eingegangen 12. November 1923.)

7. *Funkenlinien im Röntgenspektrum (Nachträge);*

von Gregor Wentzel.

---

§ 1. Emission.

In einer früheren Arbeit[1]) deutete der Verf. die serienfremden Linien der Röntgenspektren, die durchweg als harte Begleiter intensiver Serienlinien auftreten, als „Funkenlinien", d. h. als Emissionen zwei- oder mehrfach ionisierter Atome. Die Theorie bewährte sich u. a. in ihren Aussagen über die Abstandsverhältnisse der Funkenlinien erster und zweiter Ordnung, welche an den $K\alpha$-Satelliten der leichten Elemente geprüft werden konnten. Für diese sollte gelten:

$$\alpha_3 - \alpha_1 = \alpha_5 - \alpha_3 = \alpha_6 - \alpha_4 , \tag{1}$$

aber nur näherungsweise, nämlich bis auf Glieder höherer Ordnung in einer Taylorentwicklung. Unter Berücksichtigung dieser Glieder gibt die Theorie:

$$\alpha_3 - \alpha_1 < \alpha_5 - \alpha_3 < \alpha_6 - \alpha_4 . \tag{2}$$

Wir wollen hier eine Bemerkung machen bezüglich der Größe der Abweichungen von der Relation (1), die früher nur ihrer Größenordnung nach theoretisch verständlich waren. Die nachstehende Tabelle, welche die von **Hjalmar** gemessenen Frequenzdifferenzen in Einheiten der Rydbergfrequenz zusammenfaßt, läßt in dieser Hinsicht einen merkwürdigen Zusammenhang durchblicken: *die Differenz $\alpha_6 - \alpha_4$ ist immer fast*

	12 Mg	13 Al	14 Si	15 P
$\alpha_3 - \alpha_1$	0,64	0,73	0,84	0,96
$\alpha_5 - \alpha_3$	0,66	0,79	0,90	—
$\alpha_6 - \alpha_4$	0,72	0,86	0,94	–

---

1) G. **Wentzel**, Ann. d. Phys. **66**. S. 437. 1921.

genau gleich der Differenz $\alpha_3 - \alpha_1$ *des nächst höheren Elementes.* In Zeichen:

$$(\alpha_3 - \alpha_1)_Z = (\alpha_6 - \alpha_4)_{Z-1}\,. \tag{3}$$

Wir wollen zeigen, daß die Theorie der mehrfach ionisierten Atome diese Relation tatsächlich fordert.

Wir bezeichnen wie früher die Energie des in der K-Schale k-fach, in der L-Schale l-fach ionisierten Atoms (nach Division durch h) mit $K^k L^l$. Dann lautet die Termdarstellung der verschiedenen Linien:

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha_1 = K - L, & \\ \alpha_3 = K L - L^2, & \alpha_4 = K^2 - K L, \\ \alpha_5 = K L^2 - L^3, & \alpha_6 = K^2 L - K L^2. \end{array}\right. \tag{4}$$

Wir schreiben die Differenzen $\alpha_3 - \alpha_1$ und $\alpha_6 - \alpha_4$ folgendermaßen um:

$$\alpha_3 - \alpha_1 = (K L - K) - (L^2 - L), \tag{5}$$

$$\alpha_6 - \alpha_4 = (K^2 L - K^2) - (K L^2 - K L) = K \cdot (\alpha_3 - \alpha_1). \tag{6}$$

Jeder der auf der rechten Seite von (5) und (6) stehenden Klammerausdrücke stellt eine L-Ionisierungsarbeit (dividiert durch h) dar ($l \rightarrow l - 1$). Dabei unterscheiden sich die Ausdrücke in (6) von denen in (5) lediglich durch einen symbolischen Faktor K, d. h. durch ein fehlendes K-Elektron. Der Einfluß eines K-Elektrons auf den L-Ionisationsvorgang besteht aber bekanntlich allein in einer „Abschirmung" der Kernladung Z um eine Einheit. Kompensiert man also in (6) das fehlende K-Elektron durch Verkleinerung von Z um 1, so folgt Gl. (3). Daß sich diese in der obigen Tabelle als praktisch genau erfüllt erweist, zeigt, daß wirklich, wie oben angenommen, der Einfluß der K-Schale auf Vorgänge außerhalb der L-Schale praktisch ausreichend als eine Abschirmungswirkung beschrieben werden kann.

Leider ist die hierdurch ermöglichte quantitative Prüfung der Theorie einstweilen auf die K-Serie beschränkt. Zwar ist die $L\alpha_3$-Linie, die der Verf. als Funkensatellit der $L\alpha_1$-Linie deutete, von Coster entsprechend der theoretischen Vorhersage in zwei Komponenten α_3 α_4 zerlegt worden, die in ihrem Ursprung den Linien $K\alpha_3\,\alpha_4$ analog sind; doch fehlen bisher die $K\alpha_5\,\alpha_6$ entsprechenden Funkenlinien zweiter Ordnung, die in (3) eingehen. Auch die inzwischen bei anderen *L*- und *M*-Linien gefundenen harten Begleiter sind wohl ausnahmslos Funkenlinien erster Ordnung.

§ 2. Anregung und Absorption.

Die ursprüngliche Vorstellung des Verf., daß die Anregung der mehrfach ionisierten Zustände durch *schrittweise* Entfernung der einzelnen Elektronen zustande komme, ist dem theoretischen Einwand begegnet, daß die Verweilzeit der einfach ionisierten Zustände viel zu kurz und eine nochmalige Ionisation in diesem kleinen Zeitintervall viel zu unwahrscheinlich sei. Viel wahrscheinlicher ist, wie S. Rosseland[1] ausgeführt hat, die *gleichzeitige* Entfernung von zwei oder drei inneren Elektronen in einem einzigen Anregungsprozeß.[2] In der Tat haben die Experimente zugunsten der letzteren Vorstellung entschieden. D. Coster[3] stellte durch Anregungsversuche an der $L\alpha_4$-Linie fest, daß die Anregungsenergie L bzw. L^2-L zur Herstellung ihres Anfangszustandes L^2 noch nicht ausreicht, sondern wahrscheinlich erst die Energie L^2, d. h. ungefähr $2L$. Siegbahn hat[4] bei Schwefel eine Absorptionskante von ungefähr doppelter Härte der *K*-Kante gefunden; sie entspricht dem Zustand K^2, dem Anfangszustand der $K\alpha_4$-Linie. Es ist kaum anzunehmen, daß daneben noch die Kanten K^2-K, $KL-L$ usw. mit merklicher Intensität vorkommen, und damit entfällt die vom Verf. in der früheren Arbeit (§ 5) versuchte Erklärung der Absorptionskantenfeinstruktur.[5] Es versteht sich von selbst, daß die Theorie der Funken*emissionen* davon unberührt bleibt.

Von großem theoretischem Interesse wäre die Beobachtung der Energieniveaus L^2, M^2, L^3, M^3 usw. und deren relativistische und Abschirmungsfeinstruktur. Beispielsweise würde die

---

[1] S. Rosseland, Phil. Mag. 45. S. 65. 1923.

[2] Vgl. auch R. A. Millikan, Phys. Rev. 18. S. 456. 1921.

[3] D. Coster, Phil. Mag. 44. S. 546. 1923; Teil V, §§ 6, 7, S. 567 ff.

[4] Nach freundlicher brieflicher Mitteilung an den Verf.

[5] Man vergleiche in dieser Hinsicht die Ausführungen von Coster, a. a. O. §§ 8, 9.

Kenntnis der Feinstrukturen L^0, L^1, L^2, L^3 . . ., deren Endstufen L^6, L^7 aus den optischen Spektren von *Li* und *Be* bekannt sind, für das Verständnis des Bohrschen Bindungsprozesses von Bedeutung sein. Während man bei den Niveaus *KL*, *LM* . . . wohl eine Unterteilung in $1 \cdot 3$, $3 \cdot 5$ . . . Komponenten erwarten darf, wird man bezüglich L^2, M^2 . . . schwerlich eine Voraussage wagen. Bedenken dürfte z. B. der Umstand erregen, daß bei der relativ intensiven $L\varphi$-Linie ($L\beta_3$) bisher keine Ionisationsfeinstruktur festgestellt werden konnte[1]); doch wird aus den Emissionslinien allein kaum genügende Auskunft über das Niveauschema zu erlangen sein. Bei der Beobachtung der Absorptionskanten dürfte die Hauptschwierigkeit darin bestehen, die Diskontinuitäten in genügender Stärke bei solchen Elementen zu erhalten, deren relativistische Feinstruktur noch auflösbar ist. Aussichtsreicher in bezug auf die Intensitätsverhältnisse ist vielleicht die magnetische Spektralanalyse sekundärer Kathodenstrahlen, wie sie von de Broglie Whiddington und zuletzt von H. Robinson[2]) ausgebildet worden ist.

München, Inst. f. theor. Physik, Dezember 1923.

---

1) Vgl. D. Coster, Phil. Mag. 43. S. 1088. 1922.
2) H. Robinson. Roy. Soc. 104. S. 455. 1923.

(Eingegangen 19. Dezember 1923.)

8. Bemerkung zu meiner Arbeit: „Über die Zentren der Lichtemission der Alkalien“;

von E. Rupp.

Die in der Korrektur-Note Bd. 73. S. 7 ausgesprochene Befürchtung, daß eine Reihe Feinheiten bei der Wiedergabe der photographischen Aufnahmen der Spektren verloren gehen werden, hat sich bei den Fertigdrucken leider in verstärktem Maße bewahrheitet. Es werden deshalb Abzüge der Aufnahmen Tafel I auf Wunsch zur Verfügung gestellt.

Heidelberg, Radiologisches Institut, Januar 1924.

Druck von Metzger & Wittig in Leipzig.

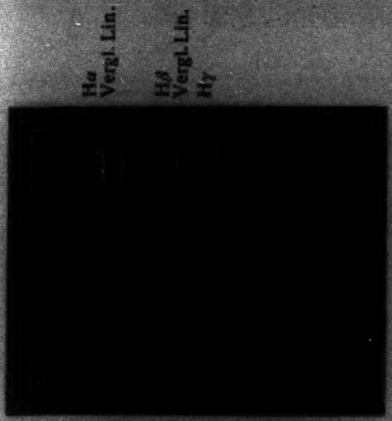

Hα
Vergl. Lin.
Hβ
Vergl. Lin.
Hγ

Fig. 1

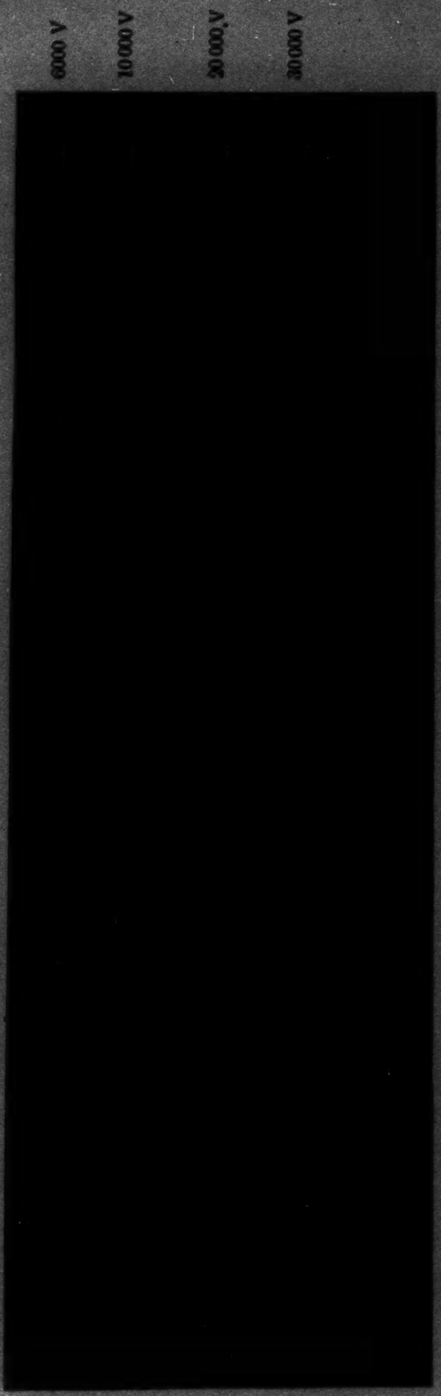

6000 V
10000 V
20000 V
30000 V

Fig. 2

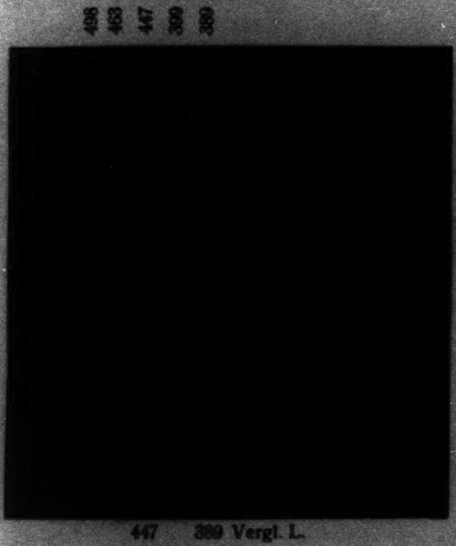

498
463
447
396
389
447
389 Vergl. L.

Fig. 4

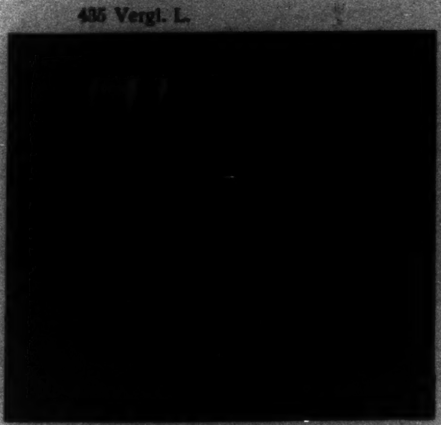


Fig. 7

W. Wien.

OBERLIN COLLEGE LIBRARY

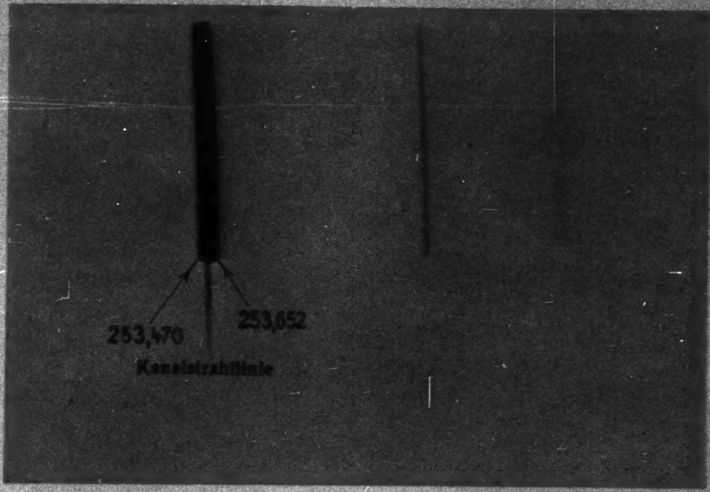

253,470
253,652
Kanalstrahllinie

Fig. 12

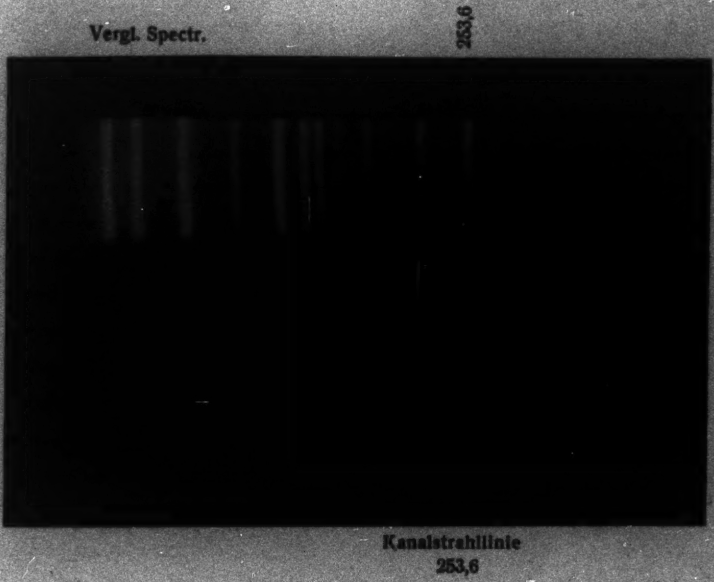

Vergl. Spectr.
253,6
Kanalstrahllinie
253,6

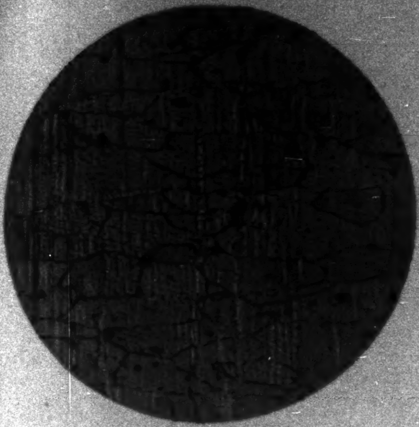
Fig. 13

W. Wien

OBERLIN
COLLEGE
LIBRARY

Tafel IV.

Bild No. 1

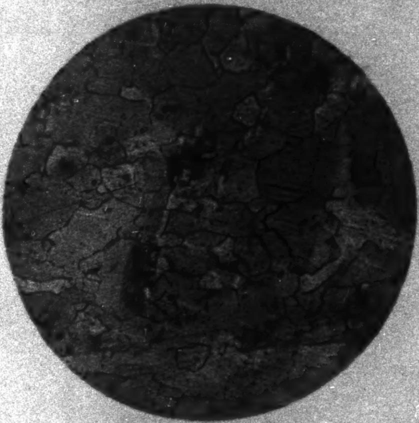


Nach kalter Bearbeitung

Bild No. 2

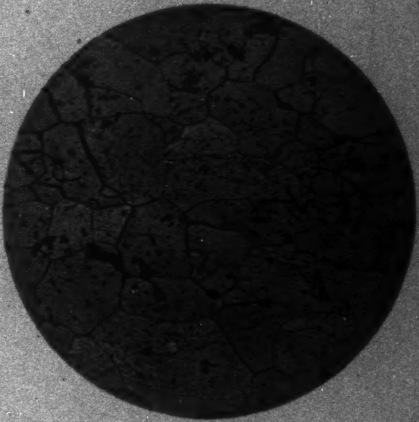
Nach 4 std. Beheizung mit 500° C.

Bild No. 3



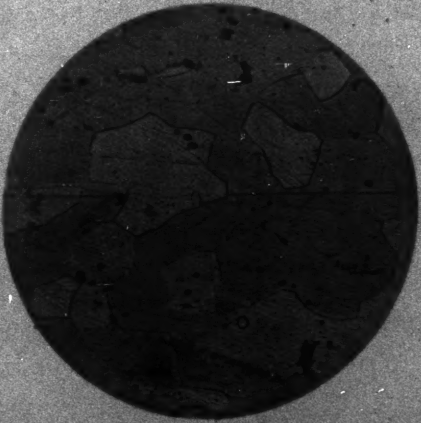
Nach 4 std. Beheizung mit 600° C.

Bild No. 4



Nach 4 std. Beheizung mit 790° C.

Bild No. 5



Nach 4 std. Beheizung mit 900° C.

W. Heraeus.